DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO

Duodécima edición

ARTHUR H. NILSON
Professor Emeritus .
Structural Engineering
Cornell University

Con contribuciones de
DAVID DARWIN
Professor of Civil Engineering
University of Kansas

Traducción
LUIS EDUARDO YAMÍN L.
Ingeniero civil,
profesor asociado e investigador
de la Universidad de los Andes
Master of Science, Stanford University

Revisión técnica
PEDRO NEL QUIROGA S.
Ingeniero civil,
profesor de la Escuela Colombiana de Ingeniería



Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Guatemala • Lisboa • Madrid • México • Nueva York • Panamá • San Juan • Santiago de Chile • Sao Paulo
Auckland • Hamburgo • Londres • Milán • Montreal • Nueva Delhi • París
• San Francisco • San Luis • Sidney • Singapur • Tokio • Toronto

Diseño de estructuras de concreto, duodécima edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS. Copyright © 1999, por McGRAW-HILL INTERAMERICANA, S.A.
Avenida de las Américas 46-41. Santafé de Bogotá, Colombia

Traducido de la duodécima edición en inglés
de Design of Concrete Structures
Copyright © MCMXCVII, por McGRAW-HILL, Inc.
ISBN: 0-07-046586-X

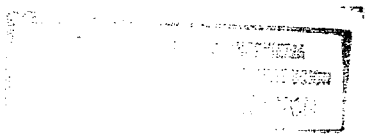
Editora: Emma Ariza H.
1234567890 012345789

ISBN: 958-600-953-X

Impreso en Colombia Printed in Colombia

Se imprimieron 2.600 ejemplares en el mes de junio de 2001
Impreso por Quebecor World Bogotá S.A.

EL AUTOR



Arthur H. Nilson ha trabajado durante más de 40 años en *los campos de investigación, académico y de consultoría relacionados con el concreto estructural.* Desde 1956 está vinculado como miembro de la facultad del College of Engineering en la Universidad de Cornell, donde se encuentra a cargo de los cursos de pregrado y de posgrado en el diseño de estructuras de concreto reforzado y de concreto preesforzado. Ocupó la dirección del departamento de ingeniería estructural entre 1978 y 1985. También ha formado parte de diversos comités profesionales, entre ellos el Building Code Subcommittee 318D del American Concrete Institute (ACI). Su trabajo relacionado con el concreto de alta resistencia, pionero a nivel mundial, ha sido reconocido ampliamente. Fue laureado con la medalla Wason del ACI, por su investigación en materiales en 1974; con la medalla Wason del ACI por el mejor artículo técnico en 1986 y 1987; con el premio ACI Structural Research Award en 1993. Fue elegido miembro del consejo en el ACI y en la American Society of Civil Engineers (ASCE), así como miembro honorario del cuerpo estudiantil de ingeniería civil en la Universidad de Cornell por su excelente labor pedagógica. Fue nombrado profesor emérito en 1991. Es investigador y conferencista en las universidades de Manchester, Salford y Técnica de Milán. Ingeniero registrado en varios estados, previamente a su actividad docente estuvo dedicado de tiempo completo a la práctica profesional. Desde su retiro en 1991 de las actividades docentes ha estado en forma activa en consultoría. En 1948 recibió el título de B.S. en la Universidad de Stanford; en 1956, el de M.S. de la Universidad de Cornell; y en 1967, el de Ph.D. de la Universidad de California en la ciudad de Berkeley.

CONTENIDO

Prefacio xiii

Capítulo 1 Introducción 1

1.1 Concreto, concreto reforzado y concreto preesforzado 1
1.2 Formas estructurales 2
1.3 Cargas 9
1.4 Funcionalidad, resistencia y seguridad estructural 12
1.5 Fundamentos del diseño 15
1.6 Códigos de diseño y especificaciones 16
1.7 Disposiciones de seguridad del Código ACI 16
1.8 Suposiciones fundamentales para el comportamiento del concreto reforzado 19
1.9 Comportamiento de elementos sometidos a cargas axiales 20
Referencias 26
Problemas 27

Capítulo 2 Materiales 28

2.1 Introducción 28
2.2 Cemento 28
2.3 Agregados 29
2.4 Dosificación y mezcla del concreto 31
2.5 Transporte, vaciado, compactación y curado 33

2.6 Control de calidad 34
2.7 Aditivos 36
2.8 Propiedades en compresión 37
2.9 Resistencia a la tensión 43
2.10 Resistencia bajo esfuerzos combinados 45
2.11 Efectos de retracción y temperatura 47
2.12 Concreto de alta resistencia 49
2.13 Aceros de refuerzo para el concreto 50
2.14 Barras de refuerzo 52
2.15 Mallas electrosoldadas de alambrón 57
2.16 Aceros de preesfuerzo 58
Referencias 60

Capítulo 3 Análisis y diseño a flexión de vigas 62

3.1 Introducción 62
3.2 Flexión de vigas homogéneas 62
3.3 Comportamiento de vigas de concreto reforzado 64
3.4 Diseño de vigas rectangulares reforzadas a tensión 74
3.5 Ayudas de diseño 84
3.6 Aspectos prácticos en el diseño de vigas 87
3.7 Vigas rectangulares con refuerzo a tensión y a compresión 89
3.8 Vigas T 96
Referencias 102
Problemas 102

Capítulo 4 Cortante y tensión diagonal en vigas 105

4.1 Introducción 105
4.2 Tensión diagonal en vigas elásticas homogéneas 106
4.3 Vigas de concreto reforzado sin refuerzo a cortante 109
4.4 Vigas de concreto reforzado con refuerzo en el alma 115
4.5 Disposiciones del Código ACI para diseño a cortante 120
4.6 Efecto de las fuerzas axiales 128
4.7 Vigas con altura variable 132
4.8 Modelos alternativos para análisis y diseño a cortante 134
4.9 Vigas de gran altura 138
4.10 Método de diseño de cortante por fricción 148
Referencias 153
Problemas 154

Capítulo 5 Adherencia, anclaje y longitud de desarrollo 157

5.1 Fundamentos de la adherencia a flexión 157
5.2 Resistencia última de adherencia y longitud de desarrollo 161
5.3 Disposiciones del Código ACI para el desarrollo de refuerzo a tensión 165
5.4 Anclaje de barras sometidas a tensión mediante ganchos 169
5.5 Requisitos de anclaje para refuerzo en el alma 173
5.6 Mallas electrosoldadas de alambre 174
5.7 Desarrollo de barras a compresión 175

5.8 Barras en paquete 176
5.9 Puntos de corte y doblamiento de barras en vigas 176
5.10 Ejemplo integrado de un diseño de vigas 183
5.11 Empalmes en barras 187
Referencias 190
Problemas 190

Capítulo 6 Condiciones de servicio 194

6.1 Introducción 194
6.2 Agrietamiento en elementos sometidos a flexión 195
6.3 Disposiciones del Código ACI para el control de las grietas 197
6.4 Control de deflexiones 200
6.5 Deflexiones instantáneas 201
6.6 Deflexiones por cargas que actúan a largo plazo 204
6.7 Disposiciones del Código ACI para el control de las deflexiones 207
6.8 Deflexiones ocasionadas por retracción de fraguado y por cambios de temperatura 213
6.9 Momento *versus* curvatura para secciones de concreto reforzado 216
Referencias 219
Problemas 220

Capítulo 7 Análisis y diseño a torsión 222

7.1 Introducción 222
7.2 Torsión en elementos de concreto simple 224
7.3 Torsión en elementos de concreto reforzado 226
7.4 Torsión y cortante 230
7.5 Disposiciones del Código ACI para diseño a torsión 231
Referencias 238
Problemas 239

Capítulo 8 Columnas cortas 241

8.1 Introducción: compresión axial 241
8.2 Flejes transversales y espirales 244
8.3 Compresión más flexión de columnas rectangulares 249
8.4 Análisis de compatibilidad de deformaciones y diagramas de interacción 250
8.5 Falla balanceada 252
8.6 Refuerzo distribuido 256
8.7 Refuerzo asimétrico 257
8.8 Columnas circulares 258
8.9 Disposiciones de seguridad del Código ACI 259
8.10 Ayudas de diseño 261
8.11 Flexión biaxial 264
8.12 Método del contorno de carga 265
8.13 Método de la carga inversa 267
8.14 Análisis por computador para flexión biaxial de columnas 270
8.15 Empalme de barras en columnas 271
Referencias 272
Problemas 273

Capítulo 9 Columnas esbeltas 276

9.1 Introducción 276
9.2 Columnas cargadas concéntricamente 277
9.3 Compresión más flexión 281
9.4 Criterios del Código ACI para no tener en cuenta los efectos de esbeltez 286
9.5 Criterios del Código ACI para definición de pórticos arriostrados *versus* no arriostrados 287
9.6 Método de amplificación de momento del Código ACI para pórticos no arriostrados 288
9.7 Método de amplificación de momento del Código ACI para pórticos arriostrados 296
9.8 Análisis de segundo orden para efectos de esbeltez 303
Referencias 305
Problemas 305

Capítulo 10 Diseño de refuerzo en las uniones 308

10.1 Introducción 308
10.2 Uniones viga-columna (nudos) 309
10.3 Modelo puntal-tensor (*Strut-and-Tie*) para el comportamiento de las uniones 320
10.4 Uniones viga secundaria-viga principal 321
10.5 Vigas de apoyo 323
10.6 Uniones de esquina y en T 324
10.7 Ménsulas y cornisas 327
Referencias 331
Problemas 331

Capítulo 11 Análisis de vigas y pórticos indeterminados 333

11.1 Continuidad 333
11.2 Aplicación de las cargas 335
11.3 Simplificaciones en el análisis de pórticos 336
11.4 Métodos de análisis elástico 337
11.5 Idealización de la estructura 339
11.6 Diseño preliminar 343
11.7 Análisis aproximados 344
11.8 Coeficientes de momento del Código ACI 349
11.9 Análisis límite 352
11.10 Conclusiones 362
Referencias 363
Problemas 363

Capítulo 12 Losas apoyadas en los bordes 365

12.1 Tipos de losas 365
12.2 Diseño de losas en una dirección 367
12.3 Refuerzo para temperatura y retracción de fraguado 370
12.4 Comportamiento de losas en dos direcciones apoyadas en los bordes 373

12.5 Análisis mediante el método de los coeficientes 375
12.6 Refuerzo para losas en dos direcciones apoyadas en los bordes 379
12.7 Control de deflexiones 385
12.8 Otras consideraciones 389
Referencias 389
Problemas 389

Capítulo 13 Losas en dos direcciones apoyadas sobre columnas 392

13.1 Introducción 392
13.2 Método de diseño directo 395
13.3 Refuerzo a flexión 400
13.4 Límites de espesor del Código ACI 403
13.5 Método del pórtico equivalente 409
13.6 Diseño a cortante en placas y losas planas 417
13.7 Transferencia de momentos a las columnas 430
13.8 Aberturas en losas 433
13.9 Cálculo de deflexiones 434
13.10 Análisis para cargas horizontales 440
Referencias 442
Problemas 443

Capítulo 14 Análisis de losas mediante líneas de fluencia 445

14.1 Introducción 445
14.2 Teorema de los límites superior e inferior 448
14.3 Reglas para las líneas de fluencia 448
14.4 Análisis mediante el equilibrio de segmentos 451
14.5 Análisis mediante el método de trabajo virtual 453
14.6 Refuerzo ortotrópico y líneas de fluencia oblicuas 457
14.7 Condiciones especiales en los bordes y en las esquinas 459
14.8 Patrones en forma de abanico bajo cargas concentradas 461
14.9 Limitaciones de la teoría de líneas de fluencia 463
Referencias 463
Problemas 464

Capítulo 15 Método de las franjas para losas 467

15.1 Introducción 467
15.2 Principios básicos 468
15.3 Selección de la distribución de cargas 469
15.4 Losas rectangulares 472
15.5 Bordes empotrados y continuidad 473
15.6 Bordes libres 478
15.7 Losas con aberturas 485
15.8 El método de las franjas avanzado 488
15.9 Comparación de los métodos para el análisis y diseño de losas 494
Referencias 496
Problemas 496

Capítulo 16 Zapatas y cimentaciones 499

16.1 Tipos y funciones 499
16.2 Zapatas superficiales 499
16.3 Factores de diseño 500
16.4 Cargas, presiones de contacto y dimensiones de las zapatas 501
16.5 Zapatas para muros 503
16.6 Zapatas para columnas 505
16.7 Zapatas combinadas 513
16.8 Zapatas para dos columnas 514
16.9 Cimentaciones continuas, reticulares y losas de cimentación 521
16.10 Dados de pilotes 522
Referencias 525
Problemas 525

Capítulo 17 Muros de contención 527

17.1 Función y tipos de muros de contención 527
17.2 Presión de tierra 528
17.3 Presión de tierra para condiciones usuales de carga 531
17.4 Estabilidad externa 532
17.5 Bases del diseño estructural 534
17.6 Drenaje y otros detalles 536
17.7 Ejemplo: diseño de un muro de contención de gravedad 536
17.8 Ejemplo: diseño de un muro de contención en voladizo 538
17.9 Muros de contención con contrafuertes 545
17.10 Muros de contención prefabricados 547
Referencias 548
Problemas 548

Capítulo 18 Sistemas de construcción para edificios de concreto 550

18.1 Introducción 550
18.2 Sistemas de entrepiso y de cubierta 552
18.3 Muros de cerramiento, muros cortina y muros portantes 563
18.4 Muros estructurales o de cortante 564
18.5 Concreto prefabricado para edificios 568
18.6 Planos de ingeniería para edificios 582
Referencias 583

Capítulo 19 Concreto preesforzado 584

19.1 Introducción 584
19.2 Efectos del preesfuerzo 585
19.3 Fuentes de la fuerza de preesfuerzo 589
19.4 Aceros de preesfuerzo 592
19.5 Concreto para construcción preesforzada 594
19.6 Análisis elástico a flexión 595
19.7 Resistencia a la flexión 601
19.8 Preesfuerzo parcial 605

19.9 Diseño a flexión con base en límites en el esfuerzo del concreto 607
19.10 Selección de la forma 616
19.11 Perfiles de los tendones 617
19.12 Diseño a flexión con base en el balance de carga 619
19.13 Pérdidas de preesfuerzo 624
19.14 Refuerzo a cortante, a tensión diagonal y en el alma 628
19.15 Esfuerzo de adherencia, longitud de transferencia y longitud de desarrollo 635
19.16 Diseño de la zona de anclaje 636
19.17 Deflexión 641
Referencias 644
Problemas 645

Capítulo 20 Diseño sísmico 647

20.1 Introducción 647
20.2 Respuesta estructural 648
20.3 Criterios para cargas sísmicas 652
20.4 Disposiciones especiales del Código ACI para el diseño sísmico 655
20.5 Disposiciones del Código ACI para pórticos 656
20.6 Disposiciones del Código ACI para muros estructurales, diafragmas y cerchas 665
20.7 Disposiciones del Código ACI para resistencia a cortante 666
20.8 Disposiciones del Código ACI para pórticos en zonas de amenaza sísmica moderada 670
Referencias 671
Problemas 671

Apéndices 673

A Ayudas de diseño 673
B Factores de conversión al SI: unidades usuales en los Estados Unidos a unidades del sistema métrico SI 707
C Método de diseño unificado para elementos de concreto reforzado y preesforzado sometidos a flexión y a compresión 708

Índice 713

PREFACIO

La presente edición es una actualización y ampliación del trabajo previo y tiene los mismos objetivos: establecer una clara interpretación del comportamiento del concreto reforzado y desarrollar experiencia en los métodos utilizados en la práctica de diseño actual, con particular referencia a las disposiciones del Código del American Concrete Institute (ACI) de 1995.

Se acepta ampliamente que la sola formación en técnicas especializadas de diseño y en procedimientos codificados no es suficiente para una práctica profesional exitosa. Estos procedimientos están sujetos a cambios frecuentes. Para mantenerse actualizado, el ingeniero necesita una sólida formación en el comportamiento básico del concreto y del acero como materiales estructurales, y en el comportamiento de elementos de concreto reforzado y de estructuras. Por otro lado, el principal objetivo del ingeniero estructural es diseñar eficientemente estructuras seguras y económicas. Por tanto, con esta premisa fundamental como base, es esencial la familiarización con los procedimientos actuales de diseño. Esta edición, al igual que las precedentes, sirve para ambos propósitos.

El texto expone la mecánica básica del concreto estructural y de los métodos para el diseño de elementos individuales sometidos a flexión, cortante, torsión y fuerzas axiales; además ofrece muchos detalles relacionados con aplicaciones a los diversos tipos de sistemas estructurales. El tratamiento de los sistemas de losa, a lo largo de cuatro capítulos, es particularmente completo.

Dos capítulos se han reescrito en buen porcentaje. Las columnas esbeltas, mucho más comunes en la actualidad debido al uso de materiales de mayor resistencia y de conceptos de diseño más refinados, han sido objeto de una reevaluación intensiva, reflejados en la introducción de nuevos procedimientos de diseño en el código ACI 95. El capítulo 9 refleja estas nuevas provisiones al presentar tanto el antiguo como el nuevo método de amplificación de momentos, así como técnicas para análisis de segundo orden. El capítulo 7, referente a torsión, también reescrito en gran medida, se basa ahora en la analogía del tubo de pared delgada y cercha especial, consistente con el Código ACI 95.

El capítulo 20, sobre diseño sísmico, es nuevo y refleja la reciente consideración de su importancia en la seguridad de las estructuras en todo el mundo. Se ha adicionado un apéndice que introduce el método "unificado" de diseño de elementos sometidos a flexión y compresión. Este método alterno, nuevo en el Código ACI de 1995, introduce un conjunto consistente de disposiciones de diseño que pueden aplicarse a vigas de concreto reforzado, a columnas cargadas axial y excéntricamente y a vigas preesforzadas o parcialmente preesforzadas.

La importancia fundamental del despiece de las barras en la seguridad estructural se reconoce en un capítulo independiente, el capítulo 10, dedicado al diseño de las uniones, el cual incorpora las últimas disposiciones del Código ACI. En el capítulo 5 se explican e ilustran los cambios drásticos en las disposiciones del Código referentes al anclaje de barras y longitudes de desarrollo.

Igualmente se encuentra bastante material nuevo en otros capítulos. Los conceptos básicos del modelo puntal y tensor *(strut-and-tie)* se destacan cuando es apropiado para ayudar en la visualización del comportamiento y proveer unas bases sólidas en el diseño de zonas cuyo comportamiento es complejo. Este modelo se emplea en particular para el despiece de uniones, en el diseño del refuerzo a cortante y torsión, y en el diseño de ménsulas y vigas de gran altura. El capítulo 2, de materiales, incluye una nueva sección de aditivos e información de diseño sobre concreto de alta resistencia.

Con el fin de incluir el nuevo material descrito y mantener el tamaño del libro, fue necesario eliminar tres capítulos. El capítulo referente a puentes de la edición anterior se eliminó considerando que en la actualidad la mayoría de puentes de concreto son preesforzados, y su diseño está por fuera del alcance del presente trabajo; excelentes textos dedicados al diseño de puentes están disponibles en el mercado. El capítulo sobre construcción compuesta también fue eliminado. Este tema está más relacionado con el diseño de acero que con el de concreto, y tiene especificaciones y métodos de diseño independientes; también están disponibles excelentes textos. El capítulo relacionado con losas sobre el terreno también fue eliminado; estas losas se diseñan generalmente mediante la utilización de tablas y gráficos basados en ensayos, que están disponibles en varias organizaciones profesionales y comerciales.

En la actualidad, la mayor parte de los diseños se llevan a cabo utilizando programas de computador, bien sean de propósito general, disponibles comercialmente, o programas desarrollados por individuos para sus necesidades particulares. A lo largo del libro se suministran procedimientos de diseño paso a paso con el propósito de guiar al estudiante dentro de las metodologías, cada vez más complejas, del diseño actual. Éstos pueden convertirse fácilmente a diagramas de flujo para ayudar en la programación en computadores. Además, se dan las referencias de muchos de los programas de computador comerciales más utilizados.

El texto es apropiado para uno o dos cursos semestrales sobre diseño de estructuras de concreto. Si el plan de estudios permite sólo un curso (probablemente en el cuarto año de estudios de pregrado), lo siguiente servirá para ese propósito: la introducción y el tratamiento de materiales que se encuentran en los capítulos 1 y 2, respectivamente; el material relacionado con flexión, cortante y anclaje, en los capítulos 3, 4 y 5; el capítulo 6 sobre funcionamiento; el capítulo 8 sobre columnas cortas; y la introducción a losas armadas en una y en dos direcciones, en el capítulo 12. De acuerdo con el tiempo disponible, en clase se cubrirá el análisis de pórticos y los sistemas de construcción, capítulos 11 y 18, pero éstos pueden asignarse como lecturas independientes, de manera simultánea con el trabajo inicial del curso. Según la experiencia del autor, tales lecturas complementarias contribuyen a incrementar la motivación del estudiante.

El texto es bastante adecuado para un segundo curso, probablemente del primer año de estudios de posgrado. Este segundo curso debería incluir una introducción a los temas cada vez más importantes de torsión, capítulo 7; columnas esbeltas, capítulo 9; y el diseño y despiece de las uniones, capítulo 10. También debería ofrecer la oportunidad de estudiar en forma más detallada las losas, incluyendo el enfoque del ACI para las losas apoyadas sobre columnas, capítulo 13, y los métodos de análisis y diseño basados en la teoría de la plasticidad, capítulos 14 y 15. Otros temas

apropiados para un segundo curso incluirían cimentaciones y muros de contención, capítulos 16 y 17, y la introducción al diseño sísmico, capítulo 20. El tema de concreto preesforzado es suficientemente importante para justificar un curso separado. Si el plan de estudios no permite esta última alternativa, el capítulo 19 proporciona una introducción basada en otro texto del autor sobre concreto preesforzado, y puede utilizarse como texto de un curso corto en dicho tema.

Al final de cada capítulo el estudiante encontrará una lista de referencias amplia y actualizada sobre la literatura existente para quienes deseen aumentar su conocimiento a través del estudio individual.

Debe mencionarse además el tema de las unidades. En los Estados Unidos la transformación de las unidades tradicionales al obviamente preferible sistema métrico de unidades SI ha ocurrido muy lentamente, en parte debido al costo de la conversión para la industria de la construcción, pero también debido a ciertas limitaciones del sistema SI (utilización de unidades derivadas, tales como el pascal; eliminación del cm que resulta muy conveniente, etc.) en comparación con el tradicional sistema métrico europeo. Aunque muchos cursos en las áreas de ciencias básicas y ciencias de la ingeniería se dictan ahora en unidades del sistema SI, en la mayoría de los cursos de diseño de nivel superior se continúan utilizando las unidades tradicionales de los Estados Unidos, como reflejo de lo que ocurre en la práctica. De esta manera, a lo largo de este texto se utilizan dichas unidades, aunque los gráficos y los datos básicos del capítulo 2 se dan en los dos sistemas. En el Apéndice B se establece la equivalencia entre los sistemas SI y el tradicional de los Estados Unidos. Una versión del Código ACI está disponible en el sistema métrico SI.

Este volumen es la duodécima edición de un texto originado en 1923 por Leonard C. Urquhart y Charles E. O'Rourke, ambos profesores del área de ingeniería estructural en la Universidad de Cornell en aquel momento. La segunda, la tercera y la cuarta ediciones consolidaron firmemente el trabajo como un texto líder para cursos elementales del área en referencia. El profesor George Winter, también de Cornell, colaboró con Urquhart en la preparación de las ediciones quinta y sexta, y Winter y yo fuimos responsables de las ediciones séptima, octava y novena, que ampliaban sustancialmente tanto el alcance como la profundidad de la presentación. La décima, la undécima y la presente edición se prepararon después de la muerte del profesor Winter, en 1982. David Darwin —estudiante de Winter y mío y ahora profesor del Departamento de Ingeniería Civil en la Universidad de Kansas—, colaboró en la preparación de esta edición, contribuyendo con una amplia revisión de los capítulos de torsión y de columnas esbeltas, y adicionando un capítulo nuevo referente a diseño para fuerzas sísmicas. El profesor Charles W. Dolan de la Universidad de Wyoming, hizo valiosas sugerencias en la preparación del capítulo sobre concreto preesforzado.

Agradecimientos especiales a los siguientes revisores por sus comentarios y sugerencias útiles en ésta y en las ediciones anteriores: Dan Branson, Universidad de Iowa; Kurt Gerstle, Universidad de Colorado; Louis Geschwidner, Universidad del Estado de Pennsylvania; Wayne Klaiber, Universidad del Estado de Iowa; John Stanton, Universidad de Washington; y James Wight, Universidad de Michigan. Agradecimiento especial a B. J. Clark, editor ejecutivo para ingeniería de McGraw-Hill, quien ha trabajado con el autor en cada paso de la producción de las últimas cinco ediciones.

Gustosamente doy mi reconocimiento a los autores originales. Aunque es posible afirmar que ni Urquhart ni O'Rourke reconocerían la mayor parte de los detalles, sí les serían familiares el enfoque del tema y la filosofía educativa, bases para el éxito de las primeras ediciones de este libro único. Reconozco con particular gratitud la influencia del profesor Winter; mi larga relación personal y profesional con él tuvieron un profundo efecto en el desarrollo del punto de vista que ha marcado todo mi trabajo en los capítulos que siguen.

Arthur H. Nilson

CAPÍTULO



INTRODUCCIÓN

1.1 CONCRETO, CONCRETO REFORZADO Y CONCRETO PREESFORZADO

El *concreto* es un material semejante a la piedra que se obtiene mediante una mezcla cuidadosamente proporcionada de cemento, arena y grava u otro agregado, y agua; después, esta mezcla se endurece en formaletas con la forma y dimensiones deseadas. El cuerpo del material consiste en agregado fino y grueso. El cemento y el agua interactúan químicamente para unir las partículas de agregado y conformar una masa sólida. Es necesario agregar agua, además de aquella que se requiere para la reacción química, con el fin de darle a la mezcla la trabajabilidad adecuada que permita llenar las formaletas y rodear el acero de refuerzo embebido, antes de que inicie el endurecimiento. Se pueden obtener concretos en un amplio rango de propiedades ajustando apropiadamente las proporciones de los materiales constitutivos. Un rango aún más amplio de propiedades puede obtenerse mediante la utilización de cementos especiales (cementos de alta resistencia inicial), agregados especiales (los diversos agregados ligeros o pesados), aditivos (plastificantes y agentes incorporadores de aire, microsílice o cenizas volantes) y mediante métodos especiales de curado (curado al vapor).

Estas propiedades dependen en gran medida de las proporciones de la mezcla, del cuidado con el cual se mezclan los diferentes materiales constitutivos, y de las condiciones de humedad y temperatura bajo las cuales se mantenga la mezcla desde el momento en que se coloca en la formaleta hasta que se encuentra totalmente endurecida. El proceso de control de estas condiciones se conoce como *curado*. Para evitar la producción de concretos de bajos estándares se requiere un alto grado de supervisión y control por parte de personas con experiencia durante todo el proceso, desde el proporcionamiento en peso de los componentes, pasando por el mezclado y el vaciado, hasta la terminación del curado.

Los factores que hacen del concreto un material de construcción universal son tan evidentes que ha sido utilizado de diversas maneras por miles de años; probablemente se comenzó a usar en el antiguo Egipto. Uno de estos factores consiste en la facilidad con la cual, mientras se encuentra en estado plástico, puede depositarse y llenar las formaletas y moldes de cualquier forma. Su alta resistencia al fuego y al clima son ventajas evidentes. La mayor parte de los materiales constitutivos, con la excepción del cemento y los aditivos, están disponibles a bajo costo, localmente o muy cerca del sitio de construcción. Su resistencia a la compresión, similar a la de las piedras naturales, es alta lo que lo hace apropiado para elementos sometidos principalmente a compresión, tales como columnas o arcos. Asimismo, de nuevo como en las piedras naturales, el concreto es un

material relativamente frágil, con una baja resistencia a la tensión comparada con la resistencia a la compresión. Esto impide su utilización económica en elementos estructurales sometidos a tensión ya sea en toda su sección (como el caso de elementos de amarre) o sobre parte de sus secciones transversales (como en vigas u otros elementos sometidos a flexión).

Para contrarrestar esta limitación, en la segunda mitad del siglo XIX se consideró factible utilizar acero para reforzar el concreto debido a su alta resistencia a la tensión, principalmente en aquellos sitios donde la baja resistencia a la tensión del concreto limitaría la capacidad portante del elemento. El refuerzo, conformado usualmente por barras circulares de acero con deformaciones superficiales apropiadas para proporcionar adherencia, se coloca en las formaletas antes de vaciar el concreto. Una vez las barras estén completamente rodeadas por la masa de concreto endurecido, comienzan a formar parte integral del elemento. La combinación resultante de los dos materiales, conocida como *concreto reforzado*, combina muchas de las ventajas de cada uno: el costo relativamente bajo, la buena resistencia al clima y al fuego, la buena resistencia a la compresión y la excelente capacidad de moldeo del concreto con la alta resistencia a la tensión y la aún mayor ductilidad y tenacidad del acero. Es precisamente esta combinación la que permite el casi ilimitado rango de usos y posibilidades del concreto reforzado en la construcción de edificios, puentes, presas, tanques, depósitos y muchas otras estructuras.

En tiempos más recientes se ha logrado la producción de aceros cuya resistencia a la fluencia es del orden de cuatro y más veces que la de los aceros comunes de refuerzo, a costos relativamente bajos. Asimismo, ahora es posible producir concretos con resistencias a la compresión cuatro a cinco veces mayores que los concretos comunes. Estos materiales de alta resistencia ofrecen ventajas que incluyen la posibilidad de emplear elementos con secciones transversales más pequeñas disminuyendo las cargas muertas y logrando luces más largas. Sin embargo, existen límites en las resistencias de los materiales constitutivos, por encima de los cuales surgen ciertos problemas. En efecto, la resistencia del elemento se incrementa aproximadamente en proporción a aquélla de los materiales. Sin embargo, las altas deformaciones unitarias que resultan de los altos esfuerzos darían como resultado altas deformaciones y deflexiones de estos elementos bajo condiciones normales de carga. Igualmente importante es que las grandes deformaciones unitarias en los aceros de refuerzo de alta resistencia inducirían amplias grietas en el concreto, de baja resistencia a la tensión de sus alrededores, lo cual no sólo sería estéticamente inadmisible, sino que expondría el acero de refuerzo a la corrosión por humedad y otras acciones químicas. Esto limita la resistencia a la fluencia útil de los aceros de alta resistencia a aproximadamente 80 klb/pulg^2†, de acuerdo con muchas normas y especificaciones; el de 60 klb/pulg^2 es el más común.

A pesar de lo anterior, se ha encontrado una manera especial para combinar aceros y concretos de muy alta resistencia. Este tipo de construcción se conoce como *concreto preesforzado*. El acero, usualmente en forma de alambres, cables o barras, se embebe en el concreto sometiéndolo a una tensión alta, la cual se equilibrará con esfuerzos de compresión en el concreto después del endurecimiento. Debido a esta precompresión, el concreto de un elemento a flexión se agrietará en la zona de tensión para cargas mucho más altas que cuando no está precomprimido. El preesfuerzo reduce de manera significativa las deflexiones y las grietas de flexión para cargas normales, y de esta manera permite la utilización efectiva de materiales de alta resistencia. El concreto preesforzado ha extendido significativamente el rango de luces posibles del concreto estructural y los tipos de estructuras para los cuales es adecuado.

1.2 FORMAS ESTRUCTURALES

Las figuras que siguen muestran algunas de las principales formas estructurales del concreto reforzado. Más adelante en este volumen se discuten métodos pertinentes de diseño para muchas de ellas.

† Abreviatura de kips por pulgada cuadrada o miles de libras por pulgada cuadrada.

Dentro de los sistemas estructurales para entrepisos de edificios se pueden mencionar el entrepiso de placa y viga monolítica que se muestra en la figura 1.1, el sistema de viguetas en una dirección de la figura 1.2, y el sistema tipo placa plana sin vigas que se muestra en la figura 1.3.

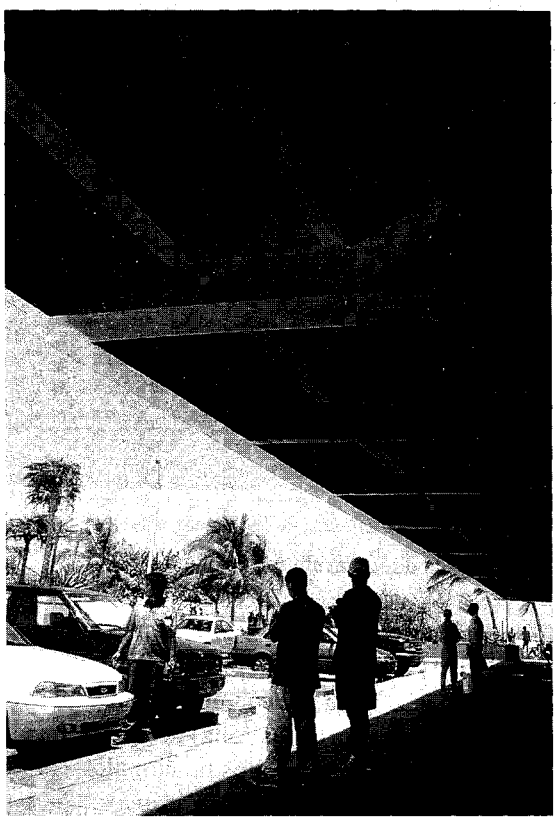


FIGURA 1.1
Losa de entrepiso en concreto reforzado en una dirección con vigas monolíticas de apoyo.



FIGURA 1.2
Sistema de entrepiso de viguetas en 2 direcciones apoyado sobre vigas monolíticas de concreto y riostra transversal en la esquina.

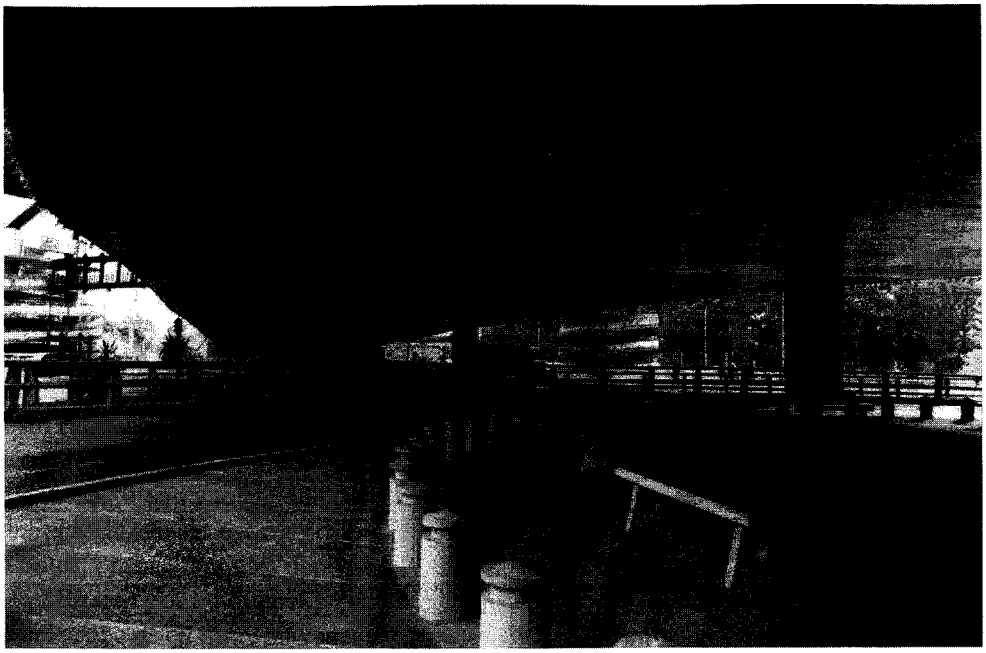


FIGURA 1.3
Losa de entrepiso de placa plana sin vigas, apoyada directamente sobre columnas.

El entrepiso de losa plana que se muestra en la figura 1.4, frecuentemente usado en edificaciones más cargadas (como bodegas), es similar al sistema de entrepiso de placa plana, pero utiliza mayores espesores de placa alrededor de las columnas, al igual que columnas acampanadas en la parte superior para reducir los esfuerzos y aumentar la resistencia en las zonas de apoyo. La elección entre éstos y otros sistemas de entrepiso y cubierta depende de requisitos funcionales, cargas, luces y espesores permisibles de elementos, al igual que de factores económicos y estéticos.

Cuando se requieren luces libres largas para cubiertas, se pueden utilizar cascarones de concreto que permiten el uso de superficies extremadamente delgadas, a menudo más delgadas que una cáscara de huevo. La cubierta en placa plegada de la figura 1.5 se puede construir fácilmente ya que está compuesta de superficies planas. Estas cubiertas se han utilizado para luces de 200 pies y más. Los cascarones cilíndricos de la figura 1.6 son también fáciles de construir debido a su curvatura simple y uniforme; su comportamiento estructural y el rango de luces y cargas son similares a los del sistema de placa plegada.

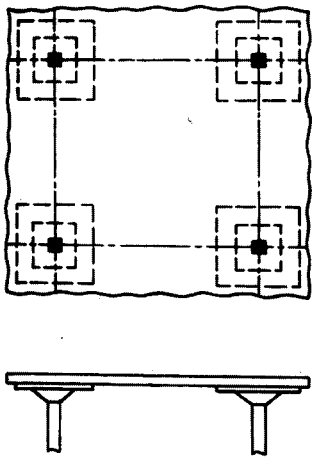


FIGURA 1.4
Sistema de entrepiso de losa plana, sin vigas pero con mayores espesores de placa alrededor de las columnas y columnas acampanadas en la parte superior para absorber concentraciones locales de fuerzas.



FIGURA 1.5
Cubierta de placas plegadas con una luz de 12 metros que, además de soportar las cargas normales de cubierta, sostiene el cuarto piso mediante un sistema libre de columnas interiores.

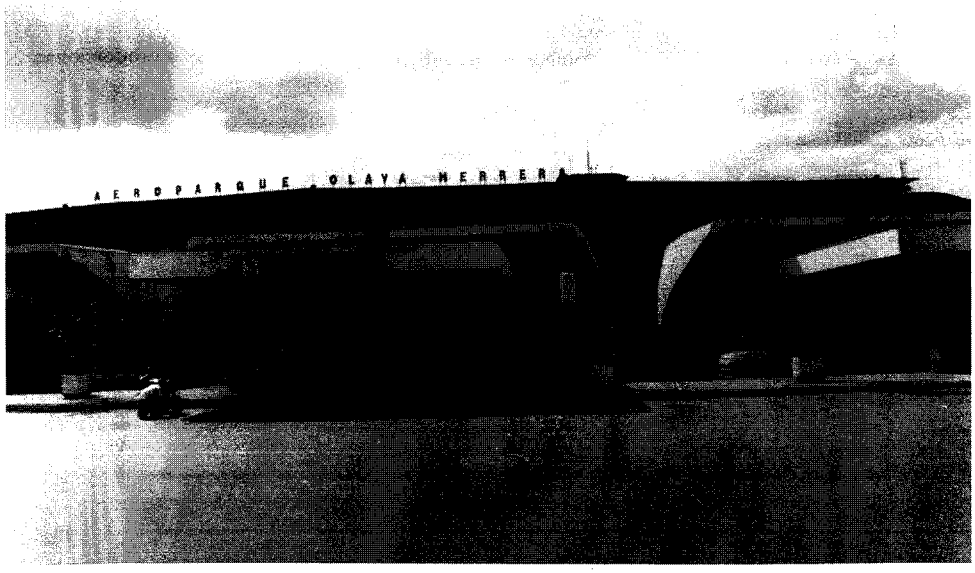


FIGURA 1.6
Cubierta de cascarones cilíndricos que proporciona un espacio interior libre de columnas.

Los cascarones de cubierta con doble curvatura pueden generarse a partir de curvas matemáticas tales como arcos circulares, parábolas e hipérbolas, o pueden conformarse a partir de combinaciones complejas de formas. El paraboloide hiperbólico, definido por una parábola cóncava hacia abajo con movimiento a lo largo de una trayectoria parabólica cóncava hacia arriba, ha sido ampliamente utilizado. Aunque se trata de una superficie de doble curvatura, tiene la propiedad de contener dos sistemas de líneas rectas generadoras que permiten la utilización de formaletas rectas de madera.

El domo de la figura 1.7, que sirve de cubierta a eventos de tipo artístico, consiste esencialmente en un domo circular pero incluye superficies monolíticas, y de bordes curvados hacia arriba, para proporcionar rigidez y resistencia en estas regiones críticas.

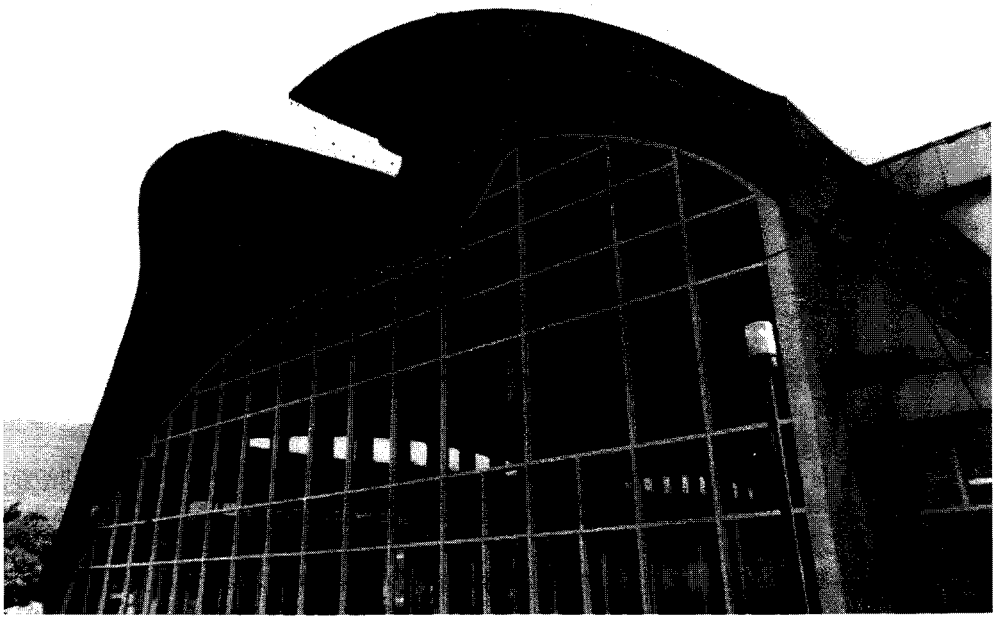


FIGURA 1.7
Cascarón esférico en Medellín, Colombia. Las superficies de borde en voladizo proporcionan rigidez al domo lateral.

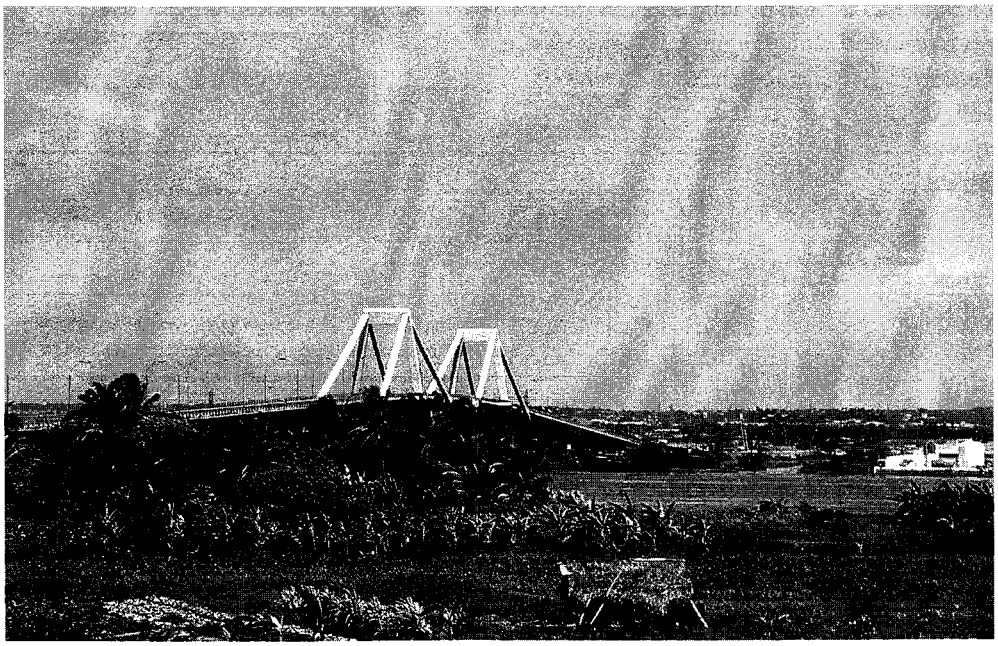


FIGURA 1.8
Puente en concreto sobre el río Magdalena en Colombia.

El diseño de puentes ha dado la oportunidad para algunas de las aplicaciones más retadoras y creativas de la ingeniería estructural. El puente que se muestra en la figura 1.8 consiste principalmente en dos vigas cajón gemelas de concreto apoyadas sobre pilas con forma de Y. La figura 1.9 muestra un intercambiador vial, estructura en concreto que permite el flujo vehicular en tres niveles. El espectacular Natchez Trace Parkway Bridge de la figura 1.10, una estructura en arco de dos luces que utiliza elementos de concreto huecos y prefabricados, sirve de soporte a una autopista de dos carriles a 155 pies por encima del nivel del terreno en el valle. Esta estructura ha merecido varios honores, incluyendo premios de la American Society of Civil Engineers y de la National Endowment for the Arts.

Los tanques cilíndricos de concreto se utilizan ampliamente para almacenamiento de agua o como parte de plantas de tratamiento de aguas residuales. A menudo, los tanques cilíndricos se preesfuerzan circunferencialmente para mantener la compresión en el concreto y eliminar el agrietamiento que de otra manera produciría la presión interna (figura 1.11).

Las formas estructurales de las figuras. 1.1 a 1.11 difícilmente constituyen un inventario completo, pero son ilustrativas de las formas compatibles con las propiedades del concreto reforzado o preesforzado. Ellas ilustran la adaptabilidad del material a una gran variedad de estructuras y componentes estructurales unidimensionales (vigas, riostras, columnas), bidimensionales (losas, arcos, pórticos rígidos) y tridimensionales (cascarones, tanques). Esta variabilidad permite adaptar la forma de la estructura a su función de una manera económica, y proporciona al arquitecto y al ingeniero diseñador una amplia gama de posibilidades para soluciones estructurales estéticamente satisfactorias.

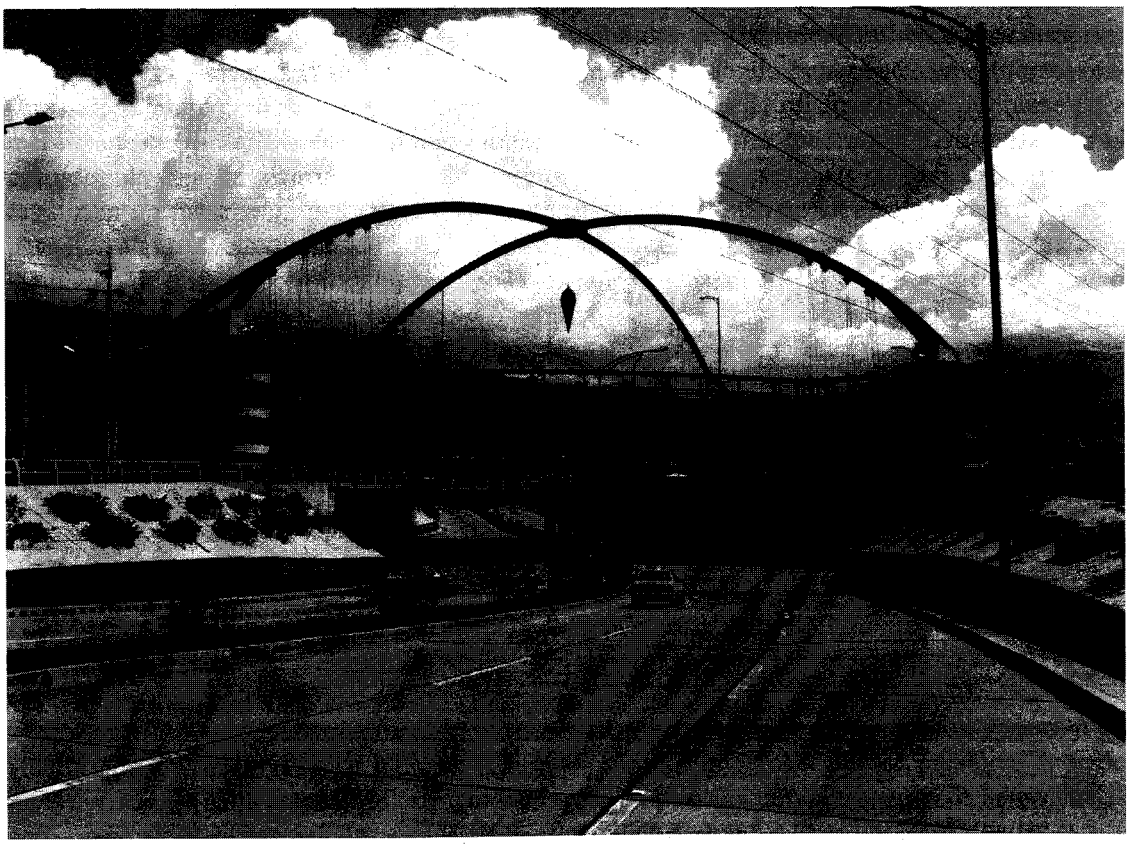


FIGURA 1.9
Intercambiador vial de Carabineros en Medellín, Colombia.

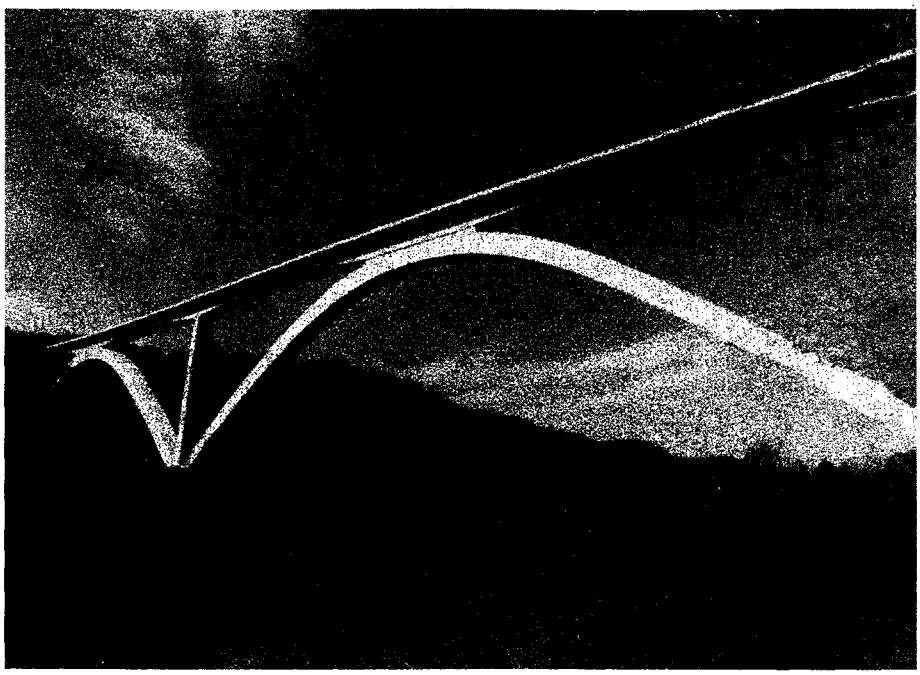


FIGURA 1.10
Natchez Trace Parkway Bridge, cerca a Franklin, Tennessee, una estructura de dos luces en arcos de concreto merecedora de premios, que se levanta 155 pies por encima del nivel de terreno en el valle.

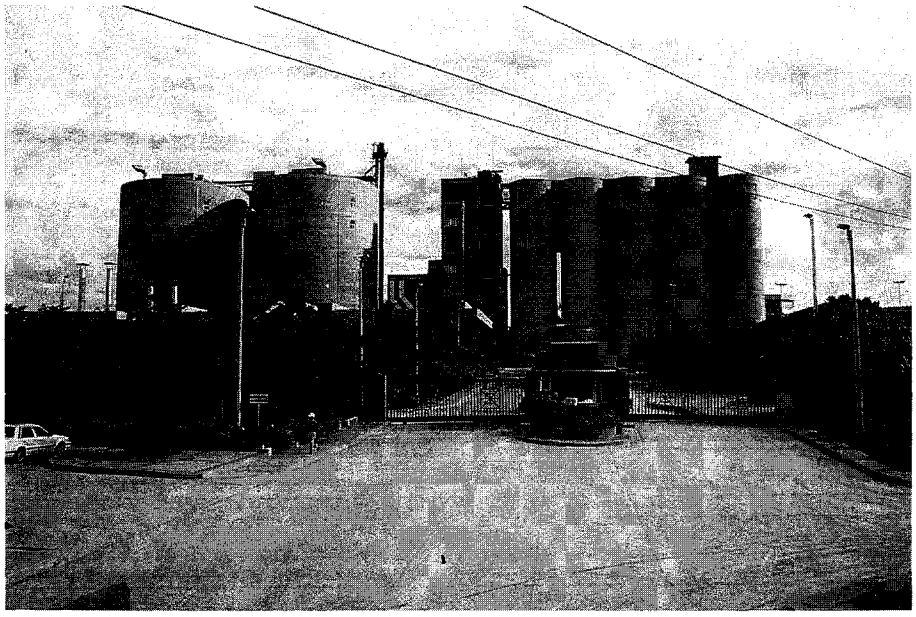


FIGURA 1.11
Tanques circulares de concreto utilizados en instalaciones para almacenamiento de malta en Cartagena, Colombia.

1.3 CARGAS

Las cargas que actúan sobre las estructuras pueden dividirse en tres grandes categorías: cargas muertas, cargas vivas y cargas ambientales.

Las *cargas muertas* son aquellas que se mantienen constantes en magnitud y fijas en posición durante la vida de la estructura. Generalmente la mayor parte de la carga muerta es el peso propio de la estructura. Ésta puede calcularse con buena aproximación a partir de la configuración de diseño, de las dimensiones de la estructura y de la densidad del material. Para edificios, los rellenos y los acabados de entrepisos, y el cielo raso pañetado se toman usualmente como cargas muertas incluyendo una consideración para cargas suspendidas tales como ductos, aparatos y accesorios de iluminación. Para puentes, las cargas muertas pueden incluir superficies de recubrimiento, andenes y barandas, y una consideración para ductos y otras cargas suspendidas.

Las *cargas vivas* consisten principalmente en cargas de ocupación en edificios y cargas de tráfico en puentes. Éstas pueden estar total o parcialmente en su sitio o no estar presentes, y pueden cambiar de ubicación. Su magnitud y distribución son inciertas en un momento dado, y sus máximas intensidades a lo largo de la vida de la estructura no se conocen con precisión. Las cargas vivas mínimas para las cuales deben diseñarse los entrepisos y cubiertas de un edificio se especifican usualmente en el código de construcción que se aplica en el lugar de construcción. La tabla 1.1 presenta una parte del *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures* (ver la referencia 1.1), donde se incluyen valores representativos de las cargas vivas mínimas que deben utilizarse en una amplia variedad de edificios. La tabla presenta valores de cargas vivas uniformemente distribuidas para varios tipos de ocupación; se incluyen consideraciones de impacto cuando es necesario. Estas cargas son los máximos esperados y exceden considerablemente valores promedios.

Además de estas cargas uniformemente distribuidas, se recomienda diseñar los entrepisos para soportar en forma segura algunas cargas concentradas cuando éstas producen esfuerzos mayores. Por ejemplo, de acuerdo con la referencia 1.1, los pisos de oficinas deben diseñarse para resistir una carga de 2000 lb distribuida sobre un área de 2.5 pies cuadrados, para considerar el peso de una caja de seguridad o de otro equipo pesado, y los escalones de las escaleras deben resistir en forma segura una carga de 300 lb aplicada en el centro de un escalón. Usualmente se permiten algunas reducciones en las cargas vivas para elementos con grandes áreas aferentes, bajo la premisa de que es poco probable que toda el área vaya a estar cargada completamente al mismo tiempo (ver las referencias 1.1 y 1.2).

En algunos casos no pueden utilizarse las cargas vivas tabuladas. Debe considerarse específicamente el tipo de ocupación calculando tan preciso como sea posible las cargas más probables. Por ejemplo, las bodegas para almacenamiento pesado deben diseñarse para cargas tan altas como 500 lb/pie^2 (m) o más; ciertas operaciones pesadas en edificaciones industriales pueden requerir un gran incremento con respecto al valor especificado de 125 lb/pie^2 de la tabla 1.1; todas las cargas concentradas importantes y con ubicación definida deben considerarse de manera específica.

Las cargas vivas de servicio para puentes vehiculares están dadas por la American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) en su *Standard Specifications for Highway Bridges* (ver la referencia 1.3). Para puentes de vías férreas, la American Railway Engineering Association (AREA) ha publicado el *Manual of Railway Engineering* (ver la referencia 1.4) el cual especifica las cargas de tráfico.

Las *cargas ambientales* consisten principalmente en cargas de nieve, presión y succión de viento, cargas sísmicas (fuerzas inerciales causadas por movimientos sísmicos), presiones de suelo en las porciones subterráneas de estructuras, cargas de posibles empozamientos de aguas lluvias sobre superficies planas y fuerzas causadas por cambios de temperatura. Al igual que las cargas vivas, las cargas ambientales son inciertas tanto en magnitud como en distribución. La referencia 1.1 contiene mayor información relativa a las cargas ambientales, las cuales se modifican localmente dependiendo, por ejemplo, de las condiciones climáticas o sísmicas.

TABLA 1.1
Cargas vivas mínimas uniformemente distribuidas

Ocupación o uso	Carga viva, lb/pie²[a]	Ocupación o uso	Carga viva, lb/pie²[a]
Apartamentos (ver residencial)		Fábricas e industrias	
Armerías y cuartos de adiestramiento	150	Liviano	125
Áreas de reunión y teatros		Pesado	250
Con sillas fijas (sujetadas al piso)	60	Marquesinas y pabellones	75
Vestíbulos	100	Edificios de oficinas	
Con sillas movibles	100	Los cuartos de archivo y de computadores deben diseñarse para cargas mayores con base en la ocupación esperada	
Plataformas	100	Vestíbulos	100
Pisos de escenarios	150	Oficinas	50
Balcones (exterior)	100	Instituciones penales	
Para residencias de una o dos familias únicamente sin exceder l00 pie²	60	Celdas	40
Boleras, salones de piscinas y áreas de recreación similares	75	Corredores	100
Corredores		Residencial	
Primer piso	100	Casas (uni o bifamiliares)	
Otros pisos igual a la zona que atienden excepto cuando se indica otra cosa		Áticos no habitables sin almacenamiento	10
Salones de baile	100	Áticos no habitables con almacenamiento	20
Plataformas (sobre terreno o techo)		Áticos habitables, dormitorios	30
Igual que las áreas atendidas o según tipo de ocupación acomodada		Todas las demás áreas	40
Comedores y restaurantes	100	Hoteles y casas multifamiliares	
Escaleras de incendio	100	Cuartos privados y corredores que los atienden	40
Para vivienda unifamiliar únicamente	40	Cuartos públicos y corredores que los atienden	100
Garages (para carros de pasajeros únicamente)	50	Escuelas y colegios	
Para camiones y buses usar cargas de carril dadas por AASHTO[b] (pueden controlar algunos requisitos adicionales para cargas concentradas)		Salones de clase	40
Tribunas (ver graderías de estadios y plazas de todos)		Corredores en pisos superiores al primero	80
Gimnasios, pisos principales y balcones	100	Andenes, vías vehiculares y patios sometidos a tráfico[d]	250
Hospitales		Graderías de estadios y plazas de toros[e]	100
Salas de operación, laboratorios	60	Escaleras y vías de salida	100
Cuartos privados	40	Bodegas de almacenamiento	125
Salas	40	Livianas	125
Corredores en pisos superiores al primero	80	Pesadas	250
Hoteles (ver residencial)		Almacenes	
Bibliotecas		Al por menor	
Cuartos de lectura	60	Primer piso	100
Cuartos de almacenamiento, no menos de[c]	150	Pisos superiores	75
Corredores en pisos superiores al primero	80	Al por mayor, todos los pisos	125
		Vías peatonales y plataformas elevadas (diferentes a vías de salida)	60
		Patios y terrazas (peatonales)	100

[a] Libras por pie cuadrado.
[b] American Association of State and Transportation Officials.
[c] El peso de los libros y de las estanterías debe calcularse utilizando una densidad supuesta de 65 lb/pie³ (libras por pie cúbico, usualmente abreviado lb/pie³) y convertidas a una carga uniformemente distribuida; esta carga debe utilizarse si excede el valor dado de 150 lb/pie².
[d] Las cargas lineales dadas por la AASHTO también deben considerarse cuando sea apropiado.
[e] Para recomendaciones detalladas, ver el American National Standard for Assembly Seating, Tents, and Air-Supported Structures, ANSI/NFPA 102.
Fuente: Tomado de la referencia 1.1. Utilizado con permiso del American Society of Civil Engineers.

A manera ilustrativa se incluye la figura 1.12 tomada de la edición de 1972, referencia 1.1, la cual presenta las cargas de nieve para los Estados Unidos. La edición de 1995, referencia 1.1, contiene información mucho más detallada. En cualquier caso, los valores especificados no representan valores promedio sino límites máximos esperados. En general se especifica una carga mínima para cubiertas de 20 lb/pie^2 para considerar las cargas de construcción y reparación, y para asegurar una rigidez razonable.

En años recientes se ha progresado en el desarrollo de métodos racionales para predicción de fuerzas horizontales sobre estructuras debidas a la acción del viento y de sismos. La referencia 1.1 resume el estado actual relacionado con las metodologías para el cálculo de las cargas de viento e incluye buena información con relación a las cargas de sismo. La referencia 1.5 presenta recomendaciones detalladas para el cálculo de las cargas laterales debidas a terremotos.

La mayoría de los códigos de construcción especifican presiones de viento de diseño por pie cuadrado de superficie de pared vertical. Dependiendo de la localización, estas fuerzas estáticas equivalentes varían desde aproximadamente 10 hasta 50 lb/pie^2. Algunos factores considerados en normas más recientes incluyen velocidades de viento probables, exposición (urbana *vs.* terrenos abiertos, por ejemplo), altura de la estructura, importancia de la misma (por ejemplo, consecuencias de la falla) y factores para considerar la naturaleza fluctuante del viento y su interacción con la estructura.

Para una estructura dada, las fuerzas sísmicas pueden determinarse mediante análisis dinámicos elásticos o inelásticos, teniendo en cuenta las aceleraciones esperadas del terreno, la masa, la rigidez y el amortiguamiento de la construcción. Sin embargo, el diseño está basado usualmente en fuerzas estáticas equivalentes, calculadas a partir de normas tales como las referencias 1.1 y 1.5. El cortante basal se determina considerando factores como la localización del sitio de construcción, el tipo de estructura y su ocupación, la carga muerta total y las condiciones particulares del suelo. La fuerza lateral total que se obtiene se distribuye a los entrepisos en toda la altura de la estructura de manera que su distribución se aproxime a aquélla obtenida en un análisis dinámico.

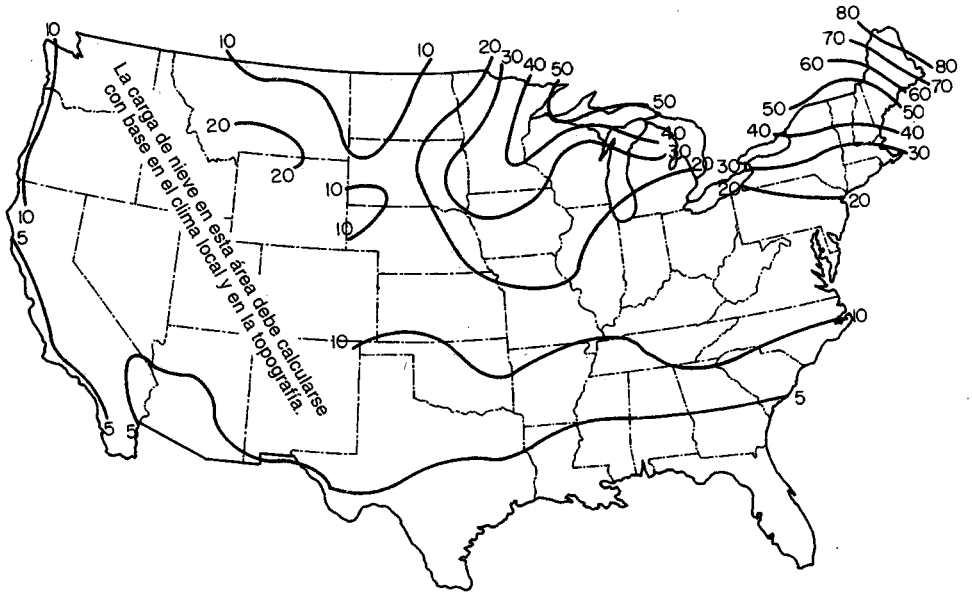


FIGURA 1.12
Cargas de nieve sobre el terreno en libras por pie cuadrado, para un periodo de retorno de 50 años.

1.4 FUNCIONALIDAD, RESISTENCIA Y SEGURIDAD ESTRUCTURAL

Para que una estructura cumpla sus propósitos debe ser segura contra el colapso y funcional en condiciones de servicio. La funcionalidad requiere que las deflexiones sean pequeñas, que las fisuras, si existen, se mantengan en límites tolerables, que las vibraciones se minimicen, etc. La seguridad requiere que la resistencia de la estructura sea la adecuada para todas las cargas que puedan llegar a actuar sobre ella. Si la resistencia de la estructura, construida tal como se diseñó, pudiera predecirse en forma precisa, y si las cargas y sus efectos internos (momentos, cortantes, fuerzas axiales) se conocieran con precisión, la seguridad podría garantizarse proporcionando una capacidad portante ligeramente superior a la que se requiere para las cargas conocidas. Sin embargo, existen diversas fuentes de incertidumbre en el análisis, diseño y construcción de estructuras de concreto reforzado. Estas fuentes de incertidumbre, que requieren un margen de seguridad definido, pueden enumerarse como sigue:

1. Las cargas reales pueden diferir de las supuestas.
2. Las cargas reales pueden estar distribuidas de manera diferente a la supuesta.
3. Las suposiciones y simplificaciones inherentes a cualquier análisis pueden resultar en efectos calculados, momentos, cortantes, etc., diferentes de aquellos que de hecho actúan sobre la estructura.
4. El comportamiento estructural real puede diferir del supuesto, debido a las limitaciones del conocimiento.
5. Las dimensiones reales de los elementos pueden diferir de aquellas especificadas.
6. El refuerzo puede no estar en la posición definida.
7. Las resistencias reales de los materiales pueden diferir de aquellas especificadas.

Además, para la definición de las especificaciones de seguridad deben considerarse las consecuencias de la falla. En algunos casos, una falla puede llegar a ser simplemente un inconveniente. En otros casos, pueden estar involucradas pérdidas de vidas o pérdidas significativas en la propiedad. También debe darse atención a la naturaleza de la falla en caso de que ocurra. Una falla gradual, que dé aviso suficiente y que permita tomar medidas remediales es preferible a un colapso súbito e inesperado.

Es evidente que la selección de un margen de seguridad apropiado no es un asunto simple. Sin embargo, se han hecho progresos hacia disposiciones de seguridad más racionales en los códigos de diseño (ver las referencias 1.6 a 1.9).

a. Variabilidad de las cargas

Debido a que la carga máxima que va a ocurrir durante la vida de una estructura es incierta, ésta puede considerarse como una variable aleatoria. A pesar de esta incertidumbre, el ingeniero debe diseñar una estructura adecuada. Un modelo de probabilidad para la carga máxima puede deducirse a partir de una función de densidad probabilística para cargas, tal como se presenta en la curva de frecuencia de la figura 1.13*a*. La forma exacta de esta curva de distribución para un tipo de carga particular, tal como cargas de oficinas, puede determinarse únicamente con base en datos estadísticos obtenidos a partir de mediciones de cargas a gran escala. Algunas de estas mediciones se han realizado en el pasado y otras están en progreso. Para tipos de carga para los cuales estos datos son escasos, es necesario recurrir a información relativamente confiable basada en la experiencia, la observación y el criterio.

Para una curva de frecuencia (figura 1.13*a*), el área bajo la curva entre dos abscisas, tales como las cargas Q_1 y Q_2, representa la probabilidad de ocurrencia de cargas Q de magnitud $Q_1 < Q < Q_2$. Para diseño se selecciona conservadoramente una carga de servicio especificada Q_d

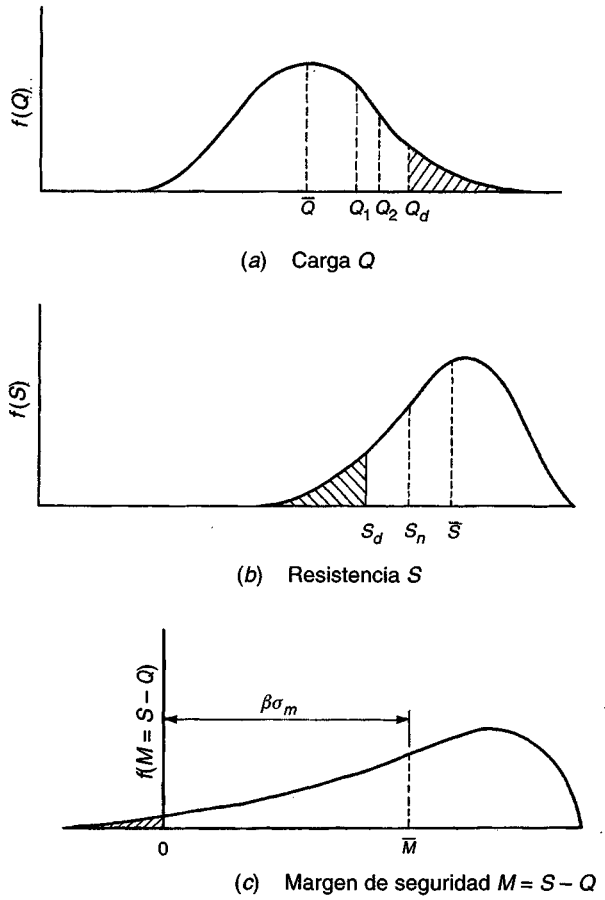


FIGURA 1.13
Curvas de frecuencia para (*a*) cargas Q; (*b*) resistencias S; y (*c*) margen de seguridad M.

ocurrencia de cargas mayores a Q_d está dada entonces por el área sombreada bajo la curva a la derecha de Q_d. Esta carga de servicio especificada es considerablemente mayor que la carga media $\overline{Q}$ que actúa sobre la estructura. La carga media es mucho más representativa de las condiciones de carga promedio sobre la estructura que la carga de diseño especificada Q_d.

b. Resistencia

La resistencia de una estructura depende de las resistencias de los materiales que la conforman; por esta razón se especifican en forma estándar las resistencias mínimas de los materiales. Las resistencias reales de los materiales no pueden conocerse en forma precisa y por tanto también constituyen variables aleatorias (ver la sección 2.6). Aún más, la resistencia de la estructura depende también del cuidado que se tenga en la construcción, lo cual a su vez refleja la calidad de la supervisión y de la inspección. El tamaño de los elementos puede diferir de las dimensiones especificadas, el refuerzo puede estar fuera de su posición, el concreto mal colocado puede presentar hormigueros, etc.

La resistencia de toda la estructura o de una población de estructuras repetitivas, como por ejemplo el conjunto de pasos elevados en carreteras, también puede considerarse como variable aleatoria con función de densidad probabilística del tipo mostrado en la figura 1.13*b*. Como en el caso de las cargas, la forma exacta de esta función no puede conocerse, pero puede aproximarse mediante datos conocidos, tales como estadísticas sobre resistencias reales de materiales y elementos, o información similar. Considerable información de este tipo está disponible y se seguirá desarrollando y utilizando en el futuro.

c. Seguridad estructural

Una estructura dada tiene *margen de seguridad M* si

$$M = S - Q > 0 \tag{1.1}$$

es decir, si la resistencia de la estructura es mayor que las cargas que actúan sobre ella. Debido a que S y Q son variables aleatorias, el margen de seguridad $M = S - Q$ también es una variable aleatoria. Una gráfica de la función de probabilidad de M puede representarse como en la figura 1.13*c*. La falla ocurre cuando M es menor que cero; la probabilidad de falla está representada entonces por el área sombreada de la figura.

Aunque la forma precisa de la función de densidad probabilística para S y Q, por tanto para M, no se conoce, este concepto puede utilizarse como una metodología racional para estimar la seguridad estructural. Una posibilidad consiste en exigir que el margen de seguridad promedio M sea un número especificado β de desviaciones estándares σ_m por encima de cero. Puede demostrarse que esto resulta en el siguiente requisito

$$\psi_s \overline{S} \geq \psi_L \overline{Q} \tag{1.2}$$

donde ψ_s es un coeficiente de seguridad parcial menor que uno (1) aplicado a la resistencia media $\overline{S}$ y ψ_L es un coeficiente de seguridad parcial mayor que uno (1) aplicado a la carga media $\overline{Q}$. La magnitud de cada uno de los coeficientes de seguridad parciales depende de la varianza de la cantidad a la cual aplica, S o Q, y del valor seleccionado de β, que es el índice de seguridad de la estructura. Como guía general, un valor del índice de seguridad β entre 3 y 4 corresponde a una probabilidad de falla del orden de 1:100,000 (ver la referencia 1.8). El valor de β se determina usualmente mediante calibración frente a diseños bien acreditados y sustentados.

En la práctica resulta más conveniente introducir coeficientes de seguridad parciales con respecto a cargas especificadas en el código, que como se mencionó, exceden considerablemente los valores promedio, en lugar de utilizar cargas medias como en la ecuación (1.2); de manera similar, el coeficiente de seguridad parcial para la resistencia se aplica a la resistencia nominal calculada en forma conservadora en lugar de la resistencia media como en la ecuación (1.2). En estos términos, se pueden replantear los requisitos de seguridad así:

$$\phi S_n \geq \gamma Q_d \tag{1.3a}$$

en la cual ϕ es un factor de reducción de resistencia aplicado a la resistencia nominal S_n, y γ es un factor de carga aplicado a las cargas de diseño Q_d calculadas o especificadas en los códigos. Aún más, reconociendo las diferencias en la variabilidad entre las cargas muertas D y las cargas vivas L, por ejemplo, es razonable y sencillo introducir factores de carga diferentes para tipos de carga diferentes. La ecuación precedente puede entonces reescribirse

$$\phi S_n \geq \gamma_d D + \gamma_l L \tag{1.3b}$$

en la cual γ_d es un factor de carga un poco mayor que uno (1) aplicado a la carga muerta calculada D, y γ_l es un factor de carga aun mayor aplicado a la carga viva L especificada por el código. Cuando se tienen en cuenta cargas adicionales, tales como cargas de viento W, puede considerarse la menor probabilidad de que las cargas máximas muertas, vivas y de viento, u otras cargas, vayan a actuar simultáneamente, mediante un factor α menor que uno (1) tal que

$$\phi S_n \geq \alpha(\gamma_d D + \gamma_l L + \gamma_w W + \ldots) \tag{1.3c}$$

Las especificaciones vigentes de diseño en los Estados Unidos siguen los formatos de las ecuaciones (1.3*b*) y (1.3*c*).

1.5 FUNDAMENTOS DEL DISEÑO

La característica particular más importante de cualquier elemento estructural es su resistencia real, la cual debe ser lo suficientemente elevada para resistir, con algún margen de reserva, todas las cargas previsibles que puedan actuar sobre aquél durante la vida de la estructura, sin que se presente falla o cualquier otro inconveniente. Es lógico, por tanto, dimensionar los elementos, es decir, seleccionar las dimensiones del concreto y la cantidad de refuerzo, de manera que sus resistencias sean adecuadas para soportar las fuerzas resultantes de ciertos estados hipotéticos de sobrecarga, utilizando cargas considerablemente mayores que las cargas que se espera que actúen en la realidad durante el servicio. Esta metodología de diseño se conoce como *diseño a la resistencia*.

Para estructuras de concreto reforzado sujetas a cargas cercanas a las de falla, uno o los dos materiales, el concreto y el acero, estarán inevitablemente en su rango inelástico no lineal. Es decir, el concreto en un elemento estructural alcanza su resistencia máxima y su falla subsecuente para un nivel de esfuerzos y deformaciones muy por encima del rango elástico inicial en los cuales los esfuerzos y deformaciones son aproximadamente proporcionales. De manera similar, el acero en un elemento cercano o en la falla estará esforzado más allá del dominio elástico hasta y aun por encima de la zona de fluencia. Consecuentemente, la resistencia nominal de un elemento debe calcularse con base en el comportamiento inelástico de los materiales que lo conforman.

Un elemento diseñado por el método de la resistencia debe también demostrar un comportamiento satisfactorio bajo las cargas normales de servicio. Por ejemplo, las deflexiones en vigas deben estar limitadas a valores aceptables y el número de fisuras de flexión y su espesor para cargas de servicio deben mantenerse controlados. Las condiciones límites de servicio son parte importante del diseño aunque la atención se enfoque inicialmente en la resistencia.

Como alternativa al método de diseño a la resistencia, los elementos pueden dimensionarse algunas veces de manera que los esfuerzos en el acero y en el concreto resultantes de cargas normales de servicio, estén dentro de unos límites especificados. Estos límites, conocidos como *esfuerzos admisibles,* son apenas fracciones de los esfuerzos de falla de los materiales. El concreto responde en forma razonablemente elástica para esfuerzos de compresión que no excedan la mitad de su resistencia, mientras que el acero permanece elástico prácticamente hasta su esfuerzo de fluencia. De esta manera, los elementos pueden diseñarse con base en métodos elásticos siempre y cuando los esfuerzos para las cargas de servicio permanezcan por debajo de estos límites.

Si los elementos se dimensionan con base en dichas cargas de servicio, el margen de seguridad necesario se logra estipulando esfuerzos admisibles bajo cargas de servicio que sean fracciones apropiadamente pequeñas de la resistencia a la compresión del concreto y del esfuerzo de fluencia del acero. Esta metodología de diseño se conoce como *diseño para cargas de servicio*. En la práctica se establecen valores para los esfuerzos admisibles, que para el concreto son de aproximadamente la mitad de su resistencia a la comprensión, y para el acero, la mitad de su esfuerzo de fluencia.

En el método más antiguo de diseño para cargas de servicio, todos los tipos de carga se tratan de la misma manera sin importar qué tan diferentes sean su variabilidad individual y su incertidumbre. Asimismo, los esfuerzos se calculan con base en métodos elásticos, cuando en la realidad la resistencia de un elemento depende del comportamiento esfuerzo-deformación en el rango inelástico cercano y en la falla. Por esta razón, el método de diseño para cargas de servicio no permite una evaluación explícita del margen de seguridad. En contraste, en el método de diseño a la resistencia, más moderno que el anterior, se pueden ajustar los factores individuales de carga para representar grados diferentes de incertidumbre para los diversos tipos de carga. También pueden ajustarse los factores de reducción de resistencia a la precisión con la cual se calculan los diferentes tipos de resistencias (flexión, cortante, torsión, etc.) y la resistencia misma en cada caso se calcula considerando explícitamente la acción inelástica. En el método de diseño para cargas de servicio, el comportamiento con respecto a las deflexiones y al agrietamiento se considera comúnmente sólo en forma implícita a través de los límites impuestos a los esfuerzos producidos por las cargas de servicio.

Debido a estas diferencias tanto en realismo como en confiabilidad, el método de diseño a la resistencia ha desplazado rápidamente, durante las últimas décadas, el método más antiguos de diseño para cargas de servicio. Sin embargo, éste último se usa aún en ocasiones. A lo largo de este texto se presenta casi exclusivamente el método de diseño a la resistencia.

1.6 CÓDIGOS DE DISEÑO Y ESPECIFICACIONES

El diseño de estructuras de concreto como las que se muestran en las figuras 1.1 a 1.11, se lleva a cabo generalmente dentro de un contexto de códigos que dan requisitos específicos para materiales, para el análisis estructural, para el dimensionamiento de elementos, etc. En contraste con otros países altamente desarrollados, los Estados Unidos no tienen un código oficial nacional que gobierne el concreto estructural. La responsabilidad de producir y mantener especificaciones de diseño descansa sobre varios grupos profesionales, asociaciones gremiales e institutos técnicos que han producido los documentos necesarios.

El American Concrete Institute (ACI) ha sido durante mucho tiempo un líder en tales esfuerzos. Como parte de sus actividades, el American Concrete Institute ha publicado el reconocido *Building Code Requirements for Structural Concrete* (ver la referencia 1.10), que sirve como una guía en el diseño y construcción de edificios de concreto reforzado. El Código ACI no es un documento oficial por sí mismo. Sin embargo, es reconocido ampliamente como un documento autorizado para la buena práctica en el campo del concreto reforzado. Como resultado, éste se ha incorporado por ley en innumerables códigos de construcción municipales y regionales que sí tienen una connotación legal. Sus disposiciones alcanzan de esta manera un soporte legal. En los Estados Unidos la mayoría de los edificios en concreto reforzado y construcciones similares se diseñan de acuerdo con el Código ACI vigente. Éste ha servido también como documento modelo para muchos otros países. Una segunda publicación del ACI, *Commentary on Building Code Requirements for Structural Concrete* (ver la referencia 1.11) contiene material de apoyo e interpretación para las disposiciones del Código. El American Concrete Institute también publica importantes revistas y normas al igual que recomendaciones para el análisis y diseño de estructuras especiales de concreto como los tanques de la figura 1.11.

La mayor parte de los puentes vehiculares de los Estados Unidos están diseñados de acuerdo con los requisitos de las especificaciones para puentes de la AASHTO (ver la referencia 1.3) que no sólo contienen las disposiciones relacionadas con las cargas y su distribución mencionadas anteriormente, sino que también disposiciones específicas para el diseño y construcción de puentes de concreto. Muchas de las disposiciones siguen muy de cerca las dadas por el Código ACI, aunque existen algunas diferencias.

El diseño de puentes de vías férreas se realiza de acuerdo con las especificaciones del AREA *Manual of Railway Engineering* (ver la referencia 1.4). Éste también sigue el Código ACI en muchos aspectos, pero contiene buena cantidad de material adicional relacionado con estructuras de todo tipo para vías férreas.

Ningún código o especificación de diseño puede utilizarse como sustituto de un criterio de ingeniería sólido en el diseño de estructuras de concreto. En la práctica estructural a menudo se encuentran circunstancias especiales donde las disposiciones del Código sirven únicamente como guías y el ingeniero debe confiar en un firme entendimiento de los principios básicos de la mecánica estructural aplicada al concreto reforzado o preesforzado, y en un conocimiento profundo de la naturaleza de los materiales.

1.7 DISPOSICIONES DE SEGURIDAD DEL CÓDIGO ACI

Las disposiciones de seguridad del Código ACI se adaptan a las formas de las ecuaciones (1.3*b*) y (1.3*c*), las cuales utilizan factores de carga de resistencia y factores de mayoración de las cargas.

Estos factores están basados hasta cierto punto en información estadística, pero confían en un alto grado en la experiencia, en el criterio de ingeniería y en ciertos compromisos. La resistencia de diseño ϕS_n de una estructura o elemento debe ser por lo menos igual a la resistencia requerida U calculada a partir de las cargas mayoradas, es decir,

Resistencia de diseño ≥ Resistencia requerida

o

$$\phi S_n \geq U \tag{1.4}$$

La resistencia nominal S_n se calcula (usualmente en forma algo conservadora) mediante métodos aceptados. La resistencia requerida U se calcula aplicando los factores de carga apropiados a las cargas de servicio respectivas: carga muerta D, carga viva L, carga de viento W, carga sísmica E, presión de tierra H, presión de fluido F, impacto I y efectos ambientales T que pueden incluir asentamientos, flujo plástico, retracción de fraguado y cambios de temperatura. Las cargas se definen en un sentido general para incluir ya sea cargas directas o efectos internos relacionados, tales como momentos, cortantes y axiales. De esta manera, y en términos específicos, para un elemento sometido por ejemplo a momento, cortante y axial:

$$\phi M_n \geq M_u \tag{1.5a}$$
$$\phi V_n \geq V_u \tag{1.5b}$$
$$\phi P_n \geq P_u \tag{1.5c}$$

donde los subíndices n indican las resistencias nominales a flexión, cortante y axial respectivamente, y los subíndices u indican los efectos mayorados de momento, cortante y axial. Para el cálculo de los efectos de las cargas mayoradas a la derecha de las ecuaciones, los factores de carga pueden aplicarse ya sea a las cargas de servicio directamente o a los efectos internos de las cargas calculados a partir de las cargas de servicio.

En la tabla 1.2 se resumen los factores de carga especificados por el Código ACI los cuales deben aplicarse a las cargas muertas calculadas, y a las cargas vivas y ambientales especificadas en los códigos o normas apropiados. Éstos son consistentes con los conceptos introducidos en la sección 1.4.

TABLA 1.2
Combinaciones de cargas mayoradas para determinar la resistencia requerida U en el Código ACI

Condición	Carga o efecto de carga mayorada U
Básica	$U = 1.4D + 1.7L$
Viento	$U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W)$
	e incluir una consideración con $L = 0$
	$U = 0.9D + 1.3W$
	$U = 1.4D + 1.7L$
Sismo	$U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.87E)$
	e incluir una consideración con $L = 0$
	$U = 0.9D + 1.43E$
	$U = 1.4D + 1.7L$
Presión de tierra	$U = 1.4D + 1.7L + 1.7H$
	$U = 0.9D + 1.7H$
	$U = 1.4D + 1.7L$
Fluidos	Adicionar $1.4F$ a todas las cargas que incluyan L
Impacto	Sustituir $L + I$ en lugar de L
Efectos de asentamiento, flujo plástico, retracción de fraguado o cambios de temperatura	$U = 0.75(1.4D + 1.4T + 1.7L)$
	$U = 1.4(D + T)$

Considerando las cargas individualmente, se utilizan factores menores para aquellas que se conocen con mayor certeza, por ejemplo las cargas muertas, en comparación con otras de mayor variabilidad, como las cargas vivas. Además, para combinaciones de carga tales como cargas muertas y vivas más cargas de viento, se aplica un coeficiente de reducción para considerar una probabilidad menor de que una carga viva excesivamente grande coincida con una tormenta de viento severa. Los factores también reflejan de manera general las incertidumbres con las cuales se calculan los efectos internos de las cargas a partir de las cargas externas en sistemas tan complejos como las estructuras de concreto reforzado inelásticas y altamente indeterminadas que, adicionalmente, incluyen elementos de sección variable (debido a agrietamientos por tensión, refuerzo discontinuo, etc.). Por último, los factores de carga también permiten distinguir entre dos situaciones: una en la que el efecto de todas las cargas simultáneas es aditivo a diferencia de la otra en la que los efectos de las cargas se contrarrestan entre sí, particularmente cuando hay las fuerzas horizontales al tiempo con la gravedad. Por ejemplo, en un muro de contención la presión del suelo produce un momento de volcamiento y las fuerzas de gravedad producen un momento estabilizante que lo contrarresta.

En todos los casos de la tabla 1.2 la ecuación que controla es aquella que genera los mayores efectos de las cargas mayoradas U.

Los factores de carga de resistencia ϕ del Código ACI tienen asignados valores diferentes dependiendo del estado de conocimiento, es decir, de la precisión con la cual pueden calcularse las diferentes resistencias. De esta manera, el valor para flexión es mayor que aquél para cortante. Los valores de ϕ reflejan también la importancia probable de un elemento en particular en la supervivencia de la estructura y del control de calidad probable alcanzado. Por estas dos razones se utiliza un valor menor para columnas que para vigas. La tabla 1.3 presenta los valores de ϕ especificados por el Código ACI.

TABLA 1.3
Factores de carga de resistencia en el Código ACI

Tipo de resistencia	Factor de carga de resistencia ϕ
Flexión sin carga axial	0.90
Carga axial y carga axial con flexión	
Tensión axial y tensión axial con flexión	0.90
Compresión axial y compresión axial con flexión	
Elementos con refuerzo en espiral	0.75
Otros elementos 0.70	
excepto para los casos de cargas axiales bajas en los cuales el valor de ϕ puede incrementarse de acuerdo con lo siguiente:[a]	
Para elementos en los cuales f_y no excede 60,000 psi, con refuerzo simétrico y con $(h - d' - d_s)/h$ no menor que 0.70, ϕ puede incrementarse linealmente hasta 0.90 para ϕP_n disminuyendo desde $0.10 f'_c A_g$ hasta cero.	
Para otros elementos reforzado ϕ puede incrementarse linealmente hasta 0.90 para ϕP_n disminuyendo desde $0.10 f'_c A_g$ o, ϕP_{nb}, el que sea menor, hasta cero.	
Cortante y torsión	0.85
Contacto sobre el concreto	0.70

[a] Los detalles de y las razones para estos incrementos admisibles se discuten en el capítulo 8.

La aplicación conjunta de los factores de carga de resistencias (tabla 1.3) y de los factores de mayoración de cargas (tabla 1.2) está dirigida a obtener en forma aproximada probabilidades de bajas resistencias del orden de 1/100 y probabilidades de sobrecargas de 1/1000. Esto resulta en una probabilidad de falla estructural del orden de 1/100,000.

El cuerpo principal del Código ACI está formulado en términos del diseño a la resistencia con los factores de mayoración de cargas y de reducción de resistencias presentados anteriormente. Un apéndice especial del Código, apéndice A: "Alternate Design Method", permite el uso del método de diseño para cargas de servicio para aquellos que prefieren este método más antiguo. Este apéndice especifica esfuerzos admisibles para flexión, cortante, contacto, etc., que deben utilizarse en conjunto con los efectos internos (M, V, P, etc.) de las cargas muertas no mayoradas y de las cargas de servicio específicas. Para muchas situaciones, considerando específicamente los aceros y concretos de mayor resistencia disponibles en la actualidad, este método de diseño alterno es menos económico que el método de diseño a la resistencia.

Adicionalmente, el apéndice C del Código ACI, "Alternative Load and Strength Reduction Factors", tiene como objetivo facilitar el diseño de estructuras "mixtas", es decir, estructuras que combinan elementos de acero estructural y de concreto reforzado. Éste sigue el formato del cuerpo principal del Código (diseño a la resistencia) pero le permite al diseñador utilizar los factores de carga y las combinaciones de cargas mayoradas del ASCE 7-93 (ver la referencia 1.1). Los factores de carga de resistencia alternativos del apéndice C fueron calibrados de manera que si se usan conjuntamente con las combinaciones de cargas de diseño mínimas de la referencia 1.1, los diseños resultan comparables con aquellos que se obtendrían utilizando los factores de carga y los factores de reducción de resistencia especificados en el cuerpo principal del Código ACI.

1.8 SUPOSICIONES FUNDAMENTALES PARA EL COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO REFORZADO

La labor principal del ingeniero estructural es el diseño de estructuras. El *diseño* significa la determinación de la forma general y de todas las dimensiones específicas de una estructura en particular, de manera que ésta cumpla con las funciones para las cuales se ha creado y resista en forma segura los efectos que actuarán sobre ella a través de su vida útil. Estos efectos son principalmente las cargas y otras fuerzas a las que se verá sometida, al igual que a otros agentes perjudiciales, tales como fluctuaciones de temperatura, asentamientos de la cimentación y agentes corrosivos. La *mecánica estructural* es una de las herramientas principales en el proceso de diseño y, en el presente contexto, es el cuerpo del conocimiento científico que permite la predicción, con un buen grado de certeza, de la manera como una estructura de forma y dimensiones dadas se comportará cuando esté sometida a fuerzas conocidas y a otros efectos mecánicos. Los principales aspectos de interés práctico en el comportamiento de una estructura son (1) la resistencia de la estructura, es decir, la magnitud de las cargas con una distribución dada que causarán la falla de la estructura y (2) las deformaciones traducidas en deflexiones y agrietamientos que van a presentarse en la estructura cuando esté cargada bajo condiciones de servicio.

La mecánica del concreto reforzado se basa en las siguientes premisas fundamentales:

1. Las fuerzas internas, tales como momentos flectores, fuerzas de corte y esfuerzos normales y cortantes en una sección cualquiera de un elemento, están en equilibrio con los efectos de las cargas externas en esta sección. Esta premisa no es una suposición sino una realidad, debido a que cualquier cuerpo o parte de éste estará en reposo sólo si todas las fuerzas que actúan sobre él están en equilibrio.
2. La deformación unitaria en una barra de refuerzo embebida (a tensión o a compresión) es la misma que la del concreto circundante. Expresado de otra manera, se supone que existe una

adherencia perfecta en la interfase entre el concreto y el acero de manera que no ocurre deslizamiento entre los dos materiales. Así, en la medida en que uno se deforme, lo mismo debe ocurrir con el otro. Con las barras corrugadas modernas (ver la sección 2.13) se dispone de un alto grado de traba mecánica adicional a la adhesión natural superficial, de manera que esta suposición está muy cerca de la realidad.

3. Las secciones transversales planas antes de la aplicación de la carga siguen siendo planas para el elemento cargado. Mediciones precisas han demostrado que cuando un elemento de concreto reforzado está cargado muy cerca de la falla esta suposición no es absolutamente correcta. Sin embargo, las desviaciones son usualmente menores y los resultados de la teoría basada en esta suposición coinciden bien con la amplia información de ensayos disponible.
4. Debido a que la resistencia a la tensión del concreto es tan sólo una pequeña fracción de su resistencia a la comprensión (ver la sección 2.8), el concreto en aquella parte del elemento sometido a tensión estará usualmente fisurado. Aunque para elementos bien diseñados estas fisuras son en general tan delgadas que resultan apenas visibles (a veces se les llaman grietas *capilares*), éstas evidentemente obligan a que el concreto fisurado sea incapaz de resistir esfuerzos de tensión. De acuerdo con esto, se supone en general que el concreto no es capaz de resistir ningún esfuerzo de tensión. Esta suposición es una simplificación de la situación real debido a que, de hecho, el concreto antes del agrietamiento, al igual que el concreto localizado entre fisuras, sí resiste esfuerzos de tensión de pequeña magnitud. Más adelante, en discusiones sobre la resistencia a cortante de vigas de concreto reforzado, resultará claro que bajo ciertas condiciones esta suposición particular se desprecia y se toma en consideración la modesta resistencia a la tensión que puede desarrollar el concreto.
5. La teoría se basa en las relaciones esfuerzo-deformación reales y en las propiedades de resistencia de los dos materiales constituyentes (ver las secciones 2.8 y 2.13) o en alguna simplificación razonable relacionada. Debido a que en la teoría moderna se considera el comportamiento inelástico, a que el concreto se supone inefectivo a tensión y a que se toma la acción conjunta de los dos materiales, los métodos analíticos aplicables resultan considerablemente más complejos y también más desafiantes que aquéllos adecuados para elementos hechos de un solo material esencialmente elástico.

Estas cinco premisas permiten predecir mediante cálculos el comportamiento de elementos de concreto reforzado únicamente para algunas situaciones simples. En realidad, la acción conjunta de dos materiales tan distintos y complicados como el concreto y el acero es tan compleja que no ha sido posible llevarla a un tratamiento analítico. Por esta razón, los métodos de diseño y análisis, aunque utilizan estas suposiciones, están basados ampliamente en los resultados de una intensa investigación experimental. Estos métodos se modifican y mejoran en la medida en que se dispone de nuevas evidencias experimentales.

1.9 COMPORTAMIENTO DE ELEMENTOS SOMETIDOS A CARGAS AXIALES

Muchos de los fundamentos del comportamiento del concreto reforzado, para todo el rango completo de cargas desde cero hasta la carga última, pueden ilustrarse en forma clara en el contexto de elementos sometidos a comprensión o tensión axial simple. Los conceptos básicos ilustrados a continuación se reconocerán en los capítulos siguientes en el análisis y diseño de vigas, losas, columnas cargadas excéntricamente y otros elementos sometidos a situaciones de carga más complejas.

a. Compresión axial

En elementos que soportan principal o exclusivamente cargas axiales de compresión, tales como columnas de edificios, resulta económico hacer que el concreto lleve la mayor parte de la carga.

Aun así es siempre recomendable incluir acero de refuerzo por varias razones. En primer lugar, muy pocos elementos estarán realmente sometidos a cargas axiales puras; el acero es esencial para resistir cualquier flexión que pueda presentarse. Por otro lado, si el acero con mucho mayor resistencia que el concreto toma parte de la carga total, las dimensiones de la sección transversal del elemento podrán reducirse en mayor grado cuanto mayor sea la cantidad de refuerzo incluido en la sección.

Las dos formas principales de columnas de concreto reforzado se muestran en la figura 1.14. En la columna cuadrada, las cuatro barras longitudinales sirven de refuerzo principal; ellas se mantienen en su sitio mediante flejes de acero transversales de pequeño diámetro que evitan el desplazamiento de las barras principales durante las operaciones de construcción y contrarrestan cualquier tendencia de las barras sometidas a compresión a pandearse hacia afuera produciendo la ruptura del delgado recubrimiento exterior del concreto. A la izquierda se muestra una columna circular con ocho barras principales de refuerzo; éstas están rodeadas por un espiral con muy poco espaciamiento que tiene el mismo propósito que los flejes más espaciados y que también proporciona confinamiento al concreto aumentando así la resistencia axial a la compresión. La discusión que se presenta más adelante se aplica únicamente a columnas con flejes.

Cuando se aplica carga axial a un elemento, la deformación unitaria a compresión es igual sobre toda la sección transversal y es la misma para el concreto y el acero gracias a la adherencia entre los dos materiales (ver las premisas 2 y 3 en la sección 1.8). Para ilustrar el comportamiento de un elemento a medida que se aplica carga axial, se presenta la figura 1.15 con dos curvas típicas esfuerzo-deformación, una para un concreto con resistencia a la compresión $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y la otra para un acero con esfuerzo de fluencia $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. Las curvas para los dos materiales están dibujadas en la misma gráfica utilizando diferentes escalas verticales para el esfuerzo. La curva *b* tiene la forma que se obtendría en un ensayo de un cilindro de concreto. La velocidad de carga en la mayoría de las estructuras es considerablemente menor que la de un ensayo de cilindros y esto afecta la forma de la curva. Por esto se ha dibujado la curva *c*, la cual sería característica del comportamiento del concreto cargado lentamente. Bajo estas condiciones, los ensayos han demostrado que la resistencia a compresión máxima confiable del concreto reforzado es aproximadamente $0.85\,f'_c$, como se muestra en la figura 1.15.

COMPORTAMIENTO ELÁSTICO. Para esfuerzos inferiores a aproximadamente $f'_c/2$, el concreto parece tener un comportamiento prácticamente elástico, es decir, los esfuerzos y las deformaciones unitarias se mantienen proporcionales; la línea recta *d* representa este rango de

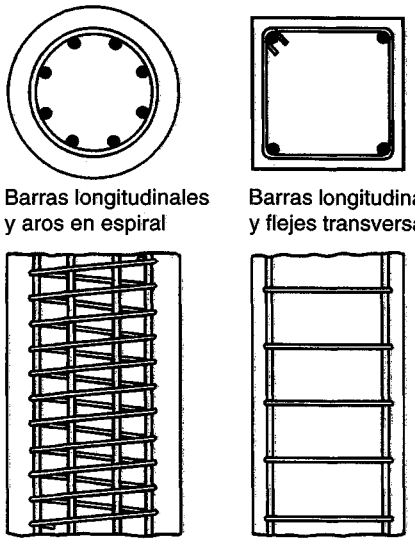


FIGURA 1.14
Columnas de concreto reforzado.

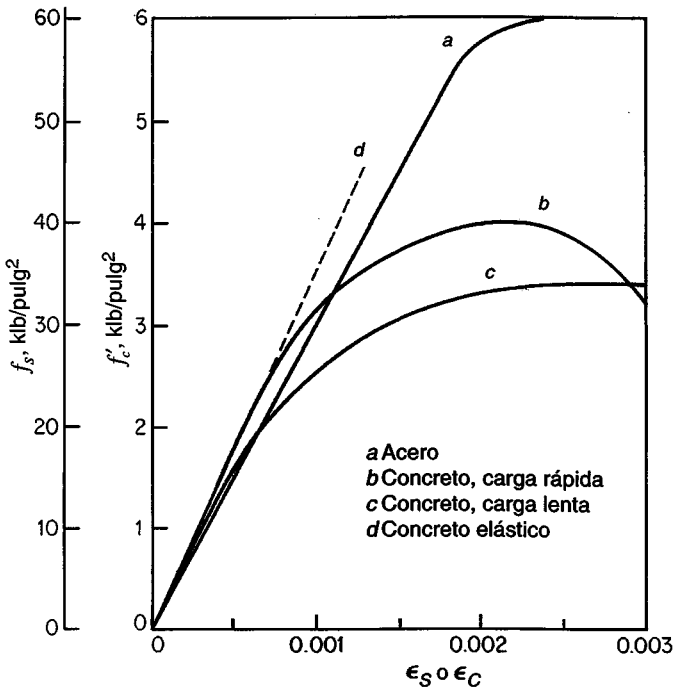


FIGURA 1.15
Curvas de esfuerzo en concreto y acero.

comportamiento con muy pequeño error para las dos velocidades de carga. Para el concreto considerado, este rango se extiende hasta deformaciones unitarias de cerca de 0.0005. Por otro lado, el acero parece permanecer prácticamente elástico hasta su punto de fluencia de 60 lb/pulg^2 equivalente a una deformación unitaria mucho mayor que aproximadamente 0.002.

Debido a que la deformación unitaria a compresión en el concreto para una carga dada es igual a la deformación a compresión en el acero,

$$\epsilon_c = \frac{f_c}{E_c} = \epsilon_s = \frac{f_s}{E_s}$$

a partir de lo cual se puede obtener una relación entre el esfuerzo en el acero f_s y el esfuerzo en el concreto f_c, así:

$$f_s = \frac{E_s}{E_c} f_c = n f_c \tag{1.6}$$

donde $n = E_s/E_c$ se conoce como la *relación modular.*

Sea A_c = área neta de concreto, es decir, área bruta menos área ocupada por las barras de refuerzo
A_g = área bruta
A_s = área de las barras de refuerzo
P = carga axial

Entonces,

$$P = f_c A_c + f_s A_s = f_c A_c + n f_c A_s$$

o

$$P = f_c (A_c + n A_s) \tag{1.7}$$

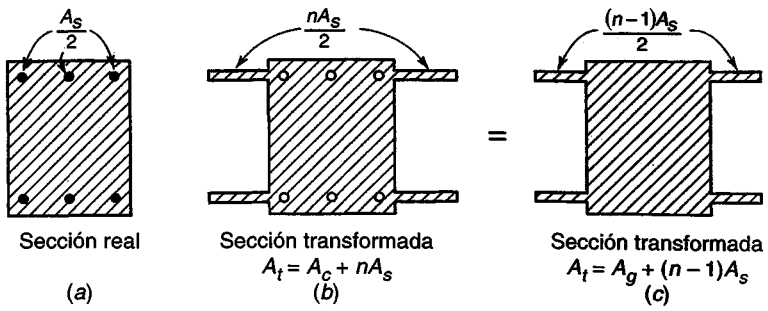


FIGURA 1.16
Sección transformada para compresión axial.

El término $A_c + nA_s$ puede interpretarse como el área de una sección transversal ficticia de concreto, llamada *área transformada*, la cual cuando está sometida al esfuerzo particular del concreto f_c da la misma carga axial P que la sección real compuesta de acero y concreto. Esta área transformada de concreto consiste en el área real de concreto más n veces el área del refuerzo. Esto puede visualizarse en la figura 1.16. En la figura 1.16*b* las tres barras a lo largo de cada una de las dos caras se eliminan y se remplazan con áreas adicionales de concreto ficticio iguales a nA_s en total, localizadas a la misma distancia desde el eje de la sección. Alternativamente, como se muestra en la figura 1.16*c*, se podría pensar que el área de las barras de acero ha sido remplazada con concreto, en cuyo caso se requiere adicionar únicamente $(n-1)A_s$ al área bruta de concreto A_g así obtenida, con el fin de obtener la misma área transformada total. De esta manera, en forma alternativa,

$$P = f_c\,[A_g + (n-1)A_s] \tag{1.8}$$

Si la carga y las dimensiones de la sección transversal se conocen, los esfuerzos en el concreto pueden determinarse encontrando el valor de f_c a partir de las ecuaciones (1.7) o (1.8), y los esfuerzos en el acero pueden calcularse a partir de la ecuación (1.6). Estas relaciones son válidas en el rango para el cual el concreto se comporta casi elásticamente, es decir, hasta aproximadamente el 50 ó 60 por ciento de f'_c. Por razones de seguridad y funcionalidad, los esfuerzos en el concreto para estructuras en condiciones normales se mantienen en este rango. De esta manera, estas relaciones permiten calcular los *esfuerzos para cargas de servicio*.

Ejemplo 1.1. Una columna con los materiales definidos en la figura 1.15 tiene una sección transversal de 16 por 20 pulgadas y está reforzada con 6 barras No.9 dispuestas como se muestra en la figura 1.16 (ver las tablas A.1 y A.2 del apéndice A para diámetros y áreas de las barras). Determinar la carga axial que produciría un esfuerzo en el concreto de 1200 lb/pulg^2. La relación modular n puede suponerse igual a 8. (Debido a la dispersión inherente a E_c, se acostumbra y es satisfactorio redondear el valor de n al entero más cercano.)

Solución. Se encuentra $A_g = 16 \times 20 = 320$ pulg^2 y del apéndice A, tabla A.2, $A_s = 6.00$ pulg^2. La carga en la columna, de la ecuación (1.8), es $P = 1200\,[320 + (8-1)6.00] = 434{,}000$ lb. De esta carga total el concreto toma $P_c = f_c A_c = f_c\,(A_g - A_s) = 1200(320-6) = 377{,}000$ lb, y el acero $P_s = f_s A_s = (nf_c)A_s = 9600 \times 6 = 57{,}600$ lb, que es 13.3 por ciento de la carga axial total.

RANGO INELÁSTICO. La inspección de la figura 1.15 demuestra que las relaciones elásticas que se han utilizado hasta el momento no pueden aplicarse para deformaciones unitarias en el concreto superiores a aproximadamente 0.0005. Para obtener información referente al comportamiento del elemento ante deformaciones unitarias mayores y, por tanto, ante cargas mayores, se requiere entonces hacer uso directo de la información de la figura 1.15.

Ejemplo 1.2. Se puede tratar de calcular la magnitud de la carga axial que va a producir una deformación unitaria o acortamiento unitario $\epsilon_c = \epsilon_s = 0.0010$ en la columna del ejemplo anterior. Para esta nueva deformación, el acero está aún elástico, de manera que el esfuerzo en el acero es igual a $f_s = \epsilon_s E_s = 0.001 \times 29{,}000{,}000 = 29{,}000$ lb/pulg^2. El concreto está en el rango inelástico, de manera que sus esfuerzos no pueden calcularse directamente, pero pueden leerse a partir de la curva esfuerzo-deformación unitaria para el valor dado de deformación unitaria.

1. Si la velocidad de carga del elemento es relativamente alta, puede aplicarse la curva *b* para el instante en que se ha aplicado la totalidad de la carga. El esfuerzo para $\epsilon = 0.001$ puede leerse igual a $f_c = 3200$ lb/pulg^2. En consecuencia, la carga total se puede obtener a partir de

$$P = f_c A_c + f_s A_s \tag{1.9}$$

   que evidentemente aplica tanto en el rango inelástico como en el rango elástico. De esta manera, $P = 3200(320 - 6) + 29{,}000 \times 6 = 1{,}005{,}000 + 174{,}000 = 1{,}179{,}000$ lb. De esta carga total, el acero toma 174,000 lb o sea el 14.7 por ciento.
2. Cuando las cargas se aplican lentamente, o para el caso de cargas permanentes, la curva *c* es la que representa el comportamiento del concreto. El esfuerzo en el concreto para una deformación unitaria de 0.001 puede leerse como $f_c = 2400$ lb/pulg^2. Entonces $P = 2400 \times 314 + 29{,}000 \times 6 = 754{,}000 + 174{,}000 = 928{,}000$ lb. De esta carga total, el acero toma el 18.8 por ciento.

La comparación de los resultados para cargas aplicadas rápida y lentamente muestra lo siguiente: debido al flujo plástico del concreto, una carga dada aplicada en forma lenta o sostenida durante algún intervalo de tiempo, produce un acortamiento mayor en la columna que una carga equivalente aplicada en forma rápida. Más importante aún, mientras mayor sea el esfuerzo con respecto al límite de proporcionalidad del concreto, y mientras más lentamente se aplique la carga o cuando se mantenga aplicada durante un mayor intervalo de tiempo, más pequeña será la parte de la carga total tomada por el concreto y mayor la parte de la carga tomada por el acero. En la columna del ejemplo anterior, el acero toma el 13.3 por ciento de la carga en el rango elástico, el 14.7 por ciento para una deformación unitaria de 0.001 bajo carga rápida y el 18.8 por ciento a la misma deformación unitaria para una carga lenta o sostenida.

RESISTENCIA. El parámetro de mayor importancia para el ingeniero diseñador es la *resistencia última*, es decir, la carga máxima que la estructura o elemento puede soportar. La información relacionada con esfuerzos, deformaciones y cantidades similares sirve como una herramienta para determinar la capacidad portante. El comportamiento de la columna discutido hasta ahora indica dos cosas: (1) en el rango de esfuerzos y deformaciones unitarias elevadas que precede a la resistencia última y la falla subsecuente, no pueden utilizarse las relaciones elásticas; (2) el elemento se comporta en forma diferente cuando está sometido a cargas rápidas en comparación con cargas lentas o sostenidas y muestra una resistencia menor ante las segundas que ante las primeras. Para construcciones corrientes, diversos tipos de cargas (como las debidas a peso propio y a equipos instalados con carácter permanente) son sostenidas y otras se aplican lentamente. Por esta razón, para calcular una magnitud confiable de la resistencia última, debe utilizarse la curva *c* de la figura 1.15, en lo que se refiere a la participación del concreto.

Para el caso del acero, éste alcanza su resistencia última (pico de la curva) para deformaciones unitarias del orden de 0.08 (ver la figura 2.13). Por otro lado, el concreto falla por aplastamiento para deformaciones unitarias mucho más bajas, del orden de 0.003, y tal como se aprecia en la figura 1.15 (curva *c*), alcanza su resistencia última para deformaciones unitarias en el rango de 0.002 a 0.003. Debido a que las deformaciones unitarias en el acero y en el concreto son iguales para compresión axial, se puede calcular la carga para la cual el acero comienza a fluir utilizando la información de la figura 1.15.

Si se desprecia la pequeña curvatura antes de la fluencia del acero, es decir, si el acero se supone perfectamente elastoplástico, la deformación unitaria de fluencia será:

$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} \tag{1.10}$$

o

$$\epsilon_y = \frac{60{,}000}{29{,}000{,}000} = 0.00207$$

Para esta deformación unitaria, la curva *c* de la figura 1.15 indica un esfuerzo en el concreto de 3200 lb/pulg^2; de esta manera, utilizando la ecuación (1.9), la carga en el elemento cuando el acero empieza a fluir es $P_y = 3200 \times 314 + 60{,}000 \times 6 = 1{,}365{,}000$ lb. Para esta carga el concreto no ha alcanzado aún su resistencia última la cual, como se mencionó anteriormente, se puede suponer igual a $0.85\, f'_c = 3400$ lb/pulg^2 para cargas lentas o sostenidas y, por tanto, la carga en el elemento puede aumentarse un poco más. Durante esta etapa de carga, el acero se mantiene fluyendo bajo esfuerzo constante. Finalmente, la carga última† del elemento se alcanza cuando el concreto falla por aplastamiento mientras que el acero sigue en fluencia, es decir,

$$P_n = 0.85\, f'_c A_c + f_y A_s \tag{1.11}$$

Numerosos ensayos bien controlados han demostrado la confiabilidad de la ecuación (1.11) para predecir la resistencia última de una columna en concreto reforzado cargada concéntricamente, siempre y cuando su relación de esbeltez sea tan pequeña que los efectos del pandeo no reduzcan su resistencia.

Para el ejemplo numérico particular, $P_n = 3400 \times 314 + 60{,}000 \times 6 = 1{,}068{,}000 + 360{,}000 = 1{,}428{,}000$ lb. Para este nivel de carga, el acero toma hasta el 25 por ciento de la carga total de la columna.

RESUMEN. Para un elemento sometido a cargas de compresión axial y que se mantiene en el rango elástico con esfuerzos en niveles bajos, el acero toma una porción relativamente pequeña de la carga total. A medida que la carga se aproxima a la resistencia última, ocurre una redistribución en la participación relativa de las cargas tomadas por el concreto y por el acero respectivamente, y éste último toma una mayor cantidad. La carga última para la cual el elemento alcanza el punto de falla consiste en la contribución del acero cuando su esfuerzo ha llegado hasta su punto de fluencia más aquélla del concreto cuando su esfuerzo ha alcanzado la resistencia última de $0.85\, f'_c$, tal como se refleja en la ecuación (1.11).

b. Tensión axial

La resistencia a la tensión del concreto es apenas una pequeña fracción de su resistencia a la compresión. Se concluye que el concreto reforzado no está bien condicionado para ser utilizado en elementos sometidos a tensión debido a la baja contribución del concreto, si es que existe, a su resistencia. Aún así, se presentan situaciones en las cuales el concreto reforzado está sometido a tensión, principalmente en elementos de unión en arco o estructuras similares. Tales elementos están compuestos por una o más barras embebidas en el concreto en un arreglo simétrico similar al de los elementos a compresión (figuras 1.14 y 1.16).

† A lo largo de este libro las cantidades que hagan referencia a la resistencia última de los elementos, calculadas mediante métodos aceptados de análisis a la resistencia, se indican mediante un subíndice *n*, que significa "nominal". Esta notación está de acuerdo con la edición del Código ACI de 1995. Se trata de transmitir que la resistencia última real de cualquier elemento está limitada a desviarse hasta cierto punto a partir del valor calculado nominal, debido a variaciones inevitables en las dimensiones, propiedades de materiales y otros parámetros. El diseño está basado en todos los casos en esta resistencia nominal, la cual representa el mejor estimativo disponible de la resistencia real del elemento.

Cuando la fuerza de tensión en el elemento se mantiene en niveles suficientemente bajos de manera que el esfuerzo en el concreto no alcanza su resistencia a la tensión, tanto el acero como el concreto se comportan elásticamente. En esta situación, todas las expresiones derivadas para el comportamiento elástico en compresión de la sección 1.9*a* son igualmente válidas para tensión. En particular, la ecuación (1.7) se transforma en

$$P = f_{ct}(A_c + nA_s) \tag{1.12}$$

donde f_{ct} es el esfuerzo a tensión en el concreto.

Sin embargo, al aumentar la carga, el concreto alcanza su resistencia a la tensión para un esfuerzo y deformación unitaria en el orden de un décimo de lo que pueden llegar a alcanzar a compresión. En este estado, el concreto se agrieta a través de toda la sección transversal. Cuando esto ocurre, el concreto deja de resistir cualquier porción de la fuerza de tensión aplicada, ya que, evidentemente, ninguna fuerza puede transmitirse a través del espacio de aire en la grieta. Para cualquier carga mayor que aquella que causó el agrietamiento del concreto se requiere que el acero resista la totalidad de la fuerza de tensión. Entonces para este estado,

$$P = f_s A_s \tag{1.13}$$

Para un aumento adicional de la carga, el esfuerzo a tensión en el acero f_s alcanza el punto de fluencia f_y. Cuando esto ocurre, el elemento a tensión sobrepasa las deformaciones pequeñas y elásticas, y en cambio se evidencia un alargamiento considerable y permanente para cargas prácticamente constantes. Esto no afecta la resistencia del elemento. Sin embargo, su elongación puede llegar a ser tan alta (en el orden del uno por ciento o más de su longitud) que lo vuelve inutilizable. Por tanto, para un elemento sometido a tensión la resistencia máxima útil P_{nt} es aquella fuerza que produce un esfuerzo en el acero justamente igual al de fluencia. Esto es,

$$P_{nt} = f_y A_s \tag{1.14}$$

Para mantener un margen de seguridad adecuado, la fuerza permitida en un elemento sometido a tensión para cargas de servicio normales debe estar en el orden de $1/2\,P_{nt}$. Debido a que para este nivel de carga el concreto ya ha presentado fisuras, éste no contribuye a la capacidad portante del elemento en servicio. No obstante, el concreto sigue cumpliendo la función de protección contra el fuego y contra la corrosión, y mejora frecuentemente la apariencia de la estructura.

Existen situaciones en las cuales el concreto reforzado se utiliza en tensión axial, bajo condiciones en las cuales debe evitarse la ocurrencia de grietas de tensión. Un caso relacionado sería el de un tanque circular (ver la figura 1.11). Para garantizar la impermeabilidad del tanque debe evitarse que la tensión circular causada por la presión del fluido ocasione agrietamientos en el concreto. En este caso puede utilizarse la ecuación (1.12) para determinar un valor seguro de la fuerza de tensión axial P tomando, para el esfuerzo a tensión del concreto f_{ct}, una fracción apropiada de la resistencia a la tensión del concreto, es decir, de aquel esfuerzo que produciría el agrietamiento del mismo.

REFERENCIAS

1.1. *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures,* ASCE 7-95, American Society of Civil Engineers, New York, 1995.

1.2. *Uniform Building Code,* 1994 ed. International Conference of Building Officials, Whittier, CA, 1994.

1.3. *Standard Specifications for Highway Bridges,* 15th ed., American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), Washington, DC, 1992.

1.4. *Manual of Railway Engineering*, American Railway Engineering Association (AREA), Washington, DC, 1995.

1.5. *Recommended Lateral Force Requirements and Commentary.* Report by Seismology Committee, Structural Engineers Association of California (SEAOC), 1989.

1.6. J. G. MacGregor, S. A. Mirza, and B. Ellingwood, "Statistical Analysis of Resistance of Reinforced and Prestressed Concrete Members", *J. ACI*, vol. 80, No. 3, 1983, pp. 167-176.

1.7. J. G. Mac Gregor, "Load and Resistance Factors for Concrete Design", *J. ACI*, vol. 80, No. 4, 1983, pp. 279-287.

1.8. J. G. MacGregor, "Safety and Limit States Design for Reinforced Concrete", *Can. J. Civ. Eng.*, vol. 3, no. 4, 1976, pp. 484-513.
1.9. G. Winter, "Safety and Serviceability Provisions of the ACI Buildings Code", ACI-CEB-FIP-PCI Symposium, *ACI Special Publication SP-59*, 1979.
1.10. *Building Code Requirements for Structural Concrete,* ACI 318-95, American Concrete Institute, Detroit, 1995.
1.11. *Commentary on Building Code Requirements for Structural Concrete,* ACI 318R-95, American Concrete Institute, Detroit, 1995 (published as a part of reference 1.10).
1.12. F. E. Richard and R. L. Brown, "An Investigation of Reinforced Concrete Columns", *Univ. Ill. Eng. Exp. Sta. Bull. 267*, 1934.

PROBLEMAS

1.1. Una columna de 16 × 20 pulgadas está hecha del mismo concreto y reforzada con las mismas 6 barras No. 9 que la columna de los ejemplos 1.1 y 1.2 excepto que se utiliza un acero con resistencia a la fluencia f_y = 40 klb/pulg^2. La curva esfuerzo-deformación de este acero de refuerzo se muestra en la figura 2.13 para f_y = 40 klb/pulg^2. Para esta columna determinar (*a*) la carga axial que producirá un esfuerzo en el concreto de 1200 lb/pulg^2; (*b*) la carga para la cual el acero comienza a fluir; (*c*) la resistencia última; (*d*) la parte de la carga total tomada por el refuerzo para los tres estados de carga anteriores. Comparar los resultados con aquéllos calculados en los ejemplos para f_y = 60 klb/pulg^2, teniendo en mente con relación a la economía relativa, que el precio por kilo para los aceros de refuerzo de 40 y 60 klb/pulg^2 es aproximadamente el mismo.

1.2. Para la columna del problema 1.1, el área de acero, expresada como un porcentaje del área bruta de concreto, es menor que lo que se usaría comúnmente en la práctica. Volver a calcular las comparaciones del problema 1.1 utilizando un f_y de 40 klb/pulg^2 y de 60 klb/pulg^2 como antes, pero para una columna de 16 × 20 pulgadas reforzada con 8 barras No. 11. Comparar los resultados con los del problema 1.1

1.3. Una columna de concreto cuadrada con dimensiones 22 × 22 pulgadas está reforzada con un total de 8 barras No. 10 distribuidas uniformemente alrededor del perímetro de la columna. Las resistencias de los materiales son f_y = 60 klb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2, con las curvas esfuerzo-deformación dadas por las curvas *a* y *c* de la figura 1.15. Calcular los porcentajes de la carga total tomados por el concreto y por el acero en la medida en que la carga se incrementa gradualmente desde cero hasta la falla, la cual se supone que ocurre cuando la deformación unitaria del concreto alcanza el valor límite de 0.0030. Determinar las cargas para incrementos de deformación unitaria de 0.0005 hasta la deformación unitaria de falla, y graficar los resultados, dibujando porcentajes de carga *vs.* deformaciones unitarias. Para estos materiales la relación modular puede suponerse igual a n = 8.

CAPÍTULO

2 MATERIALES

2.1 INTRODUCCIÓN

Las estructuras y los elementos que las conforman, cuyo análisis se presenta en este texto, están compuestas de concreto reforzado con barras de acero y, en algunos casos, preesforzado con alambrones de acero, torones o barras de aleación. Entender las características y el comportamiento de los materiales bajo carga resulta fundamental para comprender el comportamiento del concreto estructural y para diseñar estructuras de concreto en forma segura, económica y funcional. En este capítulo se presenta apenas un breve resumen sobre los fundamentos del material, al igual que una descripción de los tipos de barras de refuerzo y de acero de preesfuerzo más utilizados, ya que se supone que el lector ha realizado estudios previos en este tema. Al final del capítulo se incluyen numerosas referencias a manera de guía para aquellos que buscan mayor información sobre los temas aquí analizados.

2.2 CEMENTO

Un material cementante es aquel que tiene las propiedades de adhesión y cohesión necesarias para unir agregados inertes y conformar una masa sólida de resistencia y durabilidad adecuadas. Esta categoría tecnológicamente importante de materiales incluye no sólo el cemento sino también limos, asfaltos y alquitranes, tal como se usan en la construcción de carreteras y otros. Para la fabricación del concreto estructural se utilizan exclusivamente los llamados *cementos hidráulicos*. Para completar el proceso químico (hidratación) mediante el cual el polvo de cemento fragua y endurece para convertirse en una masa sólida se requiere la adición de agua. De los diferentes cementos hidráulicos desarrollados, el cemento Portland, patentado por primera vez en Inglaterra en 1824, es el más común de todos.

El cemento Portland es un material grisáceo finamente pulverizado, conformado fundamentalmente por silicatos de calcio y aluminio†. Las materias primas usuales a partir de las cuales se fabrica son calizas que proporcionan el CaO y arcillas y esquitos que proveen el SiO_2 y el Al_2O_3. Estos materiales se muelen, se mezclan, se funden en hornos hasta obtener el llamado clinker, y se enfrían y se muelen de nuevo para lograr la finura requerida. El material es despachado a granel o en bultos que contienen 94 libras de cemento.

† Ver la norma ASTM C150 "Standard Specification for Portland Cement". La American Society for Testing and Materials de Philadelphia (EE.UU.) publica y actualiza periódicamente ésta y otras referencias de la ASTM.

A lo largo del tiempo se han desarrollado cinco tipos de cemento Portland. El cemento Portland *corriente*, el tipo I, se ha utilizado en más del 90% de las construcciones en Estados Unidos. Los concretos hechos a base de cemento Portland tipo I requieren generalmente dos semanas para alcanzar la resistencia suficiente para poder retirar las formaletas de vigas y losas y aplicar cargas razonables; estos elementos alcanzan su resistencia de diseño después de 28 días y continúan ganando resistencia de ahí en adelante a una tasa descendente. Para los casos en que se requiere acelerar la construcción se han desarrollado *cementos de alta resistencia inicial,* tales como el tipo III; éstos son más costosos que el cemento Portland ordinario, pero alcanzan entre los siete y los catorce días la resistencia que tendría el cemento Portland tipo I al cabo de 28 días. El cemento Portland tipo III tiene la misma composición básica de los cementos Portland tipo I, pero ha sido mezclado en forma más cuidadosa y molido hasta obtener partículas más finas.

Cuando el cemento se mezcla con el agua para conformar una pasta suave, ésta se rigidiza gradualmente hasta conformar una masa sólida. Este proceso se conoce como *fraguado* y *endurecimiento*. Se dice que el cemento ha fraguado cuando ha ganado suficiente rigidez para resistir una presión arbitrariamente definida, punto a partir del cual continúa endureciendo durante un largo tiempo, o sea que sigue ganando resistencia. El agua en la pasta disuelve el material en la superficie de los granos de cemento y forma un gel que aumenta gradualmente en volumen y rigidez, lo que lleva a una rigidización rápida de la pasta entre dos y cuatro horas después de agregada el agua al cemento. La *hidratación* continúa avanzando dentro de los granos de cemento a velocidad decreciente con rigidización y endurecimiento continuo de la masa. En concretos comunes, el cemento probablemente nunca termina el proceso de hidratación. La estructura de gel de la pasta endurecida parece ser la razón principal para los cambios de volumen que se producen en el concreto ante variaciones de la humedad, como la retracción que ocurre en los concretos cuando se secan.

De acuerdo con H. Rüsch, para completar la hidratación de una cantidad dada de cemento se requiere químicamente una cantidad de agua con peso igual a aproximadamente el 25 por ciento del cemento, es decir, una *relación agua cemento* de 0.25. Sin embargo, durante el proceso de hidratación debe estar presente una cantidad adicional de agua para proporcionarle movilidad al agua misma dentro de la pasta de cemento, de manera que ésta pueda alcanzar las partículas de cemento y proporcione la manejabilidad necesaria en la mezcla de concreto. Para concretos normales la relación agua-cemento varía por lo general en el intervalo de 0.40 a 0.60, aunque para los concretos de alta resistencia se han utilizado relaciones tan bajas como 0.25. En este caso, la manejabilidad necesaria se obtiene mediante el uso de aditivos.

Cualquier cantidad de agua por encima del 25 por ciento que se consuma en la reacción química produce poros en la pasta de cemento. La resistencia de la pasta endurecida disminuye en proporción inversa a la fracción del volumen total ocupado por los poros. Dicho de otra manera, debido a que los sólidos y no los vacíos son los que resisten los esfuerzos, la resistencia aumenta directamente con la fracción ocupada por los sólidos en el volumen total. Ésta es la razón por la cual la resistencia de la pasta de cemento depende principalmente, y disminuye de manera directa, de un incremento en la relación agua-cemento.

El proceso químico involucrado en el fraguado y en el endurecimiento libera calor, el cual es conocido como *calor de hidratación*. Cuando se funden grandes masas de concreto, como en el caso de las presas, este calor se disipa muy lentamente, lo cual lleva a un incremento de la temperatura y a una expansión del volumen de concreto durante el proceso de hidratación con el enfriamiento y contracción posteriores. Para evitar el intenso agrietamiento y el consecuente debilitamiento que puede resultar de este proceso deben tomarse medidas especiales de control.

2.3 AGREGADOS

Para concretos estructurales comunes, los agregados ocupan aproximadamente entre el 70 y el 75 por ciento del volumen de la masa endurecida. El resto está conformado por la pasta de cemento

endurecida, agua no combinada (es decir, agua no utilizada en la hidratación del cemento) y vacíos de aire. Evidentemente, los últimos dos no contribuyen a la resistencia del concreto. En general, mientras más densamente pueda empaquetarse el agregado, mejor será el refuerzo, la resistencia a la intemperie y la economía del concreto. Por esta razón, resulta de fundamental importancia la gradación del tamaño de las partículas en los agregados, con el fin de producir este empaquetamiento compacto. También es importante que el agregado tenga buena resistencia, durabilidad y resistencia a la intemperie; que su superficie esté libre de impurezas como arcillas, limos o materia orgánica las cuales pueden debilitar la unión con la pasta de cemento; y que no se produzca una reacción química desfavorable entre éste y el cemento.

Los agregados naturales se clasifican generalmente en finos y gruesos. Un *agregado fino* o *arena* es cualquier material que pasa el tamiz No. 4, es decir, un tamiz con cuatro aberturas por pulgada lineal. El material más grueso que éste se clasifica como *agregado grueso* o *grava*. Cuando se desea una gradación óptima, los agregados se separan mediante tamizado, en dos o tres grupos de diferente tamaño para las arenas y en varios grupos de diferente tamaño para las gravas. Con posterioridad éstos pueden combinarse de acuerdo con tablas de gradación que permiten obtener un agregado densamente empaquetado. El *tamaño máximo de agregado grueso* para concreto reforzado está controlado por la facilidad con que éste debe entrar en las formaletas y en los espacios entre barras de refuerzo. Con este fin el agregado no debe ser mayor que un quinto de la dimensión más pequeña de las formaletas o un tercio del espesor de la losa, ni tres cuartos de la distancia mínima entre barras de refuerzo. La norma ASTM C33, "Standard Specification for Concrete Aggregates" presenta requisitos para agregados de buena calidad y la referencia 2.1 incluye información oficial sobre propiedades de agregados y su influencia en las propiedades del concreto, al igual que una guía en su selección, preparación y manejo.

El peso unitario del *concreto normal*, es decir, el concreto con agregados de piedras naturales, varía aproximadamente entre 2250 y 2450 kg/m^3) y puede generalmente suponerse igual a 2300 kg/m^3. Los concretos livianos y los concretos pesados se han venido utilizando cada vez con mayor frecuencia para propósitos especiales.

Existen varios tipos de agregados *livianos*. Algunos agregados no procesados tales como la piedra pómez o las cenizas son adecuados para concretos de aislamiento, pero para concreto estructural ligero se utilizan preferiblemente los *agregados procesados* debido a su mejor control. Éstos pueden ser lutitas expandidas, arcillas, pizarras, escoria o cenizas volantes en trozos. Son de bajo peso por la estructura porosa y celular de las partículas individuales del agregado, lo cual se logra mediante la formación de gas o vapor durante el procesamiento de los agregados en los hornos rotatorios a altas temperaturas (generalmente por encima de los 1100°C). En la norma ASTM C330 "Standard Specification for Lightweight Aggregates for Structural Concrete" se encuentran los requisitos para agregados livianos de buena calidad.

La referencia 2.2 señala tres tipos de concretos livianos: concretos de baja densidad que se emplean principalmente para aislamiento y cuyo peso unitario raramente excede 800 kg/m^3; concretos de resistencia moderada cuyos pesos unitarios varían entre aproximadamente 960 a 1360 kg/m^3 y cuyas resistencias a la compresión están entre 7 y 18 MPa y se utilizan principalmente como relleno, por ejemplo sobre láminas de acero de bajo calibre para entrepisos; y concretos estructurales con pesos unitarios entre 1440 y 1920 kg/m^3 y con resistencias a la compresión comparables a las obtenidas para los concretos de piedra. Las similitudes y diferencias en las características estructurales de los concretos livianos y los concretos de piedra se discuten en las secciones 2.8 y 2.9.

Los *concretos pesados* se requieren en algunos casos para protección contra rayos gamma y X en reactores nucleares e instalaciones similares, para estructuras de protección y propósitos especiales tales como contrapesos en puentes colgantes. Para estos concretos se utilizan agregados pesados que consisten en minerales pesados de hierro o rocas de sulfato de bario (baritas) trituradas en tamaños adecuados. También se utilizan aceros en forma de fragmentos, esquirlas o perdigones (a manera de finos). Los pesos unitarios para los concretos pesados con agregados naturales

de roca pesada varían aproximadamente entre 3200 y 3690 kg/m^3; si se agregan fragmentos de hierro a los minerales de alta densidad pueden alcanzarse pesos hasta de 4330 kg/m^3. El peso puede llegar casi hasta 5300 kg/m^3 si se utilizan únicamente minerales de hierro para los finos y aceros para los agregados gruesos.

2.4 DOSIFICACIÓN Y MEZCLA DEL CONCRETO

Los componentes de una mezcla se dosifican de manera que el concreto resultante tenga una resistencia adecuada, una manejabilidad apropiada para su vaciado y un bajo costo. Este último factor obliga a la utilización de la mínima cantidad de cemento (el más costoso de los componentes) que asegure unas propiedades adecuadas. Mientras mejor sea la gradación de los agregados, es decir, mientras menor sea el volumen de vacíos, menor será la pasta de cemento necesaria para llenar estos vacíos. Adicionalmente al agua requerida para la hidratación se necesita agua para humedecer la superficie de los agregados. A medida que se adiciona agua, la plasticidad y la fluidez de la mezcla aumentan (es decir, su manejabilidad mejora), pero su resistencia disminuye debido al mayor volumen de vacíos creados por el agua libre. Para reducir el agua libre y mantener la manejabilidad, es necesario agregar cemento; de esta manera, desde el punto de vista de la pasta de cemento, la *relación agua-cemento* es el factor principal que controla la resistencia del concreto. Para una relación agua-cemento dada se selecciona la mínima cantidad de cemento que asegure la manejabilidad deseada.

La figura 2.1 muestra la influencia decisiva de la relación agua-cemento en la resistencia a la compresión del concreto. Su influencia sobre la resistencia a la tensión, medida a través de la resistencia nominal a flexión o módulo de rotura, es pronunciada pero mucho menor que su efecto sobre la resistencia a la compresión. Esto parece ser así porque, además de la relación de vacíos, la resistencia a la tensión depende en gran medida de la resistencia de adherencia entre el agregado grueso y el mortero de cemento (es decir, la pasta de cemento más los agregados finos). De acuerdo con ensayos realizados en la Universidad de Cornell, la resistencia de adherencia se ve relativamente poco afectada por la relación agua-cemento (ver la referencia 2.3).

Ha sido costumbre definir las proporciones de una mezcla de concreto mediante la relación, en volumen o en peso, de cemento a la arena y a la grava, por ejemplo 1:2:4. Este método se refiere únicamente a los componentes sólidos y, a menos que la relación agua-cemento se especifique en forma separada, es insuficiente para definir las propiedades del concreto resultante ya sea en su estado fresco o cuando ha fraguado y endurecido. Para una definición completa de las proporciones ahora es usual especificar el peso de agua, arena y agregado grueso por bulto de cemento de 50 kg. De esta manera, una mezcla puede definirse como aquella que contenga 24 kg de agua, 122 kg de arena y 202 kg de agregado grueso (para un bulto de cemento de 50 kg). Como alternativa, las cantidades para una mezcla se definen usualmente en términos del peso total de cada componente necesario para fabricar un metro cúbico de concreto húmedo, es decir 290 kg de cemento, 170 kg de agua, 713 kg de arena seca y 1088 kg de agregado grueso seco.

Para obtener mezclas con las propiedades deseadas a partir de los cementos y agregados disponibles se utilizan varios métodos de dosificación. Uno de éstos es el llamado *método de la mezcla tentativa* (*trial-batch method*). Seleccionando una relación agua-cemento a partir de la información que aparece en la figura 2.1 se pueden producir varias mezclas tentativas con diferentes cantidades de agregados para obtener la resistencia, la consistencia y otras propiedades requeridas con una cantidad mínima de pasta. La *consistencia* del concreto se mide con mayor frecuencia mediante el *ensayo de asentamiento* (*slump test*). Un molde metálico con la forma de un cono truncado de 12 pulgadas de altura se llena cuidadosamente con concreto fresco de una manera especificada. Una vez lleno el molde, éste se levanta y el asentamiento del concreto se mide como la diferencia de altura entre el molde y la pila de concreto. El asentamiento es una buena medida de la cantidad total de agua en la mezcla y debe mantenerse tan bajo como sea compatible con la

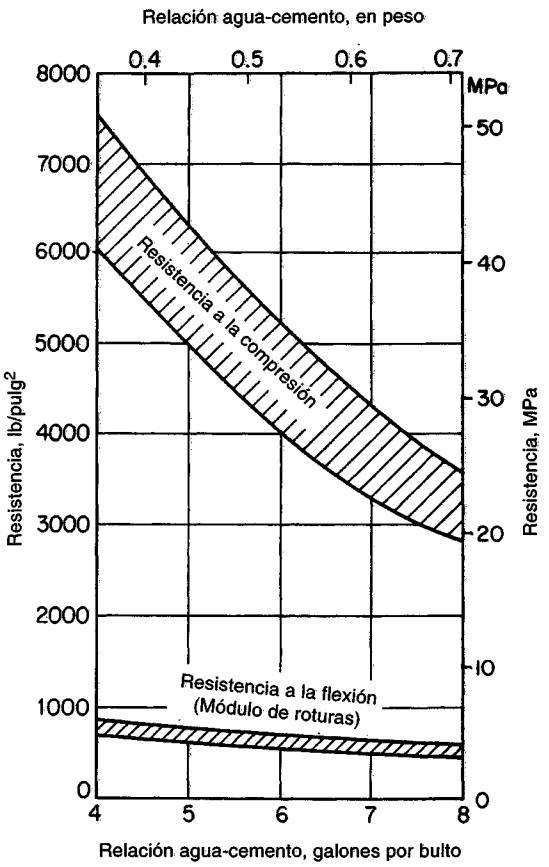


FIGURA 2.1
Efecto de la relación agua-cemento en la resistencia a la compresión y a la tensión por flexión a los 28 días (*adaptado de la referencia 2.4*).

manejabilidad. Los concretos utilizados en la construcción de edificios tienen asentamientos que varían generalmente entre 2 y 6 pulgadas.

El llamado método de dosificación del ACI utiliza el asentamiento en conexión con un conjunto de tablas para lograr un estimativo de las proporciones que resultan en las propiedades deseadas (ver la referencia 2.4) para diferentes condiciones (tipos de estructuras, dimensiones de los elementos, grados de exposición a la intemperie, etc.). Estas proporciones seleccionadas preliminarmente se revisan y ajustan mediante mezclas de prueba para obtener al final el concreto con la calidad deseada. Las propiedades de resistencia de un concreto con proporciones definidas varían de manera inevitable de una mezcla a otra. Por tanto, es necesario seleccionar las proporciones que aseguren una resistencia promedio superior a la resistencia especificada de diseño, para que incluso las mezclas accidentalmente débiles resulten de una calidad adecuada (para detalles ver la sección 2.6). Un estudio detallado de los métodos prácticos de dosificación del concreto está por fuera del alcance de este libro; las referencias 2.5 y 2.6 tratan ampliamente este tema, tanto para concretos de piedra como para concretos de agregados livianos.

Si el resultado de las mezclas de prueba o la experiencia de campo no están disponibles, el Código ACI incluye un método conservador para dosificación del concreto con base en la relación agua-cemento.

En todos los trabajos, excepto en los más pequeños, el *mezclado* se lleva a cabo en plantas especiales de proporcionamiento. Tolvas independientes proporcionan el cemento y las diferentes fracciones del agregado. Las proporciones se controlan por peso, mediante balanzas operadas manual o automáticamente y conectadas a las tolvas. El agua de mezcla se adiciona ya sea mediante tanques calibrados o medidores de agua.

El principal propósito del *mezclado* es producir una mezcla íntima entre el cemento, el agua, los agregados finos y gruesos y los posibles aditivos, y lograr así una consistencia uniforme para las

distintas mezclas. Esto se logra utilizando máquinas mezcladoras del tipo tambor rotatorio. El tiempo mínimo de mezclado es de un minuto y quince segundos para mezcladoras con capacidad inferior a 1 m^3, con 20 segundos adicionales por cada 1/2 m^3 adicional. El mezclado puede prolongarse durante un tiempo considerable sin que se produzcan efectos adversos. Esta característica es particularmente importante con relación al concreto premezclado.

En grandes proyectos, particularmente los ubicados en el campo, con amplios espacios disponibles, se instalan y operan plantas de mezclado móviles en el sitio mismo de construcción. Por otro lado, en construcciones urbanas congestionadas, en trabajos pequeños y con frecuencia en la construcción de carreteras, se utiliza el *concreto premezclado*. Este concreto se mezcla en una planta estacionaria y se transporta al sitio en camiones, de tres maneras: (1) mezclado completamente en la planta estacionaria y transportado en un camión agitador, (2) mezclado en tránsito, es decir, proporcionado en la planta pero mezclado en el camión mezclador, o (3) mezclado parcialmente en la planta y terminando el proceso en el camión mezclador. El concreto debe descargarse del camión mezclador o agitador hora y media después de agregar el agua a la mezcla.

Mayor información sobre la dosificación y otros aspectos del diseño y control de las mezclas de concreto puede encontrarse en la referencia 2.7.

2.5 TRANSPORTE, VACIADO, COMPACTACIÓN Y CURADO

El *transporte* del concreto para construcción desde el camión mezclador a la formaleta se realiza mediante contenedores con vaciado de fondo, con carretillas o mediante bombeo a través de conductos metálicos. El principal peligro durante el transporte es la *segregación*. Los componentes individuales del concreto tienden a segregarse debido a su heterogeneidad. En el concreto humedecido en exceso y que permanece en contenedores o en las formaletas, los componentes de grava más pesados tienden a asentarse y los materiales livianos, particularmente el agua, tienden a subir. Los movimientos laterales, como por ejemplo el flujo dentro de las formaletas, tienden a separar el agregado grueso de los componentes finos de la mezcla. El peligro de la segregación ha hecho descartar algunos medios de transporte muy comunes tales como los vertederos y las bandas transportadoras, por otros que minimicen esta tendencia.

El *vaciado* es el proceso de transferir el concreto fresco, del dispositivo de conducción a su sitio final de colocación en las formaletas. Antes de la colocación se debe remover el óxido suelto del refuerzo, limpiar las formaletas y depurar y tratar en forma adecuada las superficies endurecidas de concreto previamente colocado. El vaciado y la compactación son actividades decisivas por el efecto que tienen sobre la calidad final del concreto. Un vaciado adecuado debe evitar la segregación, el desplazamiento de las formaletas o del refuerzo, y la adherencia deficiente entre capas sucesivas de concreto. Inmediatamente terminado el vaciado, el concreto debe *compactarse,* usualmente mediante vibradores. Esta compactación evita la formación de vacíos, asegura un contacto cercano con las formaletas y con el refuerzo, y sirve como remedio parcial a una posible segregación previa. La compactación se logra mediante la utilización de *vibradores* mecánicos de alta frecuencia. Éstos pueden ser de tipo *interno*, que se sumergen en el concreto, o de tipo *externo*, que se sujetan a las formaletas. Son preferibles los primeros aunque deben complementarse con los segundos cuando se presentan formaletas muy delgadas o cuando algunos obstáculos hacen imposible sumergir el dispositivo (ver la referencia 2.8).

El concreto fresco gana resistencia más rápidamente durante las primeras semanas. El diseño estructural se basa generalmente en la *resistencia a los 28 días*, de la cual cerca del 70 por ciento se logra al final de la primera semana después de la colocación. La resistencia final del concreto depende en forma importante de las condiciones de humedad y temperatura durante este periodo inicial. El mantenimiento de las condiciones adecuadas durante este tiempo se conoce como *curado*. El 30 por ciento de la resistencia o más puede perderse por secado prematuro del concreto; cantidades similares pueden perderse si se permite que la temperatura del concreto caiga a 40°F o

menos, durante los primeros días, a menos que después de esto el concreto se mantenga continuamente húmedo durante un buen periodo. El congelamiento del concreto fresco puede reducir su resistencia hasta en un 50 por ciento.

Para evitar tales daños, el concreto debe protegerse de la pérdida de humedad al menos por siete días y en trabajos más delicados, hasta 14 días. Cuando se utilizan cementos de alta resistencia inicial, los periodos de curado pueden reducirse a la mitad. El curado se puede lograr manteniendo continuamente húmedas las superficies expuestas mediante rociado, empozamiento, recubriendo con láminas de plástico o mediante la aplicación de componentes sellantes que, usados de manera adecuada, forman membranas retardantes de la evaporación. Adicionalmente al mejoramiento de la resistencia, un curado húmedo adecuado permite un mejor control de la retracción de fraguado. Para proteger el concreto contra bajas temperaturas en climas fríos, se puede calentar el agua de mezcla y ocasionalmente los agregados, se pueden emplear métodos de aislamiento térmico cuando sea posible o se pueden utilizar aditivos especiales. Cuando las temperaturas del aire son muy bajas, puede requerirse el suministro de calor, además del aislamiento térmico (ver las referencias 2.7, 2.9 y 2.10).

2.6 CONTROL DE CALIDAD

La calidad de materiales producidos en planta, tales como aceros estructurales o de refuerzo, es garantizada por el productor quien practica controles sistemáticos de calidad especificados usualmente por las normas ASTM pertinentes. En contraste, el concreto es producido en o muy cerca del sitio de construcción y su calidad final se ve afectada por factores que han sido discutidos brevemente. Por tanto, el control de calidad sistemático debe instituirse en el sitio de construcción.

La principal medida de la calidad estructural del concreto es su *resistencia a la compresión*. Los ensayos para medir esta propiedad se realizan sobre especímenes cilíndricos de altura igual a dos veces el diámetro, usualmente 6 × 12 pulgadas. Los moldes impermeables de esta configuración se llenan con concreto durante la operación de colocación tal como lo especifica la norma ASTM C172, "Standard Method of Sampling Freshly Mixed Concrete" y la norma ASTM C31, "Standard Practice for Making and Curing Concrete Test Specimens in the Field". Los cilindros se curan al vapor a aproximadamente 21°C, generalmente por 28 días, y posteriormente se ensayan en el laboratorio a una tasa de carga especificada. La resistencia a la compresión obtenida de tales ensayos se conoce como *resistencia del cilindro* f'_c y es la principal propiedad especificada para propósitos de diseño.

Para garantizar la seguridad estructural es necesario un control continuo que asegure que la resistencia del concreto suministrado coincida satisfactoriamente con el valor especificado por el ingeniero diseñador. El Código ACI especifica que deben ensayarse un par de cilindros por cada 150 yd^3 de concreto o por cada 5000 pie^2 de área superficial colocada, pero no menos de una vez al día. Como se mencionó en la sección 2.4, el resultado de los ensayos de resistencia de diferentes mezclas con dosificaciones idénticas muestra una dispersión inevitable. Esta dispersión puede reducirse mediante controles más estrictos pero no es posible evitar que ocasionalmente se presenten resultados por debajo de la resistencia especificada del cilindro. Para asegurar una resistencia adecuada del concreto a pesar de esta dispersión, el Código ACI estipula que la calidad del concreto es satisfactoria si (1) ningún resultado de un ensayo de resistencia individual (el promedio de un par de ensayos sobre cilindros) está por debajo del valor de f'_c requerido en más de 3.5 MPa y (2) el promedio de todos los conjuntos de tres ensayos de resistencia consecutivos es igual o mayor al valor requerido de f'_c.

Es evidente que si el concreto se dosificara de manera que su resistencia media fuera solamente igual a la resistencia requerida f'_c, éste no cumpliría los requisitos de calidad debido a que aproximadamente la mitad de los resultados de ensayos de resistencia estarían por debajo del valor requerido de f'_c. Por tanto, es necesario dosificar el concreto de manera que su resistencia media f'_{cr}, usada como base para la selección de proporciones satisfactorias, sobrepase la resistencia re-

querida f'_c en una cantidad suficiente para garantizar el cumplimiento de los dos requisitos mencionados. La resistencia media requerida debe exceder el valor de f'_c en una cantidad mínima que puede determinarse únicamente mediante métodos estadísticos debido a la naturaleza aleatoria de la dispersión de los resultados de los ensayos. Con base en análisis estadísticos se han desarrollado requisitos para ser utilizados como guía para una dosificación adecuada del concreto en planta, de manera que la probabilidad de obtener una resistencia deficiente en el sitio de construcción sea aceptablemente baja.

La base para estos requisitos se ilustra en la figura 2.2, la cual muestra tres curvas de frecuencia normal que indican la distribución de resultados de ensayos de resistencia. La resistencia especificada de diseño es f'_c. Las curvas corresponden a tres grados diferentes de control de calidad; la curva A representa el mejor control, es decir, la menor dispersión, y la curva C el peor control, o sea, la mayor dispersión. El grado de control se mide estadísticamente mediante la desviación estándar σ (σ_a para la curva A, σ_b para la curva B y σ_c para la curva C), la cual es relativamente pequeña para el productor A y relativamente grande para el productor C. Las tres distribuciones tienen la misma probabilidad de que la resistencia sea menor que el valor especificado f'_c, es decir, todas tienen la misma fracción del área bajo la curva total a la izquierda de f'_c. Para cualquier curva de distribución normal, esta fracción se define mediante el índice β_s, un multiplicador que se aplica a la desviación estándar σ; β_s es el mismo para las tres distribuciones de la figura 2.2. Se puede ver que, con el fin de satisfacer el requisito de que por ejemplo uno de cada 100 ensayos va a dar por debajo de f'_c (con el valor de β_s determinado de esta manera), la resistencia media f'_{cr} del productor A con el mejor control de calidad puede estar mucho más cercana al valor especificado f'_c, que la del productor C con la operación más pobremente controlada.

Con base en tales estudios, el Código ACI exige que las instalaciones para producción de concreto mantengan registros que sirvan de base para determinar las desviaciones estándar alcanzadas en una instalación específica. También establece la cantidad mínima en que la resistencia promedio f'_{cr} a la que se desea llegar cuando se seleccionan las proporciones del concreto, debe exceder la resistencia especificada f'_c dependiendo de la desviación estándar σ, como sigue:

$$f'_{cr} = f'_c + 1.34\sigma \tag{2.1}$$

o

$$f'_{cr} = f'_c + 2.33\sigma - 500 \tag{2.2}$$

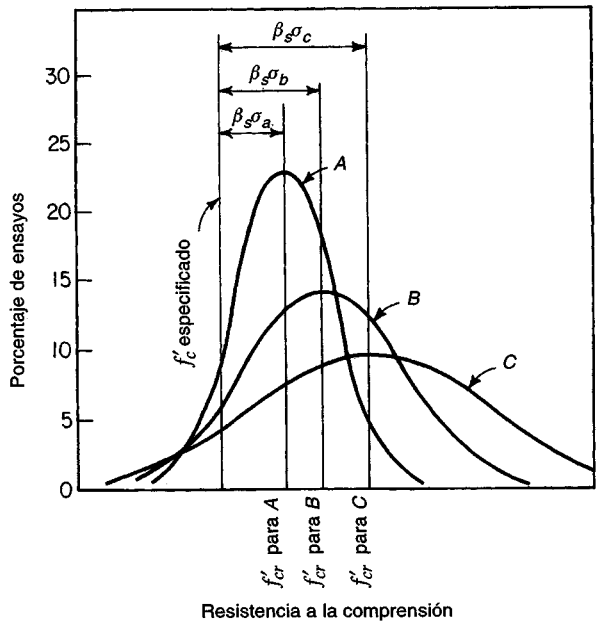


FIGURA 2.2
Curvas de frecuencia y resistencias promedio para varios grados de control del concreto con resistencia especificada de diseño f'_c. (*adaptado de la referencia 2.11*).

La ecuación 2.1 resulta en una probabilidad de 1 en 100 de que el promedio de tres ensayos consecutivos esté por debajo de la resistencia especificada f'_c, y la ecuación 2.2 resulta en una probabilidad de 1 en 100 de que un ensayo individual esté por debajo de la resistencia especificada f'_c en más de 500 lb/pulg^2. De acuerdo con el Código ACI, en caso de que no existan registros disponibles relacionados con el comportamiento de la planta de concreto, la resistencia promedio debe sobrepasar el valor de f'_c en por lo menos 1000 lb/pulg^2 para un f'_c igual a 3000 lb/pulg^2, en por lo menos 1200 lb/pulg^2 para un f'_c entre 3000 y 5000 lb/pulg^2 y en 1400 lb/pulg^2 para un f'_c por encima de 5000 lb/pulg^2.

Puede observarse que este método de control reconoce el hecho de que en ocasiones son inevitables algunas mezclas deficientes. Los requisitos garantizan (1) una pequeña probabilidad de que tales deficiencias en resistencia, cuya ocurrencia ha sido limitada, sean tan grandes como para representar un peligro serio y (2) una probabilidad igualmente pequeña de que una porción considerable de la estructura, representada por tres ensayos de resistencia consecutivos, se construya con concreto de resistencia deficiente.

A pesar de los avances científicos, la construcción en general y la fabricación de concreto en particular mantienen algunos elementos propios de un arte. Ellos dependen de muchas habilidades e imponderables. El objetivo de la *inspección* sistemática es asegurar una correspondencia entre los planos, las especificaciones y la estructura terminada. Durante la construcción, la inspección la debe llevar a cabo un ingeniero competente, preferiblemente aquel que produjo el diseño o alguno que represente directamente al ingeniero de diseño. Las principales funciones del inspector con relación a la calidad de materiales son el muestreo, el examen y el ensayo en campo de materiales, el control de la dosificación del concreto, la inspección del proporcionamiento, el mezclado, el transporte, el vaciado, la compactación y el curado, y la supervisión en la preparación de los especímenes para los ensayos de laboratorio. Adicionalmente, el inspector debe inspeccionar la cimentación, la formaletería, la colocación del acero de refuerzo y otros aspectos pertinentes al progreso general del trabajo; debe mantener registros de todos los aspectos inspeccionados y preparar reportes periódicos. Se debe hacer énfasis en la importancia de una inspección intensa para lograr una calidad correcta y adecuada de la estructura terminada.

Este recuento de la tecnología del concreto representa un rápido esbozo de un tema importante. En la práctica, cualquier persona que sea responsable de cualquiera de las fases de producción y colocación del concreto debe familiarizarse con los detalles con mucha mayor profundidad.

2.7 ADITIVOS

Además de los principales componentes del concreto, usualmente se utilizan *aditivos* para mejorar el comportamiento del mismo. Existen aditivos para acelerar o retardar el fraguado y el endurecimiento, para mejorar la manejabilidad, para aumentar la resistencia, para mejorar la durabilidad, para disminuir la permeabilidad y para proporcionar o afectar otras propiedades (ver la referencia 2.12). Los efectos benéficos de algunos aditivos son bien conocidos. Los aditivos químicos deben cumplir los requisitos de la norma ASTM C494, "Standard Specification for Chemical Admixtures for Concrete".

Los *agentes incorporadores de aire* son en la actualidad los aditivos más ampliamente utilizados. Ellos producen la inclusión de aire en el concreto en forma de pequeñas burbujas dispersas. Esto mejora la manejabilidad y la durabilidad (principalmente la resistencia al congelamiento y a la abrasión) y reduce la segregación durante la colocación. Estos aditivos disminuyen la densidad del concreto debido a que aumentan la relación de vacíos y por tanto disminuyen su resistencia; sin embargo, esta disminución puede balancearse parcialmente mediante la reducción del agua de mezcla sin que se pierda manejabilidad. El principal uso de los concretos con aire incorporado es en pavimentos, pero también se utilizan para estructuras, particularmente en elementos expuestos (ver la referencia 2.13).

Los *aditivos acelerantes* se utilizan para reducir el tiempo de fraguado y acelerar el desarrollo inicial de resistencia. El acelerante más utilizado es el cloruro de calcio gracias a su bajo costo, pero debe ser utilizado con precaución en concreto preesforzado o en concreto reforzado en ambientes húmedos, debido a su tendencia a suscitar la corrosión del acero. Existen aditivos acelerantes patentados, sin cloruros y sin agentes corrosivos (ver la referencia 2.12).

Los aditivos *retardantes del fraguado* se utilizan principalmente para contrarrestar los efectos acelerantes de altas temperaturas ambientales y para mantener la trabajabilidad del concreto durante todo el periodo de colocación. Esto ayuda a eliminar el agrietamiento debido a deflexiones de la formaleta y también mantiene la trabajabilidad del concreto permitiendo el vaciado de concreto adicional sin el desarrollo de juntas "frías".

Algunos compuestos orgánicos e inorgánicos se utilizan para reducir el agua requerida en una mezcla de concreto para un asentamiento dado; estos compuestos se llaman *plastificantes*. Una reducción en la demanda de agua puede resultar bien sea en una reducción en la relación agua-cemento para un asentamiento y contenido de cemento dado, o en un aumento del asentamiento para la misma relación agua-cemento y contenido de cemento. Los plastificantes trabajan reduciendo la fuerza entre partículas que existe entre los granos de cemento en la pasta fresca, aumentando así la fluidez de la pasta. Los aditivos reductores de agua de alto rango, o *superplastificantes*, se utilizan para producir concretos de alta resistencia (ver la sección 2.12) con una baja relación agua-cemento manteniendo los altos asentamientos requeridos para una adecuada colocación y compactación del concreto. Los superplastificantes se diferencian de los aditivos reductores de agua convencionales en que no afectan la tensión superficial del agua en forma significativa; de esta manera pueden utilizarse en dosis más altas sin producir una excesiva incorporación de aire (ver las referencias 2.12, 2.14 y 2.15). Los efectos particulares de los aditivos reductores de agua varían con los diferentes cementos, con cambios en la relación agua-cemento, con la temperatura de mezclado, con la temperatura ambiente y con otras condiciones del trabajo por lo cual se requieren en general mezclas de prueba.

Las cenizas volantes y la microsílica no son estrictamente aditivos para el concreto pero se utilizan para remplazar una parte del cemento Portland en mezclas de concreto. Las cenizas volantes son subproductos de la precipitación electrostática de los gases producidos en plantas generadoras de energía que utilizan carbón. Están muy finamente divididas y reaccionan con el hidróxido de calcio en presencia de humedad para formar un material cementante. Tienden a aumentar la resistencia del concreto a edades superiores a los 28 días. La microsílica es un subproducto que resulta de la fabricación de aleaciones ferro-silíceas o metal sílice, en altos hornos de arco eléctrico. Está dividida en partículas extremadamente finas y es altamente cementante. En contraste con las cenizas volantes, la microsílica contribuye con la ganancia de resistencia a edades tempranas entre 3 y 28 días. Las cenizas volantes y la microsílica, particularmente ésta última, han sido importantes en la producción de concreto de alta resistencia (ver la sección 2.12). Cuando se utilizan cenizas volantes o microsílica, o ambas, se acostumbra referirse a la relación agua-materiales cementantes en lugar de la relación agua-cemento. Ésta puede llegar a ser tan baja como 0.25 para concretos de alta resistencia y han llegado a utilizarse relaciones de hasta 0.21 (ver las referencias 2.16 y 2.17).

2.8 PROPIEDADES EN COMPRESIÓN

a. Cargas de corta duración

El comportamiento de una estructura bajo carga depende en alto grado de las relaciones esfuerzo-deformación del material con el cual está construida, para el tipo de esfuerzo al que está sometido el material dentro de la estructura. Debido a que el concreto se utiliza principalmente en compresión, resulta de interés fundamental su curva esfuerzo-deformación unitaria a la compre-

sión. Esta curva se obtiene mediante mediciones apropiadas de la deformación unitaria en ensayos de cilindros (ver la sección 2.6) o en la zona de compresión de vigas. La figura 2.3 muestra un conjunto típico de estas curvas para concreto de densidad normal y de 28 días de edad, obtenidas a partir de ensayos de compresión uniaxial realizados con velocidades de carga normales y moderadas. La figura 2.4 muestra las curvas correspondientes para concretos livianos con densidades de 1600 kg/m^3.

Todas las curvas tienen características similares. Todas tienen una porción inicial relativamente elástica y lineal en la cual el esfuerzo y la deformación unitaria son proporcionales, luego comienzan a inclinarse hacia la horizontal alcanzando el esfuerzo máximo, o sea la resistencia a la compresión para una deformación unitaria que varía aproximadamente entre 0.002 a 0.003, para concretos de densidad normal, y entre aproximadamente 0.003 y 0.0035 para concretos livianos (ver las referencias 2.18 y 2.19), donde los mayores valores en cada caso corresponden a las mayores resistencias. Todas las curvas muestran un tramo descendente después de que se ha alcanzado

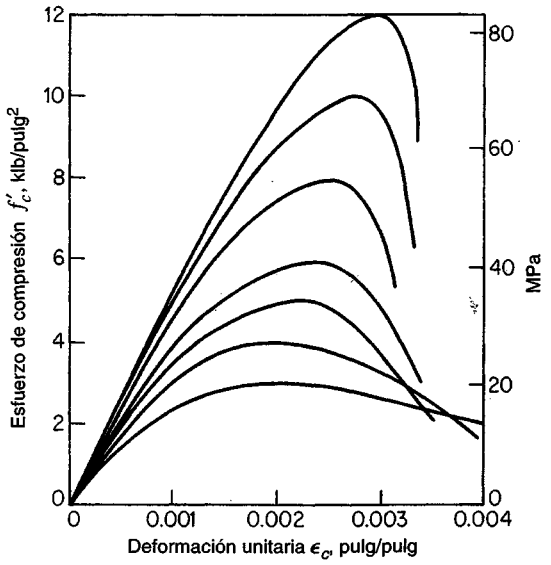


FIGURA 2.3
Curvas esfuerzo-deformación unitaria a la compresión, típicas para concreto de densidad normal con w_c = 2300 kg/m^3 (*adaptada de las referencias 2.18 y 2.19*).

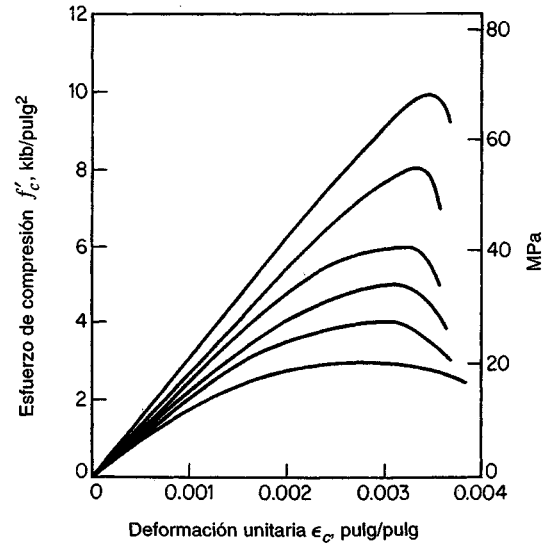


FIGURA 2.4
Curvas esfuerzo-deformación unitaria a la compresión, típicas para concretos livianos con w_c = 1600 kg/m^3 (*adaptada de las referencias 2.18 y 2.19*).

el esfuerzo pico; sin embargo, las características de las curvas después del esfuerzo pico dependen en alto grado del método de ensayo. Si se siguen procedimientos especiales en el ensayo para asegurar una tasa de deformación constante mientras que la resistencia del cilindro disminuye, pueden obtenerse largos tramos descendentes y estables (ver la referencia 2.20). Ante la ausencia de tales dispositivos especiales, la descarga puede llegar a ser muy rápida una vez pasado el punto de esfuerzo pico, en particular para los concretos de mayor resistencia, que son generalmente más frágiles que los de baja resistencia.

En la práctica actual, la resistencia a la compresión especificada f'_c para concretos de densidad normal fundidos en el sitio está comúnmente en el rango de 3000 a 5000 lb/pulg^2 y puede llegar hasta aproximadamente 6000 lb/pulg^2 para elementos de concreto prefabricados y preesforzados. Las resistencias para concretos livianos están generalmente por debajo de estos valores. Los concretos de alta resistencia, con valores de f'_c de hasta 12,000 lb/pulg^2, se utilizan cada vez con mayor frecuencia en particular para columnas muy cargadas en edificios de concreto de gran altura y en puentes de largas luces (la mayoría preesforzados) donde puede lograrse una reducción significativa en la carga muerta mediante la minimización de las secciones transversales de los elementos (ver la sección 2.12).

El *módulo de elasticidad* E_c (en unidades lb/pulg^2), es decir la pendiente del tramo recto inicial de la curva esfuerzo-deformación unitaria, aumenta con la resistencia del concreto. Para concretos con resistencias de aproximadamente 6000 lb/pulg^2, éste puede calcularse con suficiente precisión a partir de la siguiente ecuación empírica dada por el Código ACI:

$$E_c = 33 w_c^{1.5} \sqrt{f'_c} \tag{2.3}$$

donde w_c es el peso unitario del concreto endurecido en lb/pie^3 y f'_c es la resistencia en lb/pulg^2. La ecuación 2.3 se determinó mediante el ensayo de concretos estructurales con valores de w_c entre 90 y 155 lb/pie^3. Para concretos corrientes de arena y piedra con w_c = 145 lb/pie^3, el valor de E_c puede calcularse como:

$$E_c = 57{,}000 \sqrt{f'_c} \tag{2.4}$$

Para resistencias a la compresión en el rango de 6000 a 12,000 lb/pulg^2, la ecuación del Código ACI sobreestima el valor de E_c hasta en un 20 por ciento, tanto para materiales de peso normal como para materiales livianos. Con base en una investigación reciente en la Universidad de Cornell (ver las referencias 2.18 y 2.19), se recomienda aplicar la siguiente ecuación para los concretos de densidad normal con f'_c en el rango de 3000 a 12,000 lb/pulg^2 y para concretos livianos entre 3000 y 9000 lb/pulg^2:

$$E_c = (40{,}000 \sqrt{f'_c} + 1{,}000{,}000) \left(\frac{w_c}{145} \right)^{1.5} \tag{2.5}$$

donde los términos y las unidades son iguales a los definidos anteriormente para las ecuaciones del Código ACI.

La información relativa a las propiedades de resistencia del concreto, tal como la ya presentada, se obtiene usualmente mediante ensayos realizados sobre muestras de 28 días de edad. Sin embargo, el cemento continúa su hidratación y por tanto su endurecimiento, durante mucho tiempo a una tasa cada vez menor. La figura 2.5 muestra una curva típica del aumento en la resistencia del concreto con la edad para concretos que utilizan cemento tipo I (normal) y cemento tipo III (alta resistencia inicial), cada curva normalizada con respecto a la resistencia a la compresión a los 28 días. Como se puede observar en la figura, los cementos de alta resistencia inicial producen un aumento más rápido en la resistencia a edades tempranas, aunque la tasa de aumento de resisten-

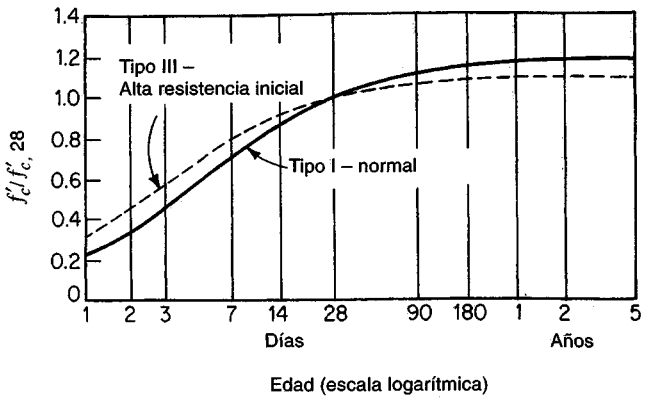


FIGURA 2.5
Efectos de la edad en la resistencia a compresión f'_c para concretos curados al vapor (*adaptada de la referencia 2.21*).

cia disminuye generalmente para edades mayores. En plantas de prefabricación se utilizan concretos con cementos tipo III, y su resistencia f'_c se especifica a veces a los siete días en lugar de los 28 días.

Debe observarse que la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria presenta importantes variaciones al considerar varios concretos con la misma resistencia de cilindro y aún para el mismo concreto sometido a diferentes condiciones de carga. Un ejemplo de esto se muestra en la figura 2.6, donde se presentan las curvas para diferentes especímenes del mismo concreto cargados a diferentes tasas de deformación unitaria, desde uno que corresponde a una aplicación de carga relativamente rápida (0.001 pulg/pulg por minuto) hasta uno que corresponde a una aplicación de carga extremadamente lenta (0.001 pulg/pulg por 100 días). Se observa que el tramo descendente de la curva que indica la desintegración interna del material es mucho más pronunciado para las velocidades rápidas de carga que para las lentas. También puede verse que los picos de las curvas, es decir, las resistencias máximas alcanzadas, son un poco menores para tasas más lentas de deformación.

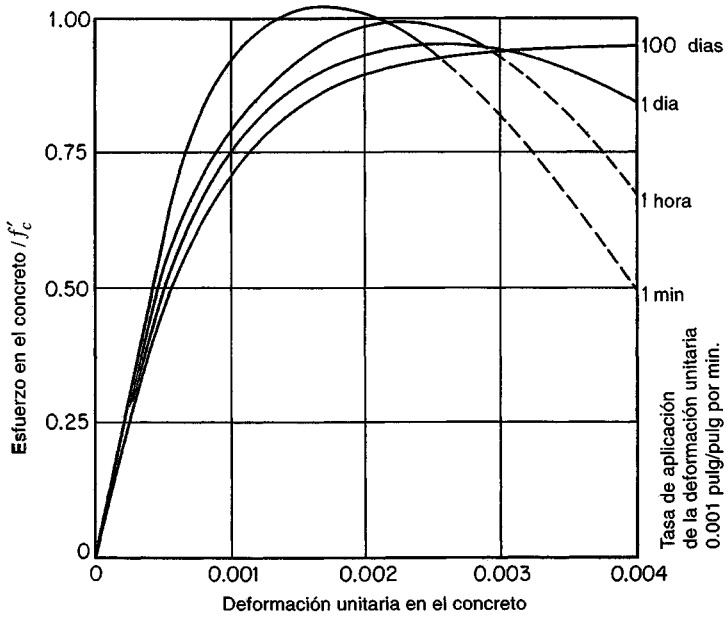


FIGURA 2.6
Curvas esfuerzo-deformación unitaria para varias tasas de deformación **en compresión** concéntrica (*adaptada de la referencia 2.22*).

Al igual que otros materiales, cuando el concreto se comprime en una dirección se expande en la dirección transversal a aquélla de la aplicación del esfuerzo. La relación entre la deformación unitaria transversal y la longitudinal se conoce como *relación de Poisson* y depende de la resistencia, de la composición y de otros factores. Para esfuerzos menores a aproximadamente $0.7f'_c$, la relación de Poisson para el concreto está entre 0.15 y 0.20.

b. Cargas actuantes a largo plazo

Para algunos materiales de ingeniería, como el acero, la resistencia y las relaciones esfuerzo-deformación unitaria son independientes de la velocidad y de la duración de la carga, por lo menos para los intervalos usuales de cambios de esfuerzos, temperaturas y otras variables. En contraste, la figura 2.6 ilustra la pronunciada influencia del tiempo, en este caso relacionado con la velocidad de aplicación de la carga, sobre el comportamiento del concreto bajo carga. La principal razón para esto es que el concreto fluye bajo carga, mientras que el acero no presenta flujo plástico bajo condiciones prevalecientes en edificios, puentes y construcciones similares.

El *flujo plástico* es la propiedad mediante la cual el material se deforma continuamente en el tiempo cuando está sometido a esfuerzo o carga constante. La naturaleza del proceso de flujo plástico se presenta esquemáticamente en la figura 2.7. Este concreto específico fue sometido a carga después de 28 días obteniéndose una deformación unitaria instantánea ϵ_{inst}. La carga se mantuvo por 230 días durante los cuales el flujo plástico aumentó la deformación unitaria total hasta casi tres veces la deformación unitaria instantánea. Si la carga se hubiera mantenido, la deformación hubiera continuado por la curva sólida. Si la carga se retira, como se muestra en la curva punteada, la mayor parte de la deformación instantánea ϵ_{inst} se recupera, y se observa alguna recuperación de la parte correspondiente al flujo plástico. Si el concreto vuelve a cargarse en una fecha posterior, las deformaciones instantánea y de flujo plástico vuelven a desarrollarse tal como se muestra.

Para un concreto dado las deformaciones por flujo plástico son prácticamente proporcionales a la magnitud del esfuerzo aplicado; para cualquier esfuerzo dado, los concretos de alta resistencia muestran menos flujo plástico que los de baja resistencia. Como se muestra en la figura 2.7,

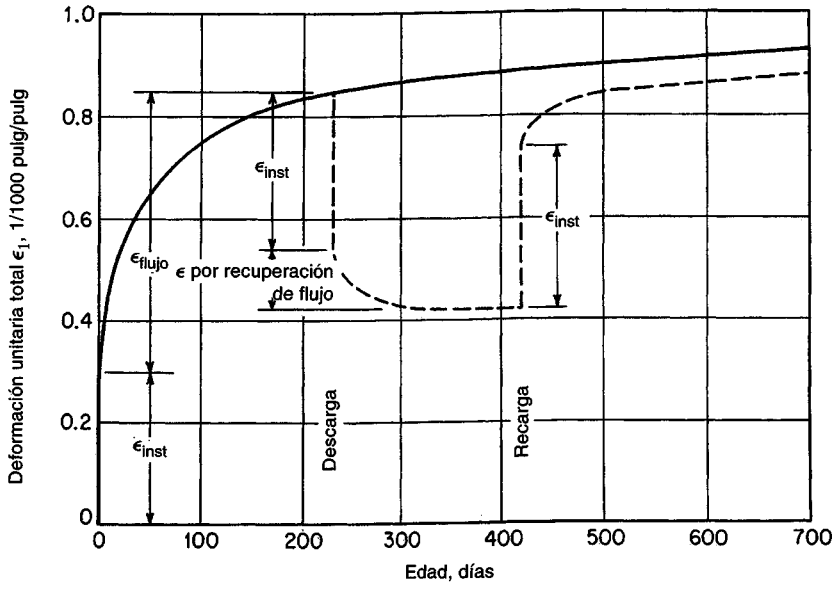


FIGURA 2.7
Curva típica de flujo plástico (concreto sometido a un esfuerzo de 600 lb/pulg^2 a una edad de 28 días).

el flujo plástico continúa en el tiempo a una tasa cada vez menor y termina después de unos dos a cinco años en un valor final que, dependiendo de la resistencia del concreto y otros factores, alcanza aproximadamente 1.2 a 3 veces la magnitud de la deformación unitaria instantánea. Si en lugar de aplicar la carga rápidamente y luego mantenerla constante, ésta se incrementa lenta y gradualmente como es el caso en muchas estructuras durante y después de la construcción, las deformaciones unitarias instantánea y de flujo plástico ocurren de manera simultánea. Este efecto es el que se muestra en la figura 2.6, es decir, que las diferencias en la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria para diferentes velocidades de aplicación de carga son principalmente el resultado de las deformaciones por flujo plástico del concreto.

Para esfuerzos que no exceden la mitad de la resistencia del cilindro, las deformaciones unitarias por flujo plástico son directamente proporcionales al esfuerzo. Debido a que las deformaciones unitarias elásticas iniciales son también proporcionales al esfuerzo en este rango, se puede definir el *coeficiente de flujo plástico* (*creep coefficient*):

$$C_{cu} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{ci}} \tag{2.6}$$

donde ϵ_{cu} es el valor asintótico final de la deformación unitaria adicional por flujo plástico, y ϵ_{ci} es la deformación unitaria inicial instantánea cuando la carga se aplica por primera vez. El flujo plástico también se puede expresar en términos de *flujo plástico específico* δ_{cu}, definido como la deformación unitaria adicional en el tiempo por unidad de esfuerzo (lb/pulg^2). Puede demostrarse que

$$C_{cu} = E_c \delta_{cu} \tag{2.7}$$

Adicionalmente al nivel de esfuerzo, el flujo plástico depende de la humedad ambiente relativa promedio, siendo más del doble para el 50 que para el 100 por ciento de humedad (ver la referencia 2.4). La razón de esto es que, en parte, la reducción en volumen para carga sostenida se produce por la migración del agua libre de los poros hacia el exterior, para evaporarse en la atmósfera circundante. Otros factores de importancia incluyen el tipo de cemento y agregados, la edad del concreto cuando se aplica la primera carga y la resistencia del concreto (ver la referencia 2.23). El coeficiente de flujo plástico es mucho menor para concretos de alta resistencia que para concretos de baja resistencia. Sin embargo, para concretos de alta resistencia los esfuerzos para cargas sostenidas tienden a ser mayores, de manera que las *deformaciones* por flujo plástico pueden ser igualmente altas, aunque el coeficiente de flujo plástico sea bajo.

Los valores de la tabla 2.1, tomados de la referencia 2.24 y ampliados para concretos de alta resistencia con base en investigaciones recientes en la Universidad de Cornell, representan valores típicos para condiciones promedio de humedad y para concretos sometidos a carga a una edad de siete días.

Como ilustración, si el concreto en una columna con $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 está sometido a una carga que actúa a largo plazo con un esfuerzo sostenido de 1200 lb/pulg^2, después de varios años

TABLA 2.1
Parámetros típicos de flujo plástico

Resistencia a la comprensión		Flujo plástico específico δ_{cu}		Coeficiente de flujo plástico C_{cu}
lb/pulg^2	MPa	10^{-6} por lb/pulg^2	10^{-6} por MPa	
3000	21	1.00	145	3.1
4000	28	0.80	116	2.9
6000	41	0.55	80	2.4
8000	55	0.40	58	2.0
10,000	69	0.28	41	1.6

bajo carga el valor final de la deformación unitaria por flujo plástico va a ser aproximadamente $1200 \times 0.80 \times 10^{-6} = 0.00096$ pulg/pulg. Entonces, si la columna tuviera 20 pies de longitud, el flujo plástico produciría un acortamiento de aproximadamente 1/4 de pulgada.

El coeficiente de flujo plástico para un tiempo dado C_{ct}, puede relacionarse con el coeficiente de flujo plástico último C_{cu}. En la referencia 2.21, Branson sugiere la siguiente ecuación:

$$C_{ct} = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} C_{cu} \tag{2.8}$$

donde t = tiempo en días después de la aplicación de la carga.

En muchas situaciones especiales como por ejemplo para elementos o pórticos esbeltos o para construcción preesforzada, el diseñador debe tomar en cuenta el efecto combinado del flujo plástico y de la retracción de fraguado (ver la sección 2.11). En tales casos, en lugar de confiar en los valores dados en la tabla 2.1, debe obtener información más precisa sobre los parámetros del flujo plástico tales como los que se presentan en las referencias 2.21 ó 2.24.

Las cargas sostenidas afectan no sólo la deformación unitaria sino también la resistencia del concreto. La resistencia de cilindros f'_c se determina mediante ensayos con velocidades de aplicación de la carga normales (aproximadamente 35 lb/pùlg^2 por segundo). Ensayos realizados por Rüsch (ver la referencia 2.22) y en la Universidad de Cornell (ver las referencias 2.25 y 2.26) han demostrado que para prismas y cilindros de concreto no reforzado, sometidos a cargas concéntricas, la *resistencia bajo carga sostenida* es significativamente menor que f'_c, en el orden de 75 a 85 por ciento de f'_c, para cargas que se mantienen por un año o más. De esta manera, un elemento sometido a una sobrecarga sostenida que causa esfuerzos de compresión de por ejemplo el 85 por ciento de f'_c, puede fallar después de cierto tiempo aunque la carga no se haya aumentado.

c. Fatiga

Cuando el concreto está sometido a cargas fluctuantes en lugar de cargas sostenidas, su *resistencia a la fatiga*, al igual que para otros materiales, es considerablemente menor que su resistencia estática. Cuando en concretos simples se introducen esfuerzos cíclicos de compresión variando desde cero hasta el máximo esfuerzo, el límite de fatiga está entre el 50 y el 60 por ciento de la resistencia a la compresión estática, para 2,000,000 de ciclos. Para otros rangos de esfuerzos pueden realizarse estimativos razonables utilizando los diagramas modificados de Goodman (ver la referencia 2.24). Para otros tipos de esfuerzos aplicados, tales como esfuerzo de compresión por flexión en vigas de concreto reforzado o tensión por flexión en vigas no reforzadas o en el lado de tensión de vigas reforzadas, el límite de fatiga parece ser aproximadamente el 55 por ciento de la resistencia estática correspondiente. Sin embargo, estos datos deben usarse únicamente como guías generales. Se sabe que la resistencia a la fatiga del concreto no solamente depende de su resistencia estática sino también de las condiciones de humedad, de la edad y de la velocidad de aplicación de la carga (ver la referencia 2.27).

2.9 RESISTENCIA A LA TENSIÓN

Aunque el concreto se emplea de mejor manera cuando se utiliza su buena resistencia a la compresión, su resistencia a la tensión también es de importancia en varias situaciones. La formación y propagación de las grietas en el lado de tensión de elementos de concreto reforzado sometidos a flexión dependen principalmente de la resistencia a la tensión. También ocurren esfuerzos de tensión en el concreto como resultado de cortante, torsión y otras acciones, y en la mayoría de los casos el comportamiento del elemento cambia después de ocurrido el agrietamiento. Como resultado de lo anterior, es de fundamental importancia una predicción suficientemente precisa de la resistencia a la tensión del concreto.

La determinación de la resistencia a la tensión real del concreto tiene dificultades experimentales considerables. En los ensayos de *tensión directa*, pequeños desalineamientos y concentraciones de esfuerzos en las mordazas de agarre pueden llegar a estropear los resultados. Durante muchos años, la resistencia a la tensión se ha medido en términos del *módulo de rotura* f_r, es decir, el esfuerzo de tensión por flexión calculado a partir de la carga de fractura de una viga de prueba en concreto simple. Debido a que este esfuerzo nominal se calcula bajo la suposición de que el concreto es un material elástico, y dado que este esfuerzo de flexión está localizado en la superficie exterior, éste tiende a ser mayor que la resistencia del concreto en tensión axial uniforme. Este esfuerzo es entonces una medida de la resistencia a la tensión axial real pero no es idéntica a ella.

Más recientemente se ha propuesto el resultado del llamado *ensayo de tensión indirecta* (*split-cylinder test*) como una medida de la resistencia a la tensión del concreto. Un cilindro de concreto de 6 × 12 pulgadas, igual al utilizado para los ensayos de compresión, se introduce en una máquina para ensayos de compresión en posición horizontal, de manera que la compresión se aplique uniformemente a lo largo de dos líneas generadoras opuestas. Entre las platinas de compresión de la máquina y el cilindro se insertan cojinetes con el fin de uniformar y distribuir la presión. Puede demostrarse que para un cilindro elástico sometido a carga de esta manera, se genera un esfuerzo de tensión aproximadamente uniforme y de magnitud $2P/\pi dL$ en dirección perpendicular al plano de aplicación de la carga. Correspondientemente, los cilindros sometidos a este ensayo se parten en dos mitades a lo largo de este plano para un esfuerzo f_{ct} que puede calcularse a partir de la expresión anterior. P es la carga de compresión aplicada cuando ocurre la falla y d y L son el diámetro y la longitud del cilindro, respectivamente. Debido a las condiciones locales de esfuerzo en las líneas de carga y a la presencia de esfuerzos perpendiculares a los esfuerzos de tensión antes mencionados, los resultados de los ensayos de tensión indirecta no son idénticos a la resistencia a la tensión axial real, pero se cree que son una buena medida de ella. Los resultados de todos los tipos de ensayos para determinar la resistencia a la tensión muestran una dispersión considerablemente mayor que la de los ensayos a compresión.

La resistencia a la tensión determinada con cualquiera de los ensayos anteriores no presenta una buena correlación con la resistencia a la compresión f'_c. En apariencia, la resistencia a la tensión para concretos de arena y grava depende principalmente de la resistencia de la unión entre la pasta de cemento endurecida y el agregado, mientras que para concretos livianos depende principalmente de la resistencia a la tensión de los agregados porosos. Por otro lado, la resistencia a la compresión depende menos de estas características particulares.

Existe una mejor correlación entre las diferentes medidas de la resistencia a la tensión y la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión. Por ejemplo, la resistencia a la tensión directa varía entre aproximadamente 3 y $5\sqrt{f'_c}$ para concretos de densidad normal, y entre aproximadamente 2 y $3\sqrt{f'_c}$ para concretos livianos de todo tipo. En la tabla 2.2 se resumen rangos de valores típicos para resistencias determinadas a partir de los ensayos de tensión indirecta y a partir del módulo de rotura. En estas expresiones, f'_c está expresada en unidades de lb/pulg^2 y las resistencias a la tensión resultantes se obtienen también en lb/pulg^2.

TABLA 2.2
Rangos aproximados de resistencia a la tensión del concreto

	Concreto de peso normal (lb/pulg^2)	**Concreto de peso liviano (lb/pulg^2)**
Resistencia a la tensión directa f'_t	3 a 5 $\sqrt{f'_c}$	2 a 3 $\sqrt{f'_c}$
Resistencia a la tensión indirecta f_{ct}	6 a 8 $\sqrt{f'_c}$	4 a 6 $\sqrt{f'_c}$
Módulo de rotura f_r	8 a 12 $\sqrt{f'_c}$	6 a 8 $\sqrt{f'_c}$

Estas expresiones aproximadas muestran que las resistencias a la tensión y a la compresión no son de ningún modo proporcionales y que cualquier incremento en la resistencia a la compresión, tal como el que se logra bajando la relación agua-cemento, está acompañado por un incremento porcentual mucho menor en la resistencia a la tensión.

El Código ACI recomienda un módulo de rotura f_r' igual a $7.5\sqrt{f_c'}$ para concretos de peso normal, valor que debe multiplicarse por 0.85 para concretos hechos con arenas livianas y por 0.75 para concretos hechos con agregados livianos de cualquier tipo, con valores de $6.4\sqrt{f_c'}$ y $5.6\sqrt{f_c'}$ respectivamente, para estos materiales.

2.10 RESISTENCIA BAJO ESFUERZOS COMBINADOS

En muchas situaciones estructurales, el concreto está sometido a la vez al efecto de varios esfuerzos actuando en diferentes direcciones. Por ejemplo, en el caso de vigas, la mayor parte del concreto está sometido simultáneamente a esfuerzos de compresión y de corte, y en losas y zapatas a compresión en dos direcciones perpendiculares más cortante. Mediante los métodos bien conocidos de estudio de la mecánica estructural, cualquier estado de esfuerzos combinados, sin importar qué tan complejo sea, puede reducirse a tres esfuerzos principales perpendiculares entre sí en un cubo elemental orientado adecuadamente en el material. Alguno o todos los esfuerzos principales pueden ser de tensión o de compresión. Si alguno de ellos es cero, se dice que existe un estado de esfuerzos *biaxial*; si dos de ellos son cero, el estado de esfuerzos es *uniaxial*, ya sea compresión simple o tensión simple. En la mayoría de los casos se conocen únicamente las propiedades de resistencia uniaxial del material a partir de ensayos simples tales como la resistencia del cilindro f_c' y la resistencia a la tensión f_t'. Para predecir la resistencia de estructuras en las cuales el concreto está sometido a un estado de esfuerzos biaxial o triaxial, sería deseable poder calcular la resistencia del concreto en dicho estado de esfuerzos, conociendo únicamente los valores de f_c' o de f_c' y f_t' a partir de los ensayos simples.

A pesar de la extensa y continua investigación, no ha emergido aún una teoría general de la resistencia del concreto bajo esfuerzos combinados. Se han adaptado varias teorías al concreto tales como la del esfuerzo máximo, la de la deformación máxima, la teoría de Mohr-Coulomb y la del esfuerzo cortante octaédrico, las cuales se discuten en los textos de mecánica estructural (ver las referencias 2.28 a 2.32), aunque ninguna de ellas ha tenido éxito completo. Investigaciones recientes indican que el enfoque de la mecánica de fracturas no lineal puede usarse con éxito para estudiar la propagación de grietas de tensión (ver la referencia 2.33). En el momento, ninguna de estas teorías ha sido aceptada en forma general y muchas tienen contradicciones internas obvias. La principal dificultad para el desarrollo de una teoría de resistencia general y adecuada radica en la naturaleza altamente heterogénea del concreto y en el grado en que su comportamiento, cuando está sometido a altos esfuerzos y en la fractura, está influenciado por la microfisuración y otros fenómenos discontinuos (ver la referencia 2.34).

Sin embargo, diferentes ensayos han permitido establecer adecuadamente la resistencia del concreto, al menos para el estado de esfuerzos biaxial (ver las referencias 2.35 y 2.36). Los resultados pueden presentarse en la forma de diagramas de interacción tal como el de la figura 2.8, el cual muestra la resistencia en la dirección 1 como una función del esfuerzo aplicado en la dirección 2. Todos los esfuerzos se han normalizado en términos de la resistencia a la compresión f_c'. Puede observarse que en el cuadrante que representa la compresión biaxial se ha alcanzado un incremento en la resistencia de hasta aproximadamente el 20 por ciento con respecto al esfuerzo a la compresión uniaxial, donde la magnitud del incremento depende de la relación entre f_2 y f_1. En el cuadrante de tensión biaxial, la resistencia en la dirección 1 es prácticamente independiente del esfuerzo en la dirección 2. Cuando se combina tensión en la dirección 2 con compresión en la dirección 1, la resistencia a la compresión se reduce en forma lineal y viceversa. Por ejemplo, una compresión lateral de aproximadamente la mitad de la resistencia a la compresión uniaxial reduci-

rá la resistencia a la tensión a casi la mitad con relación al valor uniaxial. Este hecho es de gran importancia para predecir el agrietamiento a tensión diagonal, de por ejemplo, vigas de gran altura o muros de corte.

Son pocas las investigaciones experimentales relacionadas con la resistencia triaxial del concreto, debido principalmente a la dificultad práctica de aplicar carga en tres direcciones simultáneas sin introducir restricciones significativas con el equipo de carga (ver la referencia 2.37). A partir de la información disponible en el momento, pueden obtenerse las siguientes conclusiones tentativas con relación a la resistencia triaxial del concreto: (1) en un estado de compresión triaxial con esfuerzos iguales, la resistencia del concreto puede ser hasta de un orden de magnitud mayor que la resistencia a la compresión uniaxial; (2) para una compresión biaxial con esfuerzos iguales, combinada con un valor de compresión menor en la tercera dirección, puede esperarse un aumento mayor del 20 por ciento en la resistencia; y (3) para estados de esfuerzos que incluyen compresión combinada con tensión en por lo menos otra dirección, el esfuerzo principal intermedio tiene poca influencia y la resistencia a la compresión puede predecirse en forma segura con base en la figura 2.8.

De hecho, la resistencia del concreto bajo esfuerzos combinados no puede aún calcularse en forma racional, e igualmente importante, en muchas situaciones en estructuras de concreto resulta imposible calcular todos los esfuerzos actuantes con sus respectivas direcciones; éstas son dos de las principales razones para seguir confiando en los ensayos experimentales. Debido a esto, el diseño de estructuras de concreto reforzado sigue basándose más en una amplia información experimental que en una teoría analítica consistente, en particular para las muchas situaciones en que se presentan esfuerzos combinados.

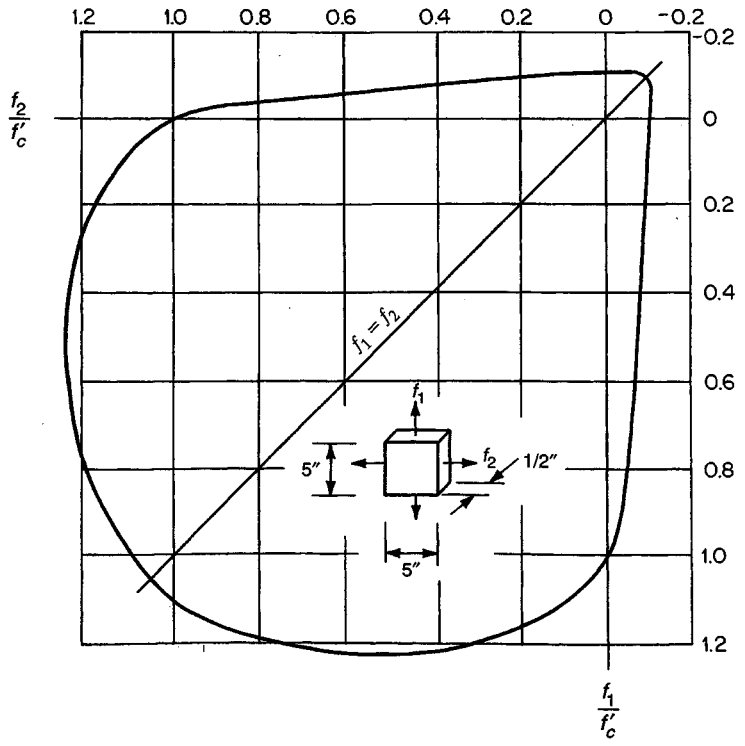


FIGURA 2.8
Resistencia del concreto bajo esfuerzo biaxial (*adaptada de la referencia 2.36*).

2.11 EFECTOS DE RETRACCIÓN Y TEMPERATURA

Las deformaciones unitarias discutidas en la sección 2.8 eran inducidas por esfuerzos causados por cargas externas. Influencias de naturaleza diferente hacen que el concreto, aún libre de cualquier tipo de carga externa, sufra deformaciones y cambios de volumen. De éstas, las más importantes son la retracción de fraguado y los efectos de los cambios de temperatura.

a. Retracción de fraguado

Como se discutió en las secciones 2.2 y 2.4, cualquier mezcla de concreto trabajable contiene más agua que la requerida para hidratación. Si el concreto está expuesto al aire, la mayor parte de esta agua libre se evapora en el tiempo, la tasa y el grado de secado dependiendo de las condiciones de temperatura y humedad ambiente. En la medida en que el concreto se seca, se retrae en volumen probablemente debido a la tensión capilar que se desarrolla en el agua que permanece en el concreto. Por el contrario, si el concreto seco se sumerge en el agua, se expande recuperando la mayor parte del volumen perdido en la retracción. La retracción, que continúa durante varios meses a tasas cada vez menores, puede ser una propiedad del concreto, perjudicial en varios aspectos, que depende de la configuración del elemento. Cuando no se controla de manera adecuada, puede causar grietas poco agradables a la vista y usualmente perjudiciales en losas, muros, etc. En estructuras estáticamente indeterminadas (como son la mayoría de las estructuras de concreto) la retracción puede causar esfuerzos altos y potencialmente peligrosos. En concreto preesforzado, ésta lleva a pérdidas parciales en los esfuerzos iniciales. Por estas razones, es esencial minimizar y controlar la retracción de fraguado.

Considerando la naturaleza misma del proceso, resulta claro que el factor determinante de la cantidad de retracción de fraguado final es el contenido de agua unitario del concreto fresco. Esto se ilustra en la figura 2.9, la cual muestra la cantidad de retracción de fraguado en unidades de 0.001 pulg/pulg para diferentes cantidades de agua de mezcla. En todos los ensayos se utilizaron

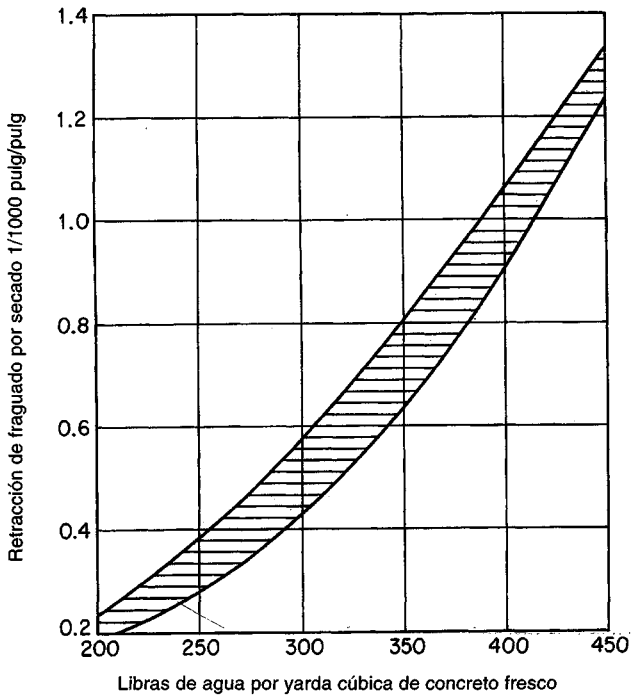


FIGURA 2.9
Efecto del contenido de agua en la retracción de fraguado por secado (*adaptado de la referencia 2.4*).

los mismos agregados, pero además del contenido de agua, la cantidad de cemento se modificó en forma independiente, desde cuatro hasta once bultos por yarda cúbica de concreto. Esta amplia variación en el contenido de cemento tuvo apenas efectos menores en la magnitud de la retracción de fraguado, en comparación con el efecto del contenido de agua; esto se hace evidente al observar el ancho de la franja que incluye todos los resultados de los ensayos para la amplia variación en los contenidos de cemento. A partir de lo anterior, es evidente que la mejor manera para disminuir la retracción de fraguado es reduciendo el contenido de agua del concreto fresco al mínimo compatible con la manejabilidad requerida. Adicionalmente, un curado prolongado y cuidadoso resulta benéfico para el control de dicha retracción.

Para concretos normales, los valores de retracción de fraguado final están generalmente en el orden de 400×10^{-6} a 800×10^{-6} pulg/pulg dependiendo del contenido inicial de agua, de la temperatura y humedad ambiente, y de la naturaleza de los agregados. Los valores de retracción de fraguado del concreto con agregados altamente absorbentes, tales como areniscas y pizarras, pueden ser dos y más veces mayores que los obtenidos con materiales menos absorbentes como son los granitos y algunas limolitas. Debido a su alta porosidad, los concretos producidos con algunos agregados livianos resultan fácilmente con valores de retracción de fraguado mucho mayores que los concretos normales.

Para algunos propósitos, como la predicción de las pérdidas de fuerza en el tiempo en vigas de concreto preesforzado, es importante estimar la magnitud de la retracción de fraguado como función del tiempo. Estudios a largo plazo (ver la referencia 2.21) muestran que para concretos curados en ambiente húmedo, la retracción de fraguado ocurrida en un tiempo t después de los siete días iniciales, puede predecirse en forma satisfactoria mediante la ecuación

$$\epsilon_{sh,t} = \frac{t}{35 + t}\epsilon_{sh,u} \tag{2.9}$$

donde $\epsilon_{sh,t}$ es la deformación unitaria por retracción de fraguado en el tiempo t en días, y $\epsilon_{sh,u}$ es el valor último después de un largo periodo. La ecuación 2.9 aplica para condiciones estándares, que según la referencia 2.21 corresponden a una humedad por debajo del 40 por ciento y para un espesor promedio del elemento de 6 pulgadas, y aplica tanto para concretos de peso normal como para concretos livianos. Para condiciones no estándares deben aplicarse unos factores de modificación y para elementos curados al vapor se presentan ecuaciones adicionales.

Para estructuras en las cuales resulte especialmente importante una reducción en el agrietamiento, tales como tableros de puentes, losas de pavimento y tanques para almacenamiento de líquidos, resulta apropiado la utilización de *concreto con cemento expansivo*. El cemento compensado por retracción está constituido y dosificado de manera que el concreto aumente su volumen después del fraguado y durante el endurecimiento. Cuando el concreto está restringido por el refuerzo o por cualquier otro medio, la tendencia a la expansión se traduce en una compresión. Con el secado subsecuente, la retracción de fraguado generada, en lugar de causar un esfuerzo de tensión en el concreto que de otra manera produciría agrietamiento, simplemente reduce o relaja las deformaciones expansivas producidas por la expansión inicial (ver la referencia 2.38). El cemento expansivo se produce mediante la adición de una fuente de aluminato reactivo al cemento Portland corriente; aproximadamente el 90 por ciento del cemento compensado por retracción está fabricado con los componentes del cemento Portland convencional. De los tres tipos principales de cemento expansivo que se producen, sólo el tipo K está disponible comercialmente en los Estados Unidos; es casi un 20 por ciento más costoso que el cemento Portland corriente (ver la referencia 2.39). La norma ASTM C845, "Standard Specification for Expansive Hydraulic Cement", establece los requisitos para el cemento expansivo. Los aditivos corrientes pueden utilizarse en concreto compensado por retracción, pero se requiere realizar mezclas de prueba debido a que algunos aditivos, particularmente algunos agentes incorporadores de aire, no son compatibles con ciertos cementos expansivos.

b. Efectos de los cambios de temperatura

Como muchos otros materiales, el concreto se expande con un aumento en la temperatura y se contrae con una disminución en la misma. Los efectos de tales cambios en el volumen son similares a aquéllos causados por la retracción de fraguado, es decir, la contracción por temperatura puede llevar a agrietamientos considerables, particularmente cuando se superpone a la retracción de fraguado. En estructuras indeterminadas, las deformaciones debidas a cambios de temperatura pueden causar esfuerzos altos y en ocasiones dañinos.

El coeficiente de expansión y contracción térmica varía relativamente dependiendo de los tipos de agregados y de la riqueza de la mezcla. Éste está por lo general en el rango de 4×10^{-6} a 7×10^{-6} pulg/pulg por °F. Para efectos del cálculo de esfuerzos y deformaciones unitarias causadas por cambios de temperatura se acepta generalmente como satisfactorio un valor de 5.5×10^{-6} (ver la referencia 2.4).

2.12 CONCRETO DE ALTA RESISTENCIA

En años recientes se ha venido presentando un interés creciente por los *concretos de alta resistencia*. Aunque la definición exacta es arbitraria, el término se refiere a concretos con resistencias a la compresión uniaxial en el rango de 6000 a 12,000 lb/pulg^2 o más. Estos concretos pueden fabricarse utilizando cementos, arena y piedras cuidadosamente seleccionadas pero por lo general disponibles; algunos aditivos, incluyendo superplastificantes reductores de agua de alto rango, cenizas volantes y *microsílica*; además de un control de calidad muy cuidadoso durante la producción (ver las referencias 2.40 y 2.41). Con lo anterior, además de lograr una mayor resistencia a la compresión, se mejoran casi todas las demás propiedades de ingeniería, lo que lleva a la utilización del término alternativo, *concreto de alto desempeño*.

La aplicación más común del concreto de alta resistencia ha sido en las columnas de edificios altos donde el concreto normal resultaría en secciones transversales inaceptablemente grandes, con la pérdida de espacio valioso de piso útil. Se ha demostrado que la utilización de mezclas de concreto de alta resistencia, aunque más costosas, no solamente aumenta el área de piso utilizable, sino que también resulta más económico que aumentar la cantidad de acero de refuerzo. Concreto de hasta 12,000 lb/pulg^2 se especificó en las columnas de los pisos inferiores del 311 South Wacker Drive en Chicago (ver figura 2.10), con una altura total de 946 pies, hasta hace poco tiempo el más alto del mundo, pero que ha sido superado por otros de mayor altura. En la actualidad el más alto es el Central Plaza de Hong Kong, con una altura total de 1230 pies (ver la referencia 2.42).

Para el caso de puentes también se presentan ventajas significativas mediante la utilización de secciones transversales menores, con la reducción resultante en carga muerta lo cual permite mayores luces. El mayor módulo elástico y el menor coeficiente de flujo plástico resultan en deflexiones instantáneas y a largo plazo reducidas, y en el caso de puentes preesforzados se logran menores pérdidas en la fuerza de preesfuerzo tanto inicial como en el tiempo. Otras aplicaciones recientes del concreto de alta resistencia incluyen estructuras costa afuera para explotación de petróleo, edificios para parqueo, realces en tableros de puentes, rebosaderos en presas, bodegas y losas industriales pesadas (ver la referencia 2.43).

Un requisito esencial para el concreto de alta resistencia es una baja relación agua-cemento. Para concretos normales, ésta está usualmente en el intervalo de 0.40 a 0.60 en peso, en tanto que para mezclas de alta resistencia puede ser tan baja como 0.25 o aún menor. Con el fin de permitir un vaciado adecuado que de otra manera sería una mezcla con cero asentamiento, resultan esenciales los aditivos reductores de agua de amplio rango o "superplastificantes" que pueden aumentar los asentamientos hasta valores de 6 u 8 pulgadas. Otros aditivos incluyen usualmente cenizas volantes y microsílica (ver sección 2.7).

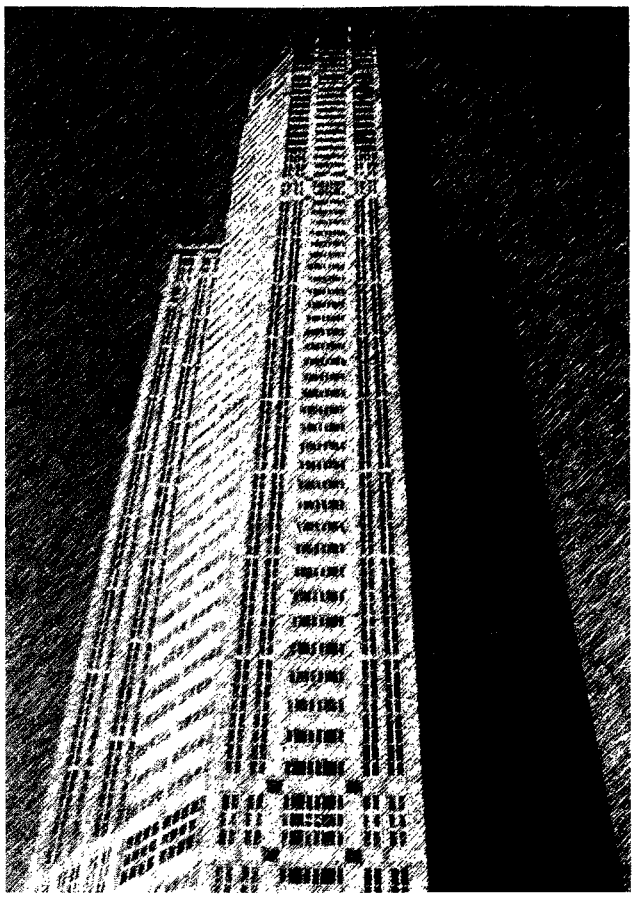


FIGURA 2.10
311 South Wacker Drive en Chicago, actualmente uno de los edificios más altos del mundo. En las columnas de los primeros pisos se utilizó concreto de alta resitencia con $f'_c = 12{,}000$.

Recientemente se ha dedicado mucha investigación al establecimiento de los fundamentos y propiedades de ingeniería de los concretos de alta resistencia, al igual que a las características de ingeniería de los elementos estructurales construidos utilizando este nuevo material (ver las referencias 2.44 a 2.49). En la actualidad existe gran cantidad de información que le permite al ingeniero usar el concreto de alta resistencia con confianza, cuando sus ventajas justifican el alto costo. Las curvas de resistencia a la compresión que se muestran en las figuras 2.3 y 2.4 ilustran diferencias importantes en comparación con el concreto normal, incluyendo un mayor módulo de elasticidad y un rango más extenso de respuesta lineal elástica; las desventajas incluyen comportamiento frágil (ver la figura 2.11) y una capacidad de deformación unitaria última algo reducida. Los coeficientes de flujo plástico son significativamente menores como lo indica la tabla 2.1. La resistencia bajo cargas sostenidas es una fracción mayor de la resistencia estándar del cilindro (ver las referencias 2.25 y 2.26) y la información ahora disponible confirma su durabilidad mejorada y su resistencia a la abrasión (ver las referencias 2.48 y 2.50). Con mayor experiencia en aplicaciones prácticas y con la actualización gradual de los códigos de diseño para reconocer las propiedades del concreto de alta resistencia ahora disponible, se puede esperar un uso mucho más amplio de este tipo de concretos.

2.13 ACEROS DE REFUERZO PARA EL CONCRETO

La resistencia útil tanto a tensión como a compresión de los aceros comunes, es decir, la resistencia a la fluencia, es aproximadamente quince veces la resistencia a la compresión del concreto estructural común y más de 100 veces su resistencia a la tensión. Por otro lado, el acero es un material mucho más costoso que el concreto. De esto resulta que los dos materiales se emplean

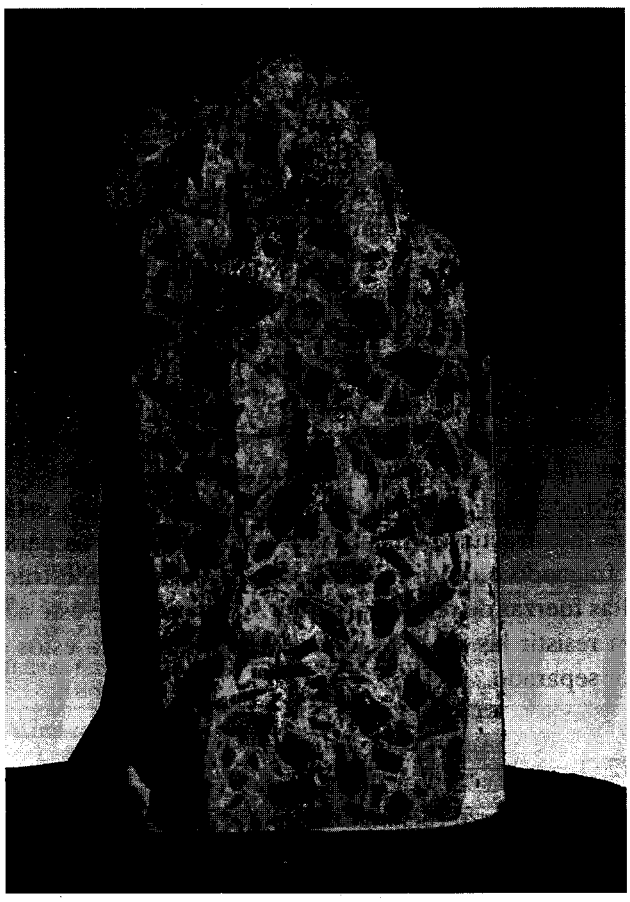


FIGURA 2.11
Cilindro de concreto de alta resistencia para ensayo después de ser sometido a carga uniaxial hasta la falla; nótese la superficie de fractura típicamente lisa, con pocos contactos entre agregado.

mejor en combinación si el concreto se utiliza para resistir los esfuerzos de compresión y el acero los esfuerzos de tensión. De esta manera, en vigas de concreto reforzado, el concreto resiste la fuerza de compresión, barras de acero de refuerzo longitudinal colocadas cerca a la cara de tensión resisten las fuerzas de tensión y barras de acero adicionales resisten los esfuerzos de tensión inclinados causados por las fuerzas cortantes en las vigas. A pesar de esto, el refuerzo también se utiliza para resistir fuerzas de compresión, especialmente cuando se desea reducir la sección transversal de elementos a compresión, como es el caso de las columnas de los primeros pisos de edificios altos. Aún si esta necesidad no existiera, una mínima cantidad de refuerzo se coloca en todos los elementos a compresión para asegurarlos contra el efecto de pequeños momentos flectores accidentales que pueden agrietar y aún producir la falla de un elemento no reforzado.

Para lograr una acción efectiva del refuerzo, es esencial que el acero y el concreto se deformen en forma conjunta, es decir, es necesario que haya una *adherencia* suficientemente fuerte entre los dos materiales para asegurar que no ocurrirán movimientos relativos entre las barras de refuerzo y el concreto circundante. Esta unión se produce por la fuerte *adhesión química* que se desarrolla en la interface acero-concreto, por la *rugosidad natural* de la superficie de las barras de refuerzo laminadas en caliente y por los *resaltes superficiales* poco espaciados que se forman en las barras de refuerzo (barras corrugadas) con el fin de proveer un alto grado de entrelazamiento entre los dos materiales.

Las características adicionales que llevan a un comportamiento conjunto satisfactorio entre el concreto y el acero son las siguientes:

1. Los *coeficientes de expansión térmica* entre los dos materiales, aproximadamente 6.5×10^{-6} °F^{-1} (12×10^{-6} °C^{-1}) para el acero *vs.* un promedio de 5.5×10^{-6} °F^{-1} (10×10^{-6} °C^{-1}) para el

concreto, están suficientemente cerca para no producir agrietamiento y otros efectos no deseables debidos a las deformaciones térmicas diferenciales.

2. En tanto que la *resistencia a la corrosión* del acero descubierto es pobre, el concreto que rodea el acero de refuerzo provee una excelente protección minimizando los problemas de corrosión y los correspondientes costos de mantenimiento.
3. La *resistencia al fuego* del acero desprotegido se ve empeorada por su alta conductividad térmica y por el hecho de que su resistencia disminuye considerablemente a altas temperaturas. Por el contrario, la conductividad térmica del concreto es relativamente baja. De esta manera, los daños producidos por una exposición prolongada al fuego, si es que se presentan, están generalmente limitados a la superficie exterior del concreto y una moderada cantidad de recubrimiento de concreto proporciona suficiente aislamiento térmico al refuerzo embebido.

El acero se utiliza de dos maneras en las estructuras de concreto: como acero de refuerzo y como acero de preesfuerzo. El acero de refuerzo se coloca en las formaletas antes de vaciar el concreto. Los esfuerzos en el acero, al igual que en el concreto endurecido, están causados únicamente por las cargas sobre la estructura, excepto por posibles esfuerzos parásitos generados a partir de la retracción de fraguado o causas similares. En contraste, en estructuras de concreto preesforzado se aplican altas fuerzas de tensión al refuerzo antes de que éste actúe en forma conjunta con el concreto para resistir las cargas externas. Los aceros para estos dos usos son muy diferentes y se discuten por separado.

2.14 BARRAS DE REFUERZO

El tipo más común de acero de refuerzo (distinguiéndolo de los aceros de preesfuerzo) viene en forma de barras circulares llamadas por lo general *varillas* y disponibles en un amplio intervalo de diámetros aproximadamente de $\frac{3}{8}$ hasta $1\frac{3}{8}$ de pulgada para aplicaciones normales y en dos tamaños de barra pesados de aproximadamente $1\frac{3}{4}$ y $2\frac{1}{4}$ de pulgada. Estas barras vienen corrugadas para aumentar la resistencia al deslizamiento entre el acero y el concreto. Los requisitos mínimos para los resaltes superficiales (espaciamiento, proyección, etc). se han determinado mediante investigación experimental. Diferentes fabricantes de barras utilizan diversos patrones, todos los cuales satisfacen estos requisitos. La figura 2.12 muestra diferentes tipos de barras corrugadas.

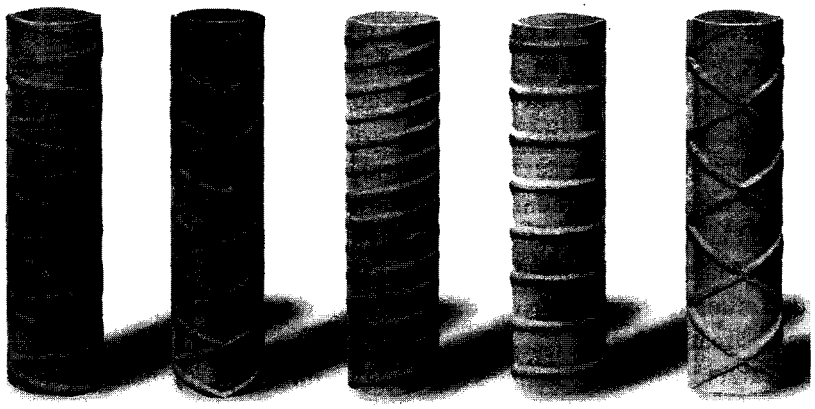


FIGURA 2.12
Tipos de barras de refuerzo corrugadas.

TABLA 2.3
Resumen de requisitos mínimos de resistencia de la ASTM

Producto	Especificación ASMT	Grado o tipo	Resistencia mínima a la fluencia klb/pulg²	Resistencia mínima a la fluencia MPa	Resistencia máxima a la tensión klb/pulg²	Resistencia máxima a la tensión MPa
Barras de refuerzo	A615	Grado 40	40,000	(275)	70,000	(480)
		Grado 60	60,000	(415)	90,000	(620)
		Grado 75	75,000	(515)	100,000	(690)
	A616	Grado 50	50,000	(345)	80,000	(550)
		Grado 60	60,000	(415)	90,000	(620)
	A617	Grado 40	40,000	(275)	70,000	(480)
		Grado 60	60,000	(415)	90,000	(620)
	A706	Grado 60	60,000 [78,000 máximo]	(414) (535)	80,000	(550)[a]
Parrilla de barras corrugadas	A184	Igual que para barras de refuerzo				
Barras recubiertas con zinc	A767	Igual que para barras de refuerzo				
Barras recubiertas con epóxico	A775	Igual que para barras de refuerzo				
Alambre						
Liso	A82		70,000	(480)	80,000	(550)
Corrugado	A496		75,000	(515)	85,000	(585)
Malla electrosoldada de alambrón	A185					
Liso						
W1.2 y mayor			65,000	(450)	75,000	(515)
Menor que W1.2			56,000	(385)	70,000	(480)
Corrugado	A497		70,000	(480)	80,000	(550)
Tendones de preesfuerzo						
Torón de siete alambres	A416	Grado 250 (libres de esfuerzos residuales)	212,500	(1465)	250,000	(1725)
		Grado 250 (baja relajación)	225,500	(1555)	250,000	(1725)
		Grado 270 (libres de esfuerzos residuales)	229,500	(1580)	270,000	(1860)
		Grado 270 (baja relajación)	243,500	(1675)	270,000	(1860)
Alambre	A421	Libres de esfuerzos residuales	199,750 – 212,500	(1375) a (1465)[b]	235,000 – 250,000	(1620) a (1725)[b]
		Baja relajación	211,500 – 225,000	(1455) a (1550)[b]	235,000 – 250,000	(1620) a (1725)[b]
Barras	A722	Tipo liso	127,500	(880)	150,000	(1035)
		Tipo corrugado	120,000	(825)	150,000	(1035)
Torón compacto[c]	A779	Tipo 245	241,900	(1480)	247,000	(1700)
		Tipo 260	228,800	(1575)	263,000	(1810)
		Tipo 270	234,900	(1620)	270,000	(1860)

[a] Pero no menos de 1.25 veces la resistencia a la frecuencia real.
[b] La resistencia mínima depende del tamaño del alambre.
[c] No incluido en el ACI $\frac{3}{8}$.
Fuente: de la referencia 2.51.

Los tamaños de las barras se denominan mediante números, siendo los más usados los números 3 a 11 y l4 y l8 que representan dos barras de tamaño especial tal como se mencionó previamente. La denominación mediante el número en lugar del diámetro se ha adoptado debido a que las estrías superficiales hacen imposible definir un solo valor medido del diámetro. Los números se han organizado de manera que el número de la denominación corresponde muy cercanamente al número de diámetros de $\frac{1}{8}$ de pulgada. Por ejemplo, una barra No. 5 tiene un diámetro nominal de $\frac{5}{8}$ de pulgada. La tabla A.1 del apéndice A presenta las áreas, los perímetros y los pesos de las barras estándar. Las tablas A.2 a A.4 dan información similar para grupos de barras.

a. Grados y resistencias

En concreto reforzado existe una tendencia a largo plazo a la utilización de materiales de alta resistencia tanto para el acero como para el concreto. Las barras de refuerzo con esfuerzos de fluencia de 40 klb/pulg^2, de uso estándar 25 años atrás, han sido remplazadas casi en su totalidad por barras con esfuerzos de fluencia de 60 klb/pulg^2, debido a que éstas últimas son más económicas y tienden a reducir la congestión del acero en las formaletas. Barras con esfuerzos de fluencia de 75 klb/pulg^2 se están utilizando de manera creciente en columnas. En la tabla 2.3 se presentan todos los aceros de refuerzo actualmente disponibles, su grado o denominación, la especificación ASTM que define sus propiedades en detalle (incluyendo deformaciones) y sus dos valores mínimos principales de resistencia especificada. Las barras grado 40 ya no están disponibles en tamaños mayores que el No. 6, las barras grado 50 están disponibles hasta la No. 11 y las barras grado 75 están disponibles en tamaños No. 6 y superior.

La soldadura de barras para hacer empalmes o por conveniencia en la fabricación de entramados de refuerzo para colocación en las formaletas, puede resultar en cambios metalúrgicos que reducen tanto la resistencia como la ductilidad y, por tanto, deben establecerse restricciones especiales sobre el tipo de acero utilizado y el procedimiento de soldadura. Las disposiciones de la ASTM A706 se refieren específicamente a la soldadura.

El Código ACI permite aceros de refuerzo con f_y de hasta 80 klb/pulg^2. Estos aceros de alta resistencia generalmente fluyen en forma gradual pero no tienen una plataforma de fluencia (ver la figura 2.14). Considerando esta situación, se exige que la deformación unitaria total para la resistencia a la fluencia mínima especificada no exceda de 0.0035. Esto es necesario para lograr que los métodos de diseño actuales, que fueron desarrollados para aceros de fluencia repentina con plataformas de fluencia, sean aplicables a estos aceros de alta resistencia. En condiciones especiales, aceros en este rango de altas resistencias tienen su aplicación, por ejemplo, en las columnas de los primeros pisos de edificios altos.

Con el fin de distinguir en forma fácil los diferentes grados y tamaños de las barras, lo cual es necesario para evitar usos accidentales de barras de menor resistencia o menor tamaño que las requeridas en el diseño, todas las barras corrugadas se suministran contramarcadas. Estas marcas identifican la siderúrgica que las produce (usualmente una inicial), el número del tamaño de la barra (3 a 18), el tipo de acero (S para lingote, un signo para rieles de acero; A para aceros usados en ejes y W para acero de baja aleación correspondientes a las especificaciones ASTM A615, A616, A617 y A706, respectivamente) y una marca adicional para identificar los aceros de alta resistencia. Las barras grado 60 tienen una línea longitudinal o el número 60; las barras grado 75 tienen dos líneas longitudinales o el número 75. Las marcas de identificación se muestran en la figura 2.13.

b. Curvas esfuerzo-deformación unitaria

Las dos características numéricas principales que determinan los rasgos de una barra de refuerzo son su *punto de fluencia* (generalmente igual en tensión que en compresión) y su *módulo de elasti-*

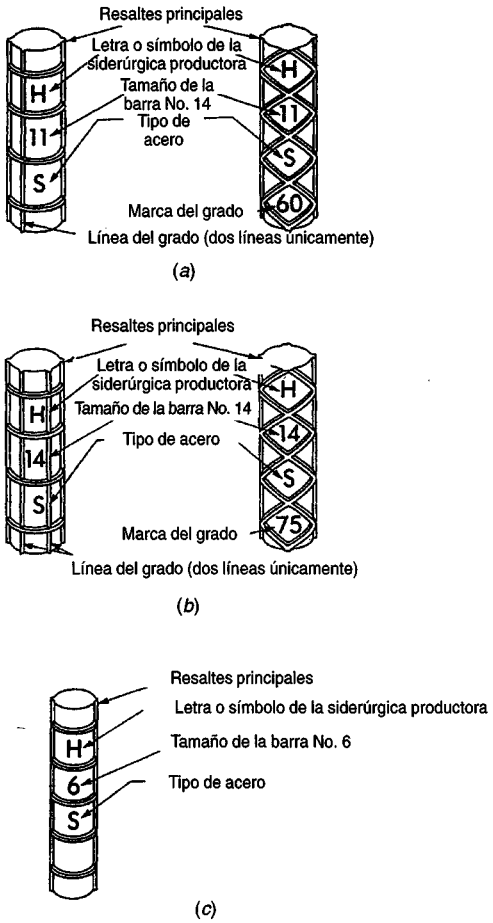


FIGURA 2.13
Sistema de marcas para barras de refuerzo que cumplen las especificaciones ASTM A615, A616, A617 y A706: (*a*) grado 60 y A706; (*b*) grado 75; (*c*) grados 40 y 50 (*adaptado de la referencia 2.39*).

cidad E_s. Éste último es prácticamente el mismo para todos los aceros de refuerzo (pero no para los aceros de preesfuerzo) y se toma como $E_s = 29{,}000{,}000$ lb/pulg^2.

Adicionalmente, la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria, y en particular la del tramo inicial, tiene una influencia significativa en el comportamiento de elementos de concreto reforzado. Las curvas típicas esfuerzo-deformación unitaria de los aceros de refuerzo americanos se muestran en la figura 2.14. Las curvas completas se muestran en la parte izquierda de la figura; en la parte derecha se presentan los tramos iniciales de las curvas magnificados diez veces.

Los aceros con bajo contenido de carbón, tipificados por la curva grado 40, muestran una porción elástica seguida de una *plataforma de fluencia*, es decir, una porción horizontal de la curva donde la deformación unitaria aumenta continuamente bajo esfuerzo constante. Para estos aceros, el punto de fluencia es el esfuerzo para el cual la plataforma de fluencia queda claramente definida. Para deformaciones unitarias mayores, los esfuerzos comienzan a aumentar de nuevo pero a una tasa menor, un proceso que se conoce como *endurecimiento por deformación*. La curva tiende a hacerse horizontal cuando alcanza la *resistencia a la tensión*; ésta comienza a descender hasta que se llega a la rotura. Aceros de alta resistencia y con altos contenidos de carbón, es decir, aquéllos con esfuerzos de fluencia de 60 klb/pulg^2 o mayores, tienen una plataforma de fluencia de mucha menor longitud o inician el endurecimiento por deformación inmediatamente sin que se presente una fluencia continuada a esfuerzo constante. En este último caso, el Código ACI especifica que el esfuerzo de fluencia f_y debe determinarse como el esfuerzo que corresponde a una deformación de 0.0035 pulg/pulg, tal como se muestra en la figura 2.14. Los aceros de baja aleación y alta resistencia rara vez presentan alguna plataforma de fluencia y a menudo entran en endurecimiento por deformación inmediatamente después de iniciada la fluencia.

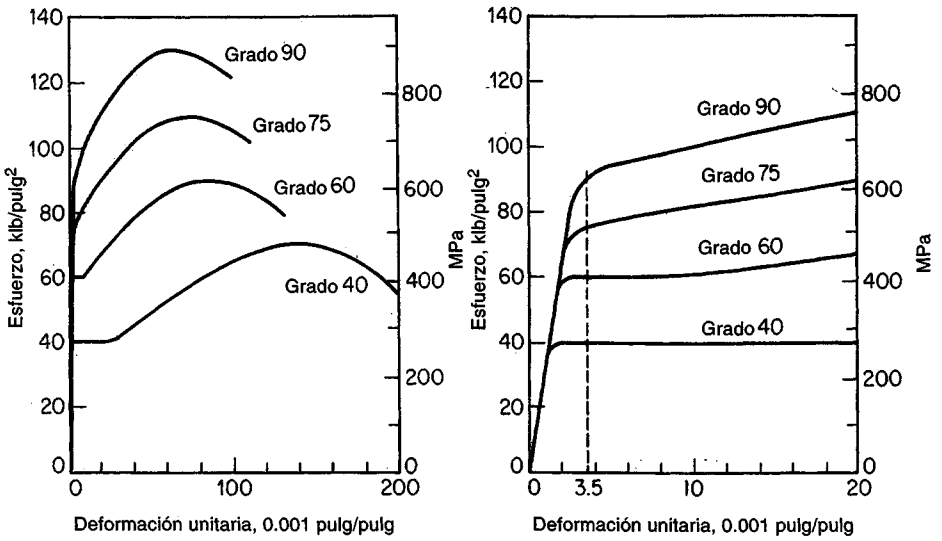


FIGURA 2.14
Curvas típicas esfuerzo-deformación unitarias para barras de preesfuerzo.

c. Resistencia a la fatiga

En puentes vehiculares y en otras situaciones, tanto el acero como el concreto están sometidos a un gran número de ciclos de esfuerzos. Bajo estas condiciones el acero, al igual que el concreto (ver la sección 2.8c), está sujeto a *fatiga*. En la fatiga de metales, una o más fisuras microscópicas se forman después de que un ciclo de esfuerzos se ha repetido un número suficiente de veces. Estas fisuras de fatiga ocurren en puntos de concentración de esfuerzos u otras discontinuidades y aumentan gradualmente con el incremento en el número de ciclos de esfuerzos. Esto reduce el área no fisurada de la sección transversal de la barra hasta que ésta resulta demasiado pequeña para resistir la fuerza aplicada. En este punto, la barra falla de una manera súbita y frágil.

Para barras de refuerzo se ha encontrado (ver las referencias 2.27 y 2.53) que la resistencia a la fatiga, es decir, el esfuerzo para el cual una fluctuación de un esfuerzo dado entre f_{max} y f_{min} puede aplicarse dos millones de veces o más sin que cause falla, es prácticamente independiente del grado del acero. También se ha encontrado que el rango de esfuerzos, es decir, la diferencia algebraica entre el esfuerzo máximo y mínimo, $f_1 = f_{max} - f_{min}$, que puede sostenerse sin falla por fatiga, depende de f_{min}. Adicionalmente, para barras corrugadas el grado de concentración de esfuerzos en los puntos donde los resaltes se unen al cuerpo cilíndrico principal de la barra tiende a reducir el rango seguro de esfuerzos. Esta concentración de esfuerzos depende de la relación r/h, donde r es el radio base de la estría y h su altura. El radio r es el radio de transición desde la superficie de la barra a la del resalte; se trata de un valor relativamente incierto que cambia con el desgaste de los rodillos en la medida que las barras se fabrican.

Con base en muchos ensayos (ver la referencia 2.53) se desarrolló la siguiente fórmula para diseño:

$$f_r = 21 - 0.33 f_{min} + 8\frac{r}{h} \qquad (2.10)$$

donde f_r = rango seguro de esfuerzos, klb/pulg^2
f_{min} = esfuerzo mínimo; positivo si es tensión, negativo si es compresión
r/h = relación entre el radio base y la altura de la estría laminada con rodillo (en la situación común en que r/h no se conozca, se puede utilizar un valor de 0.3)

Cuando las barras estén expuestas a regímenes de fatiga, deben evitarse las concentraciones de esfuerzos como las producidas por soldaduras o doblamientos bruscos, ya que éstos pueden afectar la resistencia a la fatiga.

d. Barras de refuerzo revestidas

A menudo se especifican barras de refuerzo galvanizadas o revestidas con sustancias epóxicas con el fin de minimizar la corrosión del refuerzo y el consecuente descascaramiento del concreto bajo condiciones ambientales severas, tales como tableros de puentes o estacionamientos sometidos a la acción de productos químicos para descongelamiento, puertos y estructuras marítimas y plantas de tratamiento de aguas residuales (ver las referencias 2.52, 2.54 y 2.55).

La norma ASTM A767, "Standard Specification for Zinc-Coated (Galvanized) Steel Bars for Concrete Reinforcement", incluye requisitos para los materiales de revestimiento en zinc, el proceso de galvanización, la clase o peso del revestimiento, el terminado y la adherencia del revestimiento y el método de fabricación. Las barras se galvanizan usualmente después del proceso de corte y doblamiento. Se establecen requisitos complementarios con referencia al revestimiento de bordes recortados y a la reparación de revestimientos dañados cuando las barras se fabrican después del proceso de galvanización.

Las barras revestidas con sustancias epóxicas, más utilizadas en la actualidad que las barras galvanizadas, están reguladas por la norma ASTM A775, "Standard Specification for Epoxy-Coated Reinforcing Steel Bars", la cual incluye requisitos para el material de revestimiento, la preparación de la superficie antes del revestimiento, el método de aplicación y los límites de espesor del revestimiento, y por la norma ASTM A 934, "Standard Specification for Epoxy-Coated Prefabricated Steel Reinforcing Bars". Típicamente, el revestimiento se aplica a las barras rectas en una operación en la línea de producción, y las barras se cortan y doblan después del revestimiento. Los bordes recortados y pequeños puntos con revestimiento defectuoso pueden repararse satisfactoriamente después de la fabricación. En la obra debe tenerse especial cuidado para evitar daños sobre el revestimiento, ya sea durante el envío o durante la colocación, y para realizar efectivamente las reparaciones que se requieran.

2.15 MALLAS ELECTROSOLDADAS DE ALAMBRÓN

Además de las barras de refuerzo simples se utilizan las *mallas electrosoldadas de alambrón* para reforzar losas y otras superficies, tales como cascarones, y para reforzar a cortante el alma de vigas delgadas, particularmente en vigas preesforzadas. El refuerzo con alambrones soldados consta de un conjunto de alambrones de acero estruidos en frío, longitudinales y transversales a ángulos rectos el uno del otro, y soldados entre sí en todos los puntos de intersección. El tamaño y espaciamiento de los alambrones puede ser el mismo en las dos direcciones o puede ser diferente dependiendo de los requisitos del diseño.

La nomenclatura convencional utilizada para describir el tipo y el tamaño de las mallas electrosoldadas de alambrón utiliza una combinación de letras y números. La ASTM utiliza la letra "W" para indicar alambrón liso y la letra "D" para describir alambrón corrugado. El número que sigue a la letra indica el área de la sección transversal del alambrón en centésimas de pulgada cuadrada. Por ejemplo, un alambrón W5.0 es un alambre liso con un área de la sección transversal igual a 0.05 pulg^2. Un alambrón W5.5 tiene un área de 0.055 pulg^2. D6.0 indica un alambrón corrugado con un área de 0.06 pulg^2. Una malla electrosoldada de alambrón con una designación 4 × 4 – W5.0 × W5.0, indica un espaciamiento de los alambrones de 4 pulg en cada dirección con alambrones lisos con área de sección transversal de 0.05 pulg^2 en cada dirección. Los tamaños y espaciamientos de los alambrones para los tipos más comunes de mallas electrosoldadas de este material y las áreas de las secciones transversales de acero por pie, al igual que el peso para 100 pie^2, se muestran en la tabla A.13 del apéndice A.

Las especificaciones ASTM A185 y A497 se refieren a mallas electrosoldadas de alambrón liso y corrugado respectivamente como se muestra en la tabla 2.3. Debido a que los esfuerzos de fluencia indicados se especifican a una deformación unitaria de 0.005, el Código ACI exige que f_y se tome igual a 60 klb/pulg^2 a menos que el esfuerzo se utilice a una deformación unitaria de 0.0035.

2.16 ACEROS DE PREESFUERZO

Los aceros de preesfuerzo se utilizan en tres formas diferentes: alambrones de sección circular, torones y barras de acero aleado. Los alambrones para preesfuerzo varían en diámetros desde 0.192 hasta 0.276 pulgadas; se fabrican mediante extrusión en frío de aceros con alto contenido de carbón, después de lo cual el alambrón se somete a un proceso de revenido en caliente para producir las propiedades mecánicas prescritas. Los alambrones se entrelazan en grupos de hasta aproximadamente 50 alambrones individuales para producir los tendones de preesfuerzo con la resistencia exigida. Los torones, más comunes que los alambrones en la práctica de los Estados Unidos, se fabrican usando seis alambrones enrollados alrededor de un séptimo cuyo diámetro es ligeramente mayor; el paso de la vuelta de la espiral está entre 12 y 16 veces el diámetro nominal del torón. Los diámetros de los torones varían desde 0.25 hasta 0.6 pulgadas. Las barras de acero aleado para preesfuerzo están disponibles en diámetros desde 0.75 hasta 1.375 pulgadas, usualmente como barras lisas circulares. Se pueden encontrar requisitos especiales para aceros de preesfuerzo en la norma ASTM A421, "Standard Specification for Uncoated Stress-Relieved Steel Wire for Prestressed Concrete", en la norma ASTM A416, "Standard Specification for Steel Strand, Uncoated Seven-Wire Stress-Relieved for Prestressed Concrete" y en la norma ASTM A722 "Standard Specification for Uncoated High-Strength Steel Bar for Prestressing Concrete". La tabla A.16 del apéndice A proporciona información de diseño relacionada con aceros de preesfuerzo en los Estados Unidos.

a. Grados y resistencias

Las resistencias a la tensión de los aceros de preesfuerzo varían desde aproximadamente 2.5 hasta seis veces el valor de la resistencia a la fluencia de las barras comunes. La designación del grado corresponde a la mínima resistencia a la tensión última especificada en klb/pulg^2. El torón de siete alambrones, ampliamente utilizado para preesfuerzo, está disponible en dos grados: grado 250 (f_{pu} = 250 klb/pulg^2) y grado 270. El torón de alta resistencia, grado 270, está desplazando gradualmente al torón de resistencia ligeramente menor. Para barras de acero aleado se utilizan dos grados: el grado regular 145 que es el más común, pero también pueden ordenarse barras con grado especial 160. Los alambrones de sección circular pueden obtenerse en grados 235, 240 y 250 dependiendo del diámetro.

b. Curvas esfuerzo-deformación

En la figura 2.15 se presentan las curvas esfuerzo-deformación unitaria para los alambrones de preesfuerzo, los torones y las barras de acero aleado de varios grados. Para efectos de comparación también se muestra la curva esfuerzo-deformación unitaria para una barra de grado 60. Como se puede observar, en contraste con las barras de refuerzo, los aceros de preesfuerzo no muestran un punto de fluencia definido o plataforma de fluencia; es decir, ellos no fluyen bajo esfuerzos constantes o prácticamente constantes. La fluencia se desarrolla gradualmente y la curva continúa aumentando poco a poco en el rango inelástico hasta que se alcanza la resistencia a la tensión. Debido a que en estos aceros no se presenta una fluencia bien definida, la resistencia a la fluencia se define en forma algo arbitraria como el esfuerzo para el cual la elongación total es del uno por ciento para torones y alambrones, y del 0.7 por ciento para barras de acero aleado. La figura 2.15

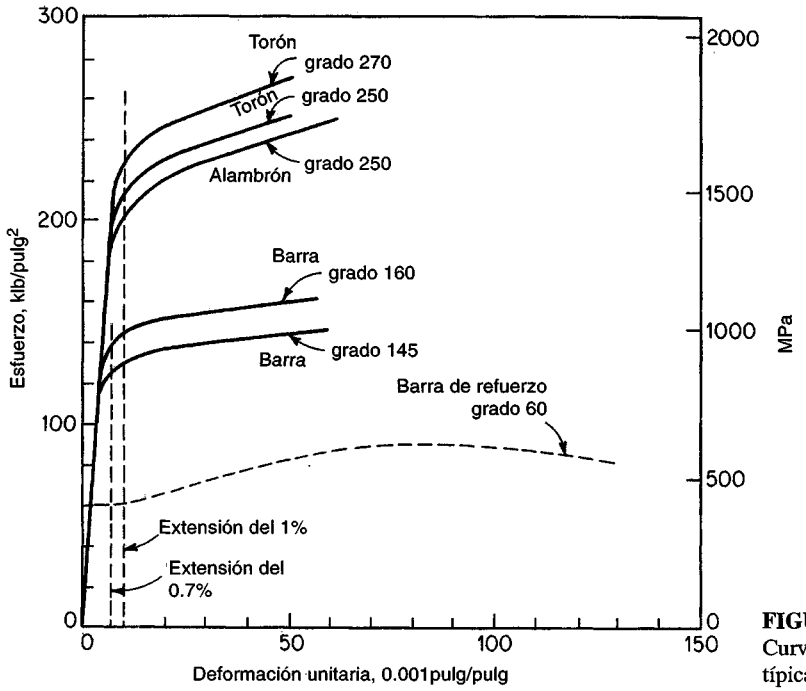


FIGURA 2.15
Curva esfuerzo-deformación unitaria típica de aceros de preesfuerzo.

muestra que la resistencia a la fluencia definida de esta manera representa un buen límite por debajo del cual el esfuerzo y la deformación unitaria son más o menos proporcionales y por encima del cual las deformaciones aumentan de manera mucho más rápida con el incremento en el esfuerzo. Puede verse que el margen entre la resistencia a la tensión y la resistencia a la fluencia es menor en los aceros de preesfuerzo que en los aceros de refuerzo. También se observa que los aceros de preesfuerzo tienen una ductilidad significativamente menor.

Mientras que el módulo de elasticidad E_s para barras de refuerzo puede tomarse con 29,000,000 lb/pulg^2, el módulo efectivo para aceros de preesfuerzo varía según el tipo de acero (es decir, torones *vs.* alambrones o barras) y según el tipo de uso, y se determina preferiblemente mediante ensayos o datos suministrados por el fabricante. Para torones no adheridos (es decir, torones no embebidos en concreto), el módulo puede ser tan bajo como 26,000,000 lb/pulg^2. Para torones adheridos, E_s está usualmente alrededor de 27,000,000 lb/pulg^2, mientras que para alambrones lisos de sección circular E_s es aproximadamente 29,000,000 lb/pulg^2, el mismo valor que para las barras. El módulo elástico para barras de acero en aleación se toma comúnmente como E_s = 27,000,000 lb/pulg^2.

c. Relajación

Cuando el acero de preesfuerzo se tensiona a los niveles que son usuales durante el tensionamiento inicial y en condiciones de carga de servicio, se presenta una propiedad conocida como *relajación*. La relajación se define como la pérdida del esfuerzo en un material sometido a esfuerzo y mantenido en longitud constante (el mismo fenómeno básico se conoce como flujo plástico, cuando se define en términos de cambio en la deformación unitaria de un material sometido a esfuerzo constante). En forma específica, si una longitud de acero de preesfuerzo se somete a un esfuerzo equivalente a una fracción considerable de su resistencia a la fluencia f_{py} (por ejemplo al 80 ó 90 por ciento) y se mantiene a deformación constante entre puntos fijos, tales como los bordes de la viga, el esfuerzo en el acero f_p decrecerá gradualmente desde su valor inicial f_{pi}. Para elementos de concreto preesforzado esta relajación de esfuerzos es importante ya que modifica los esfuerzos internos en el concreto y cambia las deflexiones de la viga un tiempo después de que se aplica el esfuerzo inicial.

La cantidad de relajación varía dependiendo del tipo y grado del acero, del tiempo bajo carga y del nivel de esfuerzo inicial. Un estimativo satisfactorio para torones y alambrones comunes puede obtenerse a partir de la ecuación 2.11, que se desarrolló con base en más de 400 ensayos de relajación efectuados durante nueve años:

$$\frac{f_p}{f_{pi}} = 1 - \frac{\log t}{10}\left(\frac{f_p}{f_{py}} - 0.55\right) \tag{2.11}$$

donde f_p es el esfuerzo final después de t horas, f_{pi} es el esfuerzo inicial y f_{py} es el esfuerzo a la fluencia nominal (ver la referencia 2.56). En la ecuación 2.11, $\log t$ está en base 10 y f_{pi}/f_{py} no debe ser menor que 0.55; por debajo de este valor, prácticamente no ocurre relajación.

Los ensayos que sirvieron de base para la ecuación 2.11 se realizaron sobre alambrones de sección circular libres de esfuerzos residuales y se aplican igualmente a torones libres de esfuerzos residuales. Ante la ausencia de información adicional, estos resultados pueden aplicarse también a barras de acero en aleación.

En la actualidad existen torones especiales de baja relajación y su uso se vuelve cada vez más común. De acuerdo con la norma ASTM A416, tales aceros deben exhibir una relajación de no más de 2.5 por ciento después de 1000 horas, cuando se han sometido a esfuerzos iniciales hasta del 70 por ciento de la resistencia especificada a la tensión y no mayor que el 3.5 por ciento cuando se han sometido a carga hasta el 80 por ciento de su resistencia a la tensión.

REFERENCIAS

2.1. "Guide for Use of Normal Weight Aggregate in Concrete", ACI Committee 221, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 1, 1995.

2.2. "Guide for Structural Lightweight Aggregate Concrete", ACI Committee 213, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 1, 1995.

2.3. T. T. C. Hsu and F. O. Slate, "Tensile Bond Strength between Aggregate and Cement Paste or Mortar", *J. ACI*, vol. 60, no. 4, 1963, pp. 465-486.

2.4. G. E. Troxell, H. E. Davis, and J. W. Kelly, *Composition and Properties of Concrete*, 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1968.

2.5. "Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete", ACI Committee 211, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 1, 1995.

2.6. "Standard Practice for Selecting Proportions for Structural Lightweight Concrete", ACI Committee 211, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 1, 1995.

2.7. *Design and Control of Concrete Mixtures*, 13th ed., Portland Cement Association, Skokie, IL, 1994.

2.8. "Guide for Consolidation of Concrete", ACI Committee 304, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 2, 1995.

2.9. "Guide for Measuring, Transporting, and Placing Concrete", ACI Committee 304, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 2, 1995.

2.10. "Cold Weather Concrete", ACI Committee 306, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 2, 1995.

2.11. "Recommended Practice for Evaluation of Strength Test Results of Concrete", *ACI* Committee 214, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 2, 1995.

2.12. "Chemical Admixtures for Concrete", ACI Committee 212, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 1, 1995.

2.13. "K. C. Hover, "Why Is There Air in Concrete?", *Concrete Construction*, vol. 38, no. 1, 1993, pp. 11-15.

2.14. "Guide for the Use of High-Range Water-Reducing Admixtures (Superplasticizers) in Concrete", ACI Committee 212, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 1, 1995.

2.15. A. A. Ramezanianpour, V. Sivasundaram, and V. M. Malhotra, "Superplasicizers: Their Effect on the Strength Properties of Concrete", *Concrete International*, vol. 17, no. 4, pp. 30-35.

2.16. V. M. Malhotra, "Fly Ash, Silica Fume, and Rice-Husk Ash in Concrete: A Review", *Concrete International*, vol. 15, no. 4, 1993, pp. 23-28.

2.17. G. Detwiler, "High-Strength Silica Fume Concrete—Chicago Style", *Concrete International*, vol. 14, no. 10, 1992, pp. 32-36.

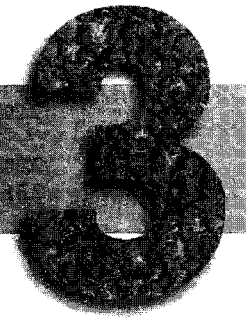
2.18. R. L. I. Carrasquillo, A. H. Nilson, and F. O. Slate, "Properties of High Strength Concrete Subject to Short Term Loads", *J. ACI*, vol. 78, no. 3, 1981, pp. 171-178.

2.19. F. O. Slate, A. H. Nilson, and S. Martinez, "Mechanical Properties of High-Strenght Lightweight Concrete", *J. ACI*, vol. 83, no. 4, 1986, pp. 606-613.

2.20. P. T. Wang, S. P. Shah, and A. E. Naaman, "Stress-Strain Curves of Normal and Lightweight Concrete in Compression", *J. ACI*, vol. 75, no. 11, 1978, pp. 603-611.

2.21. D. E. Branson, *Deformation of Concrete Structures,* McGraw-Hill, New York, 1977.
2.22. H. Rüsch, "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete", *J. ACI*, vol. 32, no. 1, 1960, pp. 1-28.
2.23. P. K. Mehta, *Concrete: Structure, Properties, and Materials,* Prentice Hall, Englewood Clifs, NJ, 1986.
2.24. A. M. Neville, *Properties of Concrete,* 3d ed., Pittman, Marshfield, MA, 1981.
2.25. M. M. Smadi, F. O. Slate, and A. H. Nilson, "High-, Medium-, Low-Strength Concretes Subject to Sustained Overloads", *J. ACI*, vol. 82, no. 5, 1985, pp. 657-664.
2.26. M. M. Smadi, F. O. Slate, and A. H. Nilson, "Shrinkage and Creep of High-, Medium, and Low-Strength Concretes, Including Overloads", *ACI Mater, J.,* vol. 84, no. 3, 1987, pp. 224-234.
2.27. "Fatigue of Concrete Structures", Special Publication SP-75, American Concrete Institute, Detroit, 1982.
2.28. S. Timoshenko, *Strength of Materials,* Part II, 3rd ed., Van Nostrand, Princeton, NJ, 1956.
2.29. D. McHenry and J. Karni, "Strength of Concrete under Combined Tensile and Compressive Stress", *J. ACI*, vol. 54, no. 10, pp. 829-840.
2.30. B. Bresler and K. S. Pister, "Strength of Concrete under Combined Stress", *J. ACI*, vol. 55, no. 3, 1958, pp. 321-345.
2.31. H. J. Cowan, "The Strength of Plain, Reinforced and Prestressed Concrete under the Action of Combined Stresses", *Mag. Concr. Res.*, vol. 5, no. 14, 1953, pp. 75-86.
2.32. N. J. Carino and F. O. Slate, "Limiting Tensile Strain Criterios for Failure of Concrete", *J. ACI*, vol. 73, no. 3, March 1976, pp. 160-165.
2.33. *Fracture Mechanics: Application to Concrete,* Special Publication SP-118, American Concrete Institute, Detroit, 1989, 308 pp.
2.34. T. T. C. Hsu, F. O. Slate, G. M. Sturman, and G. Winter, "Microcracking of Plain Concrete and the Shape of the Stress-Strain Curve", *J. ACI*, vol. 60, no. 2, 1963, pp. 209-224.
2.35. H. Kupfer, H. K. Hilsdorf, and H. Rüsch, "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses", *J. ACI*, vol. 66, no. 8, 1969, pp. 656-666.
2.36. M. E. Tasuji, F. O. Slate, and A. H. Nilson, "Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading", *J. ACI*, vol. 75, no. 7, 1978, pp. 306-312.
2.37. K. H. Gerstle, D. H. Linse, *et al.*, "Strength of Concrete under Multiaxial Stress States", *Proc. Douglas McHenry International Symposium on Concrete and Concrete Structures,* ACI Special Publication SP-55, American Concrete Institute, 1978, pp. 103-131.
2.38. "Standard Practice for the Use of Shrinkage-Compesating Cements", ACI Committee 223, *ACI Manual of Concrete Practice,* Part 1, 1995.
2.39. A. Neville, "Whither Expansive Cement", *Concrete International,* vol. 16, no. 9, 1994, pp. 34-35.
2.40. "State-of-the-Art Report on High-Strength Concrete", ACI Committee 363, *ACI Manual of Concrete Practice,* Part 1, 1995.
2.41. S. P. Shah and S. H. Ahmad (eds)., *High-Performance Concrete: Properties and Applications,* McGraw-Hill, New York, 1994.
2.42. J. Kelsey, "World's Tallest RC Building Completed in Record Time", *Concrete International,* vol. 15, no. 12, pp. 46-48.
2.43. H. G. Russell, S. H. Gebler, and D. Whiting, "High-Strength Concrete: Weighing the Benefits", *Civil Engineering,* vol. 59, no. 11, 1989, pp. 59-61.
2.44. A. H. Nilson, "High-Strength Concrete—An Overview of Cornell Research", *Proceedings of Symposium on Utilization of High-Strength Concrete,* Stavanger, Norway, 1987, pp. 27-38.
2.45. A. H. Nilson, "Properties and Performance of High-Strengh Concrete", *Proceedings of IABSE Symposium on Concrete Structures for the Future,* París-Versailles, 1987, pp. 389-394.
2.46. A. H. Nilson, "Design Implications of Current Research on High-Strength Concrete", *High-Strength Concrete,* Special Publication SP-87, American Concrete Institute, Detroit, 1985, pp. 85-118.
2.47. K. A. Paulson, A. H. Nilson, and K. C. Hover, "Long-Term Deflection of High-Strength Concrete Beams", *ACI Materials Journal,* vol. 88, no. 2, 1991, pp. 197-206.
2.48. A. E. Fiorato, "PCA Research on High-Strength Concrete", *Concrete International,* vol. 11, no. 4, 1989, pp. 44-50.
2.49. N. J. Carino and J. R. Clifton, "High Performance Concrete: Research Needs to Enhance Its Use", *Concrete International,* vol. 13, no. 9, 1991, pp. 70-76.
2.50. D. Whiting, "Durability of High-Strength Concrete", *Proceedings of Katharine and Bryant Mather International Conference,* Special Publication SP-100, American Concrete Institute, Detroit, 1987, pp. 169-186.
2.51. "Steel Reinforcement—Physical Properties and U. S. Availability", ACI Committee 439, *ACI Manual of Concrete Practice,* Part 3, 1995.
2.52. *Manual of Standard Practice,* 25th ed., Concrete Reinforcing Steel Institute, Schaumburg, IL, 1990.
2.53. W. G. Corley, J. M. Hanson, and T. Helgason, "Design of Reinforced Concrete for Fatigue", *J. of Struct. Div.,* ASCE, vol. 104, no. ST6, 1978, pp. 921-932.

CAPÍTULO



ANÁLISIS Y DISEÑO A FLEXIÓN DE VIGAS

3.1 INTRODUCCIÓN

Los supuestos fundamentales en los cuales se basa el análisis y diseño de elementos de concreto reforzado se mencionaron en la sección 1.8 del capítulo 1, y su aplicación al caso simple de carga axial se desarrolló en la sección 1.9. En este punto, es recomendable que el estudiante repase dichas secciones. En este capítulo se aplicarán los mismos supuestos y se utilizarán conceptos idénticos en el desarrollo de los métodos para análisis y diseño de vigas. Esta parte tratará el análisis y el diseño a flexión, e incluye la medición de las secciones transversales de concreto, y la selección y ubicación del acero de refuerzo. Otros aspectos importantes en el diseño de vigas, que comprenden el refuerzo a cortante, la adherencia, el anclaje de las barras de refuerzo y los asuntos concernientes al funcionamiento (es decir, los límites en las deflexiones y el control del agrietamiento del concreto) se analizarán en los capítulos 4, 5 y 6.

3.2 FLEXIÓN DE VIGAS HOMOGÉNEAS

Las vigas de concreto reforzado no son homogéneas debido a que están hechas de dos materiales diferentes. Por consiguiente, los métodos usados en el análisis de vigas de concreto reforzado son distintos de aquéllos utilizados en el diseño o investigación de vigas elaboradas completamente de acero, madera o cualquier otro material estructural. Sin embargo, los principios fundamentales que los comprenden son esencialmente los mismos. En resumen, estos principios son:

En cualquier sección transversal existen fuerzas internas que pueden descomponerse en fuerzas normales y tangenciales a la sección. Las componentes normales a la sección son los esfuerzos de *flexión* (tensión en un lado del eje neutro y compresión en el otro); su función es la de resistir el momento flector que actúa en la sección. Las componentes tangenciales se conocen como esfuerzos *cortantes* que resisten las fuerzas transversales o cortantes.

Los supuestos fundamentales relacionados con la flexión y con el cortante por flexión son los siguientes:

1. Una sección transversal plana antes de la aplicación de las cargas permanece igual al someterla a carga. Esto significa que las deformaciones unitarias en la viga, por encima y por debajo del eje neutro, son proporcionales a la distancia desde este eje.
2. El esfuerzo de flexión f en cualquier punto depende de la deformación unitaria en aquel punto, de la misma manera que en el diagrama esfuerzo-deformación unitaria del material. Si la viga está hecha de un

material homogéneo cuyo diagrama esfuerzo-deformación unitaria en tensión y en compresión es como el que aparece en la figura 3.1*a*, puede afirmarse lo siguiente: si la deformación unitaria máxima en la fibra exterior es menor que la deformación unitaria e ϵ_p, hasta la cual los esfuerzos y deformaciones son proporcionales para determinado material, los esfuerzos de compresión y tensión en cualquier lado del eje son proporcionales a la distancia desde el eje, como aparece en la figura 3.1 *b*. Sin embargo, si la deformación unitaria máxima en las fibras exteriores es mayor que ϵ_p, lo anterior ya no es válido. El resultado es el que aparece en la figura 3.1*c*, es decir, en las porciones exteriores de la viga, donde $\epsilon > \epsilon_p$, los esfuerzos y deformaciones unitarias ya no son proporcionales. En estas zonas, la magnitud del esfuerzo para cualquier nivel, como f_2 en la figura 3.1*c*, depende de la deformación unitaria ϵ_2 a este nivel, de acuerdo con lo dado por el diagrama esfuerzo-deformación unitaria del material. En otras palabras, para determinada deformación unitaria en la viga, el esfuerzo en un punto es el mismo del diagrama esfuerzo-deformación unitaria correspondiente a la misma deformación unitaria.

3. La distribución de los esfuerzos cortantes v en la altura de la sección depende de la forma de la sección transversal y del diagrama esfuerzo-deformación unitaria. Estos esfuerzos cortantes son máximos en el eje neutro e iguales a cero en las fibras exteriores. Los esfuerzos cortantes en planos horizontales y verticales a través de cualquier punto son iguales.
4. Debido a la acción combinada de los esfuerzos cortantes (horizontal y vertical) y de los esfuerzos de flexión, se presentan esfuerzos inclinados de tensión y compresión en cualquier punto de la viga, de los cuales el mayor forma un ángulo de 90° con el otro. La magnitud del máximo esfuerzo inclinado o esfuerzo principal en cualquier punto está dada por

$$t = \frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} + v^2} \tag{3.1}$$

donde f = magnitud del esfuerzo normal en la fibra
v = magnitud de los esfuerzos cortantes tangenciales

El esfuerzo inclinado forma un ángulo α con la horizontal tal que $\tan 2\alpha = 2v/f$.

5. Puesto que en el plano neutro los esfuerzos cortantes horizontales y verticales son iguales entre sí, y los esfuerzos de flexión son iguales a cero, los esfuerzos inclinados de tensión y compresión

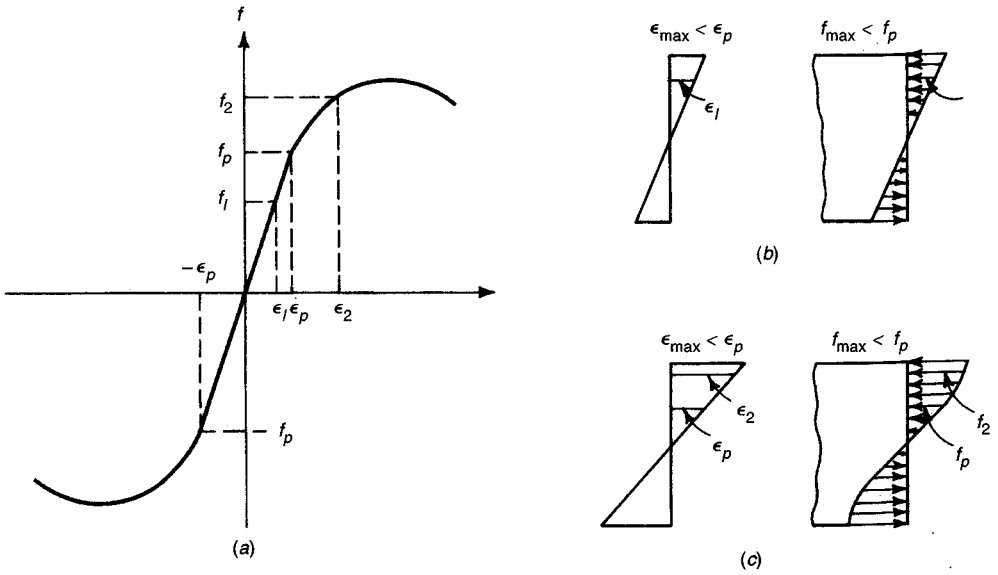


FIGURA 3.1
Distribución de esfuerzos elásticos e inelásticos en vigas homogéneas.

en cualquier punto de este plano forman un ángulo de 45° (con la horizontal, donde la intensidad de cada uno de ellos es igual al valor del esfuerzo cortante unitario en el punto.

6. Cuando los esfuerzos en las fibras exteriores son menores que el límite de proporcionalidad f_p, la viga se comporta *elásticamente* como aparece en la figura 3.1*b*. En este caso puede afirmarse que:
   (*a*) El eje neutro pasa a través del centro de gravedad de la sección transversal.
   (*b*) La magnitud de los esfuerzos de flexión normales a la sección aumenta directamente con la distancia desde el eje neutro y es máxima en las fibras extremas. El esfuerzo en cualquier punto de la sección transversal está representado por la ecuación

$$f = \frac{My}{I} \tag{3.2}$$

donde f = esfuerzo de flexión a una distancia y medida desde el eje neutro
M = momento flector externo en la sección
I = momento de inercia de la sección transversal con respecto al del eje neutro

El esfuerzo de flexión máximo ocurre en las fibras exteriores y es igual a

$$f_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} \tag{3.3}$$

donde c = distancia desde el eje neutro hasta la fibra exterior
$S = I/c$ = módulo elástico de la sección transversal

   (*c*) El esfuerzo cortante (el longitudinal igual al transversal) v en cualquier punto de la sección transversal está dado por

$$v = \frac{VQ}{Ib} \tag{3.4}$$

donde V = cortante total en la sección
Q = momento estático con respecto al eje neutro de aquella porción de la sección transversal ubicada entre una línea que pasa por el punto en cuestión, paralela al eje neutro, y la cara más cercana de la viga (superior o inferior)
I = momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro
b = ancho de la viga en determinado punto

   (*d*) La intensidad del esfuerzo cortante a través de una sección transversal vertical en una viga rectangular varía de acuerdo con la forma de las ordenadas de una parábola, donde la intensidad es cero en las fibras exteriores de la viga y máxima en el eje neutro. El valor máximo es $\frac{3}{2}V/ba$, ya que en el eje neutro $Q = ba^2/8$ y $I = ba^3/12$ en la ecuación (3.4).

El resto de este capítulo se refiere únicamente a esfuerzos de flexión y sus efectos sobre vigas de concreto reforzado. Los esfuerzos cortantes y sus efectos se analizan en forma separada en el capítulo 4.

3.3 COMPORTAMIENTO DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

Las vigas de concreto simple son ineficientes como elementos sometidos a flexión debido a que la resistencia a la tensión en flexión (módulo de rotura, ver la sección 2.9) es una pequeña fracción de la resistencia a la compresión. En consecuencia, estas vigas fallan en el lado sometido a tensión a cargas bajas mucho antes de que se desarrolle la resistencia completa del concreto en el lado de

compresión. Por esta razón se colocan barras de acero de refuerzo en el lado sometido a tensión tan cerca como sea posible del extremo de la fibra sometida a tensión, conservando en todo caso una protección adecuada del acero contra el fuego y la corrosión. En una viga de concreto así reforzada, el acero de refuerzo resiste la tensión causada por los momentos flectores, mientras que el concreto usualmente es capaz de resistir sólo la compresión correspondiente. Esta acción conjunta de los dos materiales se garantiza si se impide su deslizamiento relativo, lo que logra mediante la utilización de barras corrugadas con su alta resistencia por adherencia en la interfase acero-concreto (ver la sección 2.13) y, si es necesario, mediante anclajes especiales en los extremos de las barras. En la figura 3.2 se presenta un ejemplo sencillo de una viga reforzada de esta manera y se indica la nomenclatura usual para las dimensiones de la sección transversal. Para simplificar, el análisis que sigue se relaciona únicamente con vigas de sección transversal rectangular, aunque en la mayor parte de las estructuras de concreto son muy comunes los elementos con otras formas.

Cuando la carga en dicha viga se incrementa de modo gradual desde cero hasta la magnitud que producirá su falla, claramente pueden distinguirse diferentes estados en su comportamiento. Para cargas bajas, mientras que el máximo esfuerzo de tensión en el concreto sea menor que el módulo de rotura, todo el concreto resulta efectivo para resistir los esfuerzos de compresión a un lado y de tensión al otro costado del eje neutro. Además, el refuerzo, que deforma la misma cantidad que el concreto adyacente, también está sometido a esfuerzos de tensión. En esta etapa, todos los esfuerzos en el concreto son de pequeña magnitud y proporcionales a las deformaciones. La distribución de las deformaciones unitarias y de los esfuerzos en el acero y en el concreto en la altura de la sección aparece en la figura 3.2*c*.

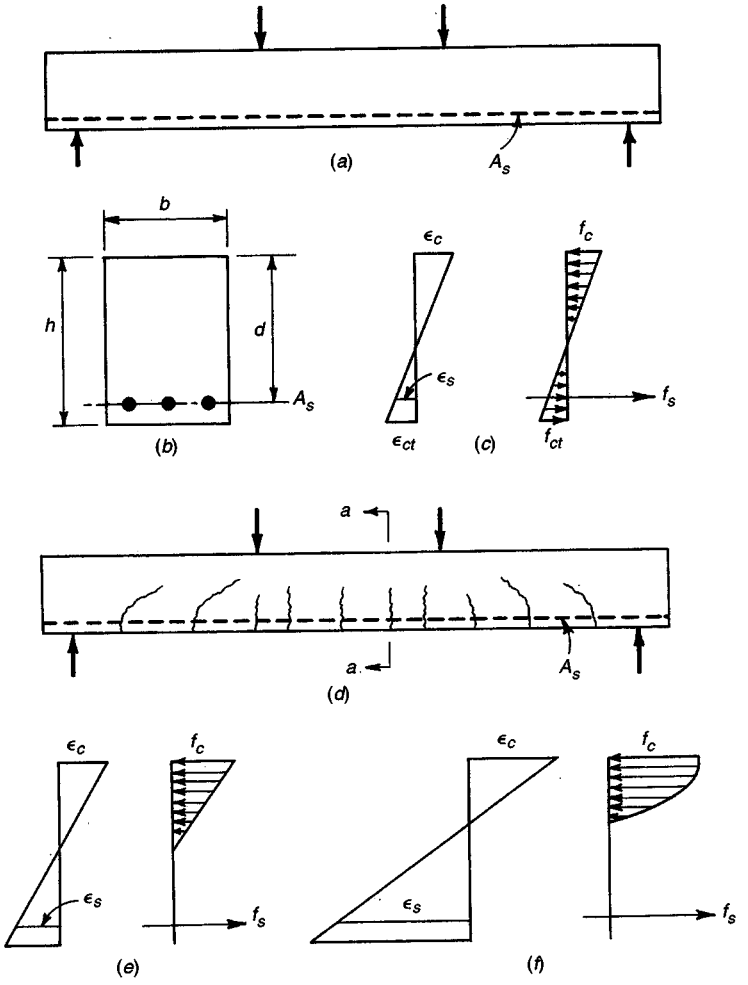


FIGURA 3.2
Comportamiento de vigas de concreto reforzado ante carga creciente.

Cuando la carga se aumenta un poco más, pronto se alcanza la resistencia a la tensión del concreto y en esta etapa se desarrollan las grietas de tensión. Éstas se propagan con rapidez hacia arriba y muy cerca del nivel del plano neutro, que a su vez se desplaza hacia arriba con agrietamiento progresivo. La forma general y la distribución de estas grietas de tensión aparecen en la figura 3.2*d*. En vigas bien diseñadas la amplitud de estas grietas es tan pequeña (grietas capilares) que no tienen objeción desde el punto de vista de la protección contra la corrosión o de la apariencia. Su presencia, sin embargo, afecta profundamente el comportamiento de la viga sometida a carga. Evidentemente, en una sección fisurada, es decir, en una sección transversal localizada en una grieta como la sección *a-a* en la figura 3.2*d*, el concreto no transmite ningún esfuerzo de tensión; de ahí que, al igual que en los elementos sometidos a tensión (ver la sección 1.9*b*), al acero le corresponde resistir toda la tensión. Para cargas moderadas, si el esfuerzo en el concreto no excede aproximadamente $f'_c/2$, los esfuerzos y las deformaciones unitarias continúan siendo proporcionales (ver la figura 1.15). La distribución de deformaciones unitarias y esfuerzos en la sección fisurada o cerca de ella es, en consecuencia, la que aparece en la figura 3.2*e*. Cuando la carga se incrementa aún más, el esfuerzo y las deformaciones aumentan en forma correspondiente y desaparece la proporcionalidad. La relación no lineal entre esfuerzos y deformaciones unitarias que sigue es la determinada por la curva esfuerzo-deformación unitaria del concreto. Por consiguiente, al igual que en vigas homogéneas (ver la figura 3.1), la distribución de los esfuerzos en el concreto en el lado de compresión de la viga, tiene la misma forma que la curva esfuerzo-deformación unitaria. La figura 3.2*f* señala la distribución de esfuerzos y deformaciones unitarias cerca de la carga última.

En algún momento se alcanza la capacidad de carga de la viga. La falla se puede presentar de dos maneras. Cuando se emplea una cantidad de refuerzo relativamente moderada, el acero alcanza su punto de fluencia con determinado valor para la carga. Para este esfuerzo, el acero de refuerzo fluye en forma súbita y se alarga de manera considerable (ver la figura 2.13), entonces las grietas de tensión en el concreto se ensanchan de manera visible y se propagan hacia arriba, presentándose simultáneamente una deflexión significativa de la viga. Cuando esto ocurre, las deformaciones unitarias en la zona de compresión restante del concreto se incrementan hasta tal punto que sobreviene el aplastamiento del concreto, o sea una *falla por compresión secundaria* con una carga sólo ligeramente superior que la carga que causó la fluencia en el acero. En consecuencia, la realización efectiva del punto de fluencia en el acero determina la capacidad de carga de las vigas moderadamente reforzadas. Esta falla por fluencia es gradual y está precedida por signos visibles de peligro, como el ensanchamiento y alargamiento de las grietas y el aumento notorio en la deflexión.

De otra parte, si se emplean grandes cantidades de refuerzo o cantidades normales de acero de muy alta resistencia, la resistencia a la compresión del concreto puede agotarse antes de que el acero comience a fluir. El concreto falla por aplastamiento cuando las deformaciones unitarias son tan grandes que destruyen su integridad. Todavía no se conocen las razones para la presencia de este tipo de falla, pero se ha observado que las vigas rectangulares fallan en compresión cuando el concreto alcanza valores de deformación unitaria del orden de 0.003 a 0.004. La falla por compresión debida al aplastamiento del concreto es repentina, de naturaleza casi explosiva y ocurre sin ningún aviso. Por esta razón, es aconsejable calcular las dimensiones de las vigas de tal manera que, si se sobrecargan, la falla se inicie por fluencia del acero en vez del aplastamiento del concreto.

El análisis de esfuerzos y resistencias en los diferentes estados que se acaban de describir se hará en las siguientes secciones.

a. Esfuerzos elásticos y sección no fisurada

Mientras el esfuerzo de tensión en el concreto se mantenga por debajo del módulo de rotura, de manera que no se desarrollen grietas de tensión, la distribución de deformaciones unitarias y esfuerzos que aparece en la figura 3.2*c* es esencialmente la misma que en una viga elástica y homogénea (ver la figura 3.1 *b*). La única diferencia es la presencia de otro material: el acero de refuerzo.

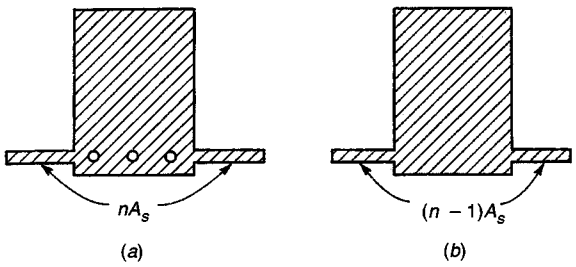


FIGURA 3.3
Sección transformada no fisurada de una viga.

Como se demostró en la sección 1.9*a*, el esfuerzo en el acero para determinado valor de deformación unitaria en el intervalo elástico, es n veces el del concreto [ecuación 1.6]. En la misma sección se demostró que se puede tomar ventaja de este hecho en los cálculos, con el remplazo de la sección real transversal acero-concreto por una sección ficticia conformada únicamente de concreto. En esta "sección transformada" el área real del refuerzo se remplaza por un área equivalente de concreto igual a nA_s, localizada al nivel del acero. La sección transformada no fisurada de la viga de la figura 3.2*b* aparece en la figura 3.3.

Una vez obtenida la sección transformada, pueden aplicarse los métodos usuales de análisis de vigas elásticas homogéneas. Es decir que las propiedades de la sección (localización del eje neutro, momento de inercia, módulo de sección, etc.) se calculan de manera usual, y los esfuerzos, en particular, con las ecuaciones (3.2) a (3.4).

Ejemplo 3.1. Una viga rectangular tiene las dimensiones (ver la figura 3.2*b*) b = 10 pulg, h = 25 pulg y d = 23 pulg y está reforzada con tres barras No. 8 de manera que A_s = 2.35 pulg^2. La resistencia del cilindro del concreto f'_c es 4000 lb/pulg^2 y la resistencia a la tensión en flexión (módulo de rotura) es 475 lb/pulg^2. El punto de fluencia del acero es f_y = 60,000 lb/pulg^2, y las curvas esfuerzo-deformación unitaria de los materiales son las que aparecen en la figura 1.15. Determine los esfuerzos causados por un momento flector M = 45 klb-pie.

Solución. Con un valor $n = E_s/E_c$ = 29,000,000/3,600,000 = 8, es necesario adicionar a la forma rectangular de la sección un área $(n-1)A_s = 7 \times 2.35 = 16.45$ pulg^2, dispuesta como aparece en la figura 3.4, con el fin de obtener la sección transformada no fisurada. Cálculos convencionales demuestran que la localización del eje neutro en esta sección está dada por $\bar{y}$ = 13.2 pulg y que su momento de inercia con respecto a este eje es de 14,710 pulg^4. Para M = 45 klb-pie = 540,000 lb-pulg, el esfuerzo de compresión en el concreto en la fibra superior se puede obtener a partir de la ecuación (3.3),

$$f_c = 540{,}000\frac{13.2}{14{,}710} = 485 \text{ lb/pulg}^2$$

y en forma similar, el esfuerzo de tensión del concreto en la fibra inferior es

$$f_{ct} = 540{,}000\frac{11.8}{14{,}710} = 433 \text{ lb/pulg}^2$$

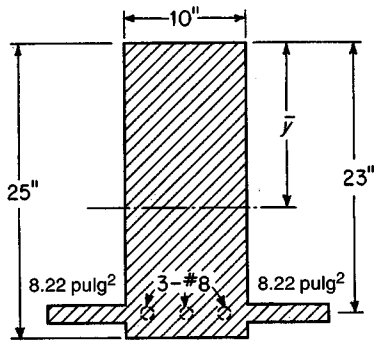


FIGURA 3.4
Sección transformada para la viga del ejemplo 3.1.

Puesto que este valor está por debajo de la resistencia a la tensión por flexión dada para el concreto (475 lb/pulg^2), no se generan grietas de tensión y se justifican los cálculos mediante la sección transformada no fisurada. A partir de las ecuaciones (1.6) y (3.2), el esfuerzo en el acero es:

$$f_s = n\frac{My}{I} = 8\left(540{,}000\frac{9.8}{14{,}710}\right) = 2880 \text{ lb/pulg}^2$$

Al comparar f_c y f_s con la resistencia del cilindro y con el punto de fluencia, respectivamente, se puede observar que para este estado los esfuerzos reales son bastante pequeños en comparación con las resistencias disponibles de los dos materiales.

b. Esfuerzos elásticos y sección fisurada

Cuando el esfuerzo de tensión f_{ct} excede el módulo de rotura, se forman grietas como aparece en la figura 3.2*d*. Si el esfuerzo de compresión en el concreto es menor que aproximadamente $\frac{1}{2}f'_c$ y el esfuerzo en el acero no alcanza el punto de fluencia, ambos materiales siguen comportándose en forma elástica o casi elástica. Esta situación es la que se obtiene generalmente en estructuras bajo cargas y condiciones normales de servicio, ya que para estas cargas los esfuerzos en general son de la magnitud que se acaba de analizar. Para este estado, para simplificar y con un margen mínimo de error, se supone que las grietas de tensión progresan hasta el eje neutro y que las secciones planas antes de la flexión continúan iguales en el elemento flexionado. La situación con relación a la distribución de las deformaciones unitarias y esfuerzos es la que aparece en la figura 3.2*e*.

Para calcular los esfuerzos, y si se desea hacerlo con las deformaciones unitarias, puede utilizarse el artificio de la sección transformada. Sólo es necesario tener en cuenta el hecho de que todo el concreto sometido a esfuerzos de tensión se supone agrietado y, en consecuencia, efectivamente ausente. Como aparece en la figura 3.5*a*, la sección transformada consiste, entonces, en el concreto sometido a compresión en un lado del eje y n veces el área de acero de tensión en el otro. La distancia hasta el eje neutro en este estado se expresa convencionalmente como una fracción kd de la altura efectiva d. (Una vez que el concreto esté fisurado, el material localizado por debajo del acero se hace ineficaz; por esto d es la altura efectiva de la viga.) Para determinar la ubicación del eje neutro se iguala el momento del área de tensión con respecto al eje, con el momento del área de compresión, lo que da como resultado

$$b\frac{(kd)^2}{2} - nA_s(d - kd) = 0 \tag{3.5}$$

Con el valor de kd que se obtiene mediante la solución de la ecuación cuadrática indicada, se pueden determinar el momento de inercia y las otras propiedades de la sección transformada como en el caso precedente. Como alternativa, es posible proceder a partir de los principios básicos para tener en cuenta directamente las fuerzas que actúan sobre la sección transversal. Éstas aparecen en la figura 3.5*b*. El esfuerzo en el concreto, con un valor máximo f_c en la fibra exterior, se distribu-

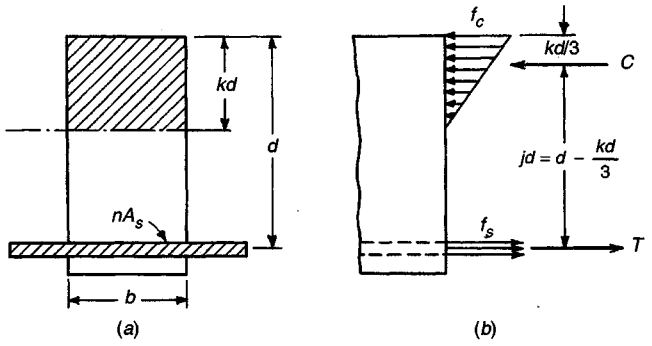


FIGURA 3.5
Sección transformada y fisurada.

ye de modo lineal como se indica. La totalidad del área de acero A_s está sometida a un esfuerzo f_s. En forma correspondiente, la fuerza total de compresión C y la de tensión T son

$$C = \frac{f_c}{2}bkd \quad \text{y} \quad T = A_s f_s \tag{3.6}$$

El requisito de que estas dos fuerzas sean numéricamente iguales se satisface según la manera como se determine la ubicación del eje neutro.

El equilibrio requiere que el par constituido por las dos fuerzas C y T sea numéricamente igual al momento flector externo M. De esta manera, los momentos con respecto a C dan como resultado

$$M = Tjd = A_s f_s jd \tag{3.7}$$

donde jd es el brazo de palanca interno entre C y T. A partir de la ecuación (3.7), el esfuerzo en el acero es

$$f_s = \frac{M}{A_s jd} \tag{3.8}$$

En forma análoga, tomando momentos con respecto a T se obtiene,

$$M = Cjd = \frac{f_c}{2}bkdjd = \frac{f_c}{2}kjbd^2 \tag{3.9}$$

a partir de lo cual el esfuerzo en el concreto es

$$f_c = \frac{2M}{kjbd^2} \tag{3.10}$$

Para utilizarlas ecuaciones (3.6) a (3.10), es conveniente tener ecuaciones en las cuales k y j puedan evaluarse en forma directa, con el fin de establecer la distancia al eje neutro kd y el brazo interno jd, definiendo primero la *cuantía de refuerzo*

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \tag{3.11}$$

se sustituye luego $A_s = pbd$ en la ecuación (3.5) y con la solución para k, se obtiene

$$k = \sqrt{(\rho n)^2 + 2\rho n} - \rho n \tag{3.12}$$

A partir de la figura 3.5*b*, se observa que $jd = d - kd/3$, o

$$j = 1 - \frac{k}{3} \tag{3.13}$$

En la tabla A.7 del apéndice A se presentan valores de k y j para el análisis de la sección elástica fisurada, para las cuantías de acero y para las relaciones modulares usuales.

Ejemplo 3.2. La viga del ejemplo 3.1 está sometida a un momento flector M = 90 klb-pie (en vez de los 45 klb-pie del ejemplo anterior). Calcule las propiedades y esfuerzos importantes.

Solución. Si la sección permaneciera no fisurada, el esfuerzo de tensión en el concreto ahora sería el doble del valor anterior, es decir 866 lb/pulg^2. Puesto que este valor excede en gran cantidad al módulo de rotura dado para el concreto (475 lb/pulg^2), se habrán formado grietas y en consecuencia será necesario adaptar apropiadamente el análisis. Se remplazan los valores conocidos de b, n y A_s en la ecuación (3.5) y se obtiene la distancia hasta el eje neutro kd = 7.6 pulg, o k = 7.6/23 = 0.33. A partir de la ecuación (3.13), j = 1 – 0.33/3 = 0.89. Con estos valores el esfuerzo en el acero se obtiene de la ecuación (3.8) como f_s = 22,400 lb/pulg^2, y el esfuerzo máximo en el concreto a partir de la ecuación (3.10) como f_c = 1390 lb/pulg^2.

Si se comparan estos resultados con los valores pertinentes para la misma viga cuando está sometida a la mitad del momento, calculados previamente, se puede observar que (1) el plano neutro se desplaza hacia arriba de manera que su distancia desde la fibra superior cambió de 13.2 a 7.6 pulg; (2) aunque el momento flector sólo se duplicó, el esfuerzo en el acero aumentó de 2880 a 22,400 lb/pulg^2, o sea, aproximadamente 7.8 veces, y el esfuerzo a compresión del concreto se incrementó de 485 hasta 1390 lb/pulg^2, es decir, 2.9 veces; (3) el momento de inercia de la sección transformada con la fisura se puede calcular fácilmente y resulta igual a 5910 pulg^4, en comparación con las 14,710 pulg^4 de la sección no fisurada; esto afecta la magnitud de la deflexión como se analiza en el capítulo 6. De esta manera se aprecia la influencia radical de la formación de las grietas de tensión en el comportamiento de las vigas de concreto reforzado.

c. Resistencia a la flexión

En la práctica estructural es de interés calcular aquellos esfuerzos y deformaciones unitarias que ocurren en la estructura en servicio sometida a las cargas de diseño. Para las vigas de concreto reforzado esto puede hacerse mediante los métodos ya descritos, que suponen un comportamiento elástico en ambos materiales. De igual manera, es importante que el ingeniero estructural sea capaz de predecir con suficiente precisión la resistencia última de una estructura o de un elemento estructural. Hacer que esta resistencia sea mayor que las mayores cargas que puedan presentarse durante la vida de la estructura en una cantidad apropiada, garantiza un margen adecuado de seguridad. Antes se utilizaban para este propósito métodos basados en el análisis elástico, como los presentados previamente, o variaciones de los mismos. Está claro, sin embargo, que para la carga última o cerca de ella, los esfuerzos dejan de ser proporcionales a las deformaciones unitarias. La compresión axial se analizó en detalle en la sección 1.9, y en cuanto a la flexión, se puntualizó que para cargas altas, que están cercanas a las últimas, la distribución de esfuerzos y deformaciones unitarias es la que aparece en la figura 3.2*f* en lugar de la distribución elástica de la figura 3.2*e*. Se han desarrollado métodos de análisis más realistas para estimar la resistencia última basados en el comportamiento inelástico real (en vez de suponer el comportamiento elástico de los materiales) y en los resultados de una investigación experimental bastante amplia. Estos métodos se utilizan actualmente, en forma casi exclusiva, en la práctica del diseño estructural.

Si la distribución de los esfuerzos de compresión del concreto en la carga última o cerca de ella (ver la figura 3.2*f*), tuviera una forma bien definida e invariable, parabólica, trapezoidal u otra, sería posible desarrollar una teoría racional y directa para la resistencia última a flexión, tal como la teoría de la flexión elástica con su forma triangular de distribución de esfuerzos (ver las figuras 3.1*b*, 3.2*c* y 3.2*e*). De hecho, mediante la inspección de las figuras 2.3, 2.4 y 2.6, y de muchas otras curvas esfuerzo-deformación unitaria del concreto que han sido publicadas, se hace evidente que la forma geométrica de la distribución de esfuerzos varía mucho dependiendo de una cantidad de factores como la resistencia del cilindro y la tasa de aplicación y la duración de la carga. Por éstas y otras razones, no se ha desarrollado aún una teoría racional para la flexión del concreto reforzado (ver las referencias 3.1. a 3.3). Por esto, los actuales métodos de análisis se fundamentan en parte en leyes conocidas de la mecánica y se complementan, cuando es necesario, con una extensa información experimental.

Supongamos que la figura 3.6 representa la distribución de esfuerzos y deformaciones unitarias internas cuando la viga está próxima a la falla. Se desea disponer de un método para calcular el momento M_n (momento último nominal) para el cual la viga fallará bien sea por fluencia del acero sometido a tensión o por aplastamiento del concreto en la fibra extrema a compresión. Para el primer modo de falla, el criterio consiste en que el esfuerzo en el acero sea igual al punto de fluencia, $f_s = f_y$. Anteriormente se mencionó que no se conoce todavía un criterio exacto para la falla del concreto a compresión, pero que se han medido deformaciones unitarias para vigas rectangulares del orden de 0.003 a 0.004 pulg/pulg justo antes de la falla. Si se supone, usualmente en forma algo conservadora, que el concreto está próximo al aplastamiento cuando la máxima deformación unitaria alcanza $\epsilon_u = 0.003$, la comparación con una gran cantidad de ensayos sobre vigas y columnas de una variedad considerable de

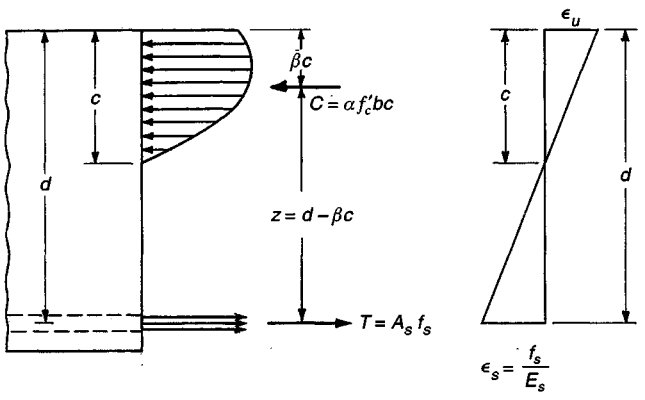


FIGURA 3.6
Distribución de esfuerzos para la carga última.

formas y condiciones de carga demuestra que puede realizarse una predicción suficientemente precisa y segura de la resistencia última (ver la referencia 3.4). Además de estos dos criterios (fluencia del acero para un esfuerzo igual a f_y y aplastamiento del concreto para una deformación unitaria de 0.003), en realidad no es necesario conocer la forma exacta de la distribución de esfuerzos en el concreto de la figura 3.6. Lo que sí es imprescindible conocer para determinada distancia c del eje neutro es (1) la fuerza resultante total a compresión en el concreto C y (2) su localización vertical, es decir, su distancia desde la fibra extrema a compresión.

Para una viga rectangular, el área que está en compresión es b_c, y la fuerza total que está en compresión en esta área puede expresarse como $C = f_{av}bc$, donde f_{av} es el esfuerzo promedio a compresión sobre el área bc. Evidentemente, el esfuerzo promedio a compresión que puede desarrollarse antes de que ocurra la falla resulta tanto mayor en cuanto sea mayor la resistencia del cilindro f'_c del concreto en particular. Sea

$$\alpha = \frac{f_{av}}{f'_c} \tag{3.14}$$

Entonces,

$$C = \alpha f'_c bc \tag{3.15}$$

Para cierta distancia c hasta el eje neutro, la localización de C puede definirse como una fracción β de esta distancia. Entonces, como se indica en la figura 3.6, para un concreto con determinada resistencia es necesario conocer sólo α y β con el fin de definir completamente el efecto de los esfuerzos de compresión en el concreto.

Muchos procedimientos de mediciones directas, así como evaluaciones indirectas en bastantes ensayos de vigas, demuestran que los siguientes valores de α y β son suficientemente precisos (ver la referencia 3.5, donde α se designa como k_1k_3 y β como k_2):

α es igual a 0.72 para $f'_c \leq 4000$ lb/pulg^2 y disminuye en 0.04 por cada 1000 lb/pulg^2 por encima de 4000 y hasta 8000 lb/pulg^2. Para $f'_c > 8000$ lb/pulg^2, $\alpha = 0.56$.

β es igual a 0.425 para $f'_c \leq 4000$ lb/pulg^2 y disminuye en 0.025 por cada 1000 lb/pulg^2 por encima de 4000 y hasta 8000 lb/pulg^2. Para f'_c 8000 lb/pulg^2, $\beta = 0.325$.

La disminución en los valores de α y β para concretos de alta resistencia se relaciona con el hecho de que estos concretos son más frágiles, es decir, presentan una curva esfuerzo-deformación unitaria con curvatura más pronunciada y con una menor porción casi horizontal (ver las figuras 2.3 y 2.4). La figura 3.7 señala estas relaciones simples.

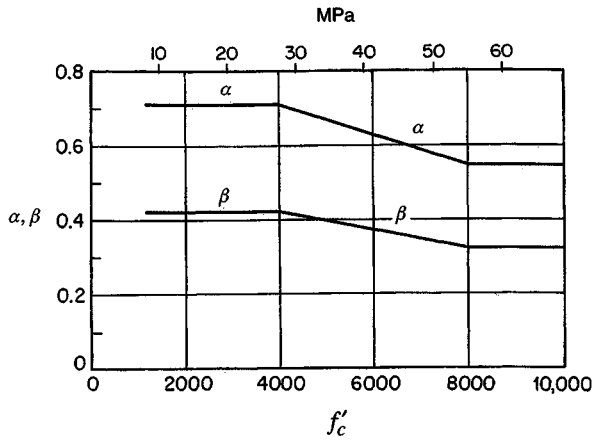


FIGURA 3.7
Variaciones de α y β con la resistencia del concreto f'_c.

Si se acepta esta información experimental, la resistencia última puede calcularse a partir de las leyes de equilibrio y del supuesto de que las secciones transversales planas permanecen en esta condición. El equilibrio exige que

$$C = T \quad \text{o} \quad \alpha f'_c bc = A_s f_s \tag{3.16}$$

Entonces el momento flector, con el par conformado por las fuerzas C y T, puede escribirse como

$$M = Tz = A_s f_s (d - \beta c) \tag{3.17}$$

o

$$M = Cz = \alpha f'_c b_c (d - \beta c) \tag{3.18}$$

Para la *falla a tensión* por fluencia del acero, $fs = fy$. Con la sustitución de este valor en la ecuación (3.16), se obtiene la distancia hasta el eje neutro

$$c = \frac{A_s f_y}{\alpha f'_c b} \tag{3.19a}$$

Como alternativa, usando $A_s = \rho bd$, la distancia al eje neutro es

$$c = \frac{\rho f_y d}{\alpha f'_c} \tag{3.19b}$$

que proporciona la distancia hasta el eje neutro cuando ocurre la falla a tensión. El momento último M_n se obtiene, entonces, a partir de la ecuación (3.17) con el valor de c determinado previamente y $f_s = f_y$, es decir,

$$M_n = \rho f_y b d^2 \left(1 - \frac{\beta f_y \rho}{\alpha f'_c}\right) \tag{3.20a}$$

Con los valores específicos obtenidos experimentalmente para α y β, dados anteriormente, esta ecuación da como resultado:

$$M_n = \rho f_y b d^2 \left(1 - 0.59 \frac{\rho f_y}{f'_c}\right) \tag{3.20b}$$

Por otro lado, para la *falla a compresión* el criterio consiste en que la deformación unitaria por compresión en el concreto alcance el valor $\epsilon_u = 0.003$, como se analizó previamente. El esfuerzo en el

acero f_s que todavía no alcanza su punto de fluencia es proporcional a la deformación unitaria en el acero ϵ_s, es decir, de acuerdo con la ley de Hooke

$$f_s = \epsilon_s E_s$$

A partir de la distribución de las deformaciones unitarias de la figura 3.6, la deformación unitaria en el acero ϵ_s puede expresarse en términos de la distancia c por consideración de triángulos semejantes, que conduce a

$$f_s = \epsilon_u E_s \frac{d - c}{c} \tag{3.21}$$

Entonces, a partir de la ecuación (3.16),

$$\alpha f'_c bc = A_s \epsilon_u E_s \frac{d - c}{c} \tag{3.22}$$

y esta ecuación cuadrática puede resolverse para c, la única incógnita para la viga dada. Con los valores de c y f_s, el momento último para una viga, tan fuertemente reforzada que la falla ocurre por aplastamiento del concreto, puede encontrarse a partir de la ecuación (3.17) o de la ecuación (3.18).

Como se anotó, la falla a compresión ocurre en forma explosiva y sin aviso; por esta razón es buena práctica mantener la cantidad de refuerzo suficientemente pequeña para asegurar que, en el caso de que el elemento se vea sobreesforzado, éste dé aviso al fallar de manera gradual por fluencia del acero en vez de hacerlo por aplastamiento del concreto. Esto puede lograrse manteniendo la cuantía de refuerzo $\rho = A_s/bd$ por debajo de determinado valor límite. Este valor conocido como la *cuantía balanceada de acero* ρb, representa la cantidad de refuerzo necesaria para hacer que la viga falle por aplastamiento del concreto al mismo tiempo que se produce la fluencia del acero, lo que significa que el eje neutro debe estar localizado de tal manera que el concreto alcance la deformación unitaria a compresión límite ϵ_u para la misma carga a la cual el acero comienza a fluir. De acuerdo con esto, al establecer $f_s = f_y$ en la ecuación (3.21), y sustituir la deformación unitaria de fluencia ϵ_y por f_y/E_s, se obtiene el valor de c que define la posición única del eje neutro correspondiente a un aplastamiento del concreto simultáneo con el inicio de la fluencia en el acero,

$$c = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} d \tag{3.23}$$

sustituyendo este valor de c en la ecuación (3.16) con $A_s f_s = \rho b d f_y$, para la cuantía balanceada de acero se obtiene

$$\rho_b = \frac{\alpha f'_c}{f_y} \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} \tag{3.24}$$

En un elemento bien diseñado, la cuantía real de acero se mantiene muy por debajo de la cuantía balanceada que especifica la ecuación (3.24).

Ejemplo 3.3. Determine el momento último M_n, para el cual la viga de los ejemplos 3.1 y 3.2 presenta falla.

Solución. Para esta viga la cuantía de acero $\rho = A_s/bd = 2.35/10 \times 23 = 0.0102$. La cuantía balanceada de acero se determina a partir de la ecuación (3.24) que da como resultado 0.0284. Puesto que la cantidad del acero en la viga es menor que la que produciría una falla por aplastamiento del concreto, la viga va a fallar a tensión por fluencia del acero. Su momento último, obtenido con la ecuación (3.20*b*), es

$$M_n = 0.0102 \times 60{,}000 \times 10 \times 23^2 \left(1 - 0.59 \frac{0.0102 \times 60{,}000}{4000}\right)$$

$$= 2{,}950{,}000 \text{ pulg-lb} = 246 \text{ klb-pie}$$

Cuando la viga alcanza su resistencia última, la distancia hasta el eje neutro se determina a partir de la ecuación (3.19*b*) como

$$c = \frac{0.0102 \times 60{,}000 \times 23}{0.72 \times 4000} = 4.89$$

Resulta interesante comparar este último valor con los de los ejemplos 3.1 y 3.2. En los cálculos anteriores se encontró que para cargas bajas, cuando el concreto aún no se había agrietado a tensión, el eje neutro estaba localizado a una distancia de 13.2 pulgadas desde el borde de compresión; para cargas mayores, cuando el concreto en tensión se agrietaba pero los esfuerzos eran aún suficientemente bajos para mantenerse elásticos, esta distancia era de 7.6 pulgadas. Como se acaba de mostrar, inmediatamente antes de la falla de la viga esta distancia diminuyó aún más, hasta 4.9 pulgadas. Esta migración del eje neutro hacia el borde de compresión a medida que la carga se incrementa ilustra la diferencia entre los diversos estados de comportamiento por los cuales pasa una viga de concreto reforzado, a medida que la carga se incrementa desde cero hasta el valor que produce su falla. Los ejemplos también ilustran el hecho de que el momento último no puede determinarse en forma precisa mediante cálculos elásticos.

3.4 DISEÑO DE VIGAS RECTANGULARES REFORZADAS A TENSIÓN

Por las razones explicadas en el capítulo 1, el diseño de estructuras de concreto reforzado se fundamenta actualmente en el concepto de proporcionar suficiente resistencia para sostener sobrecargas hipotéticas. La *resistencia nominal* de un elemento dado se calcula con base en el mejor conocimiento actual del comportamiento del elemento y del material; esta resistencia nominal se modifica mediante un *coeficiente de reducción de resistencia* ϕ, menor que la unidad, para obtener la *resistencia de diseño*. La *resistencia requerida*, en caso de que se alcance realmente el estado hipotético de sobrecarga, se encuentra aplicando factores γ, mayores que la unidad, a las cargas realmente esperadas. Estas *cargas de servicio* esperadas incluyen la carga muerta calculada, la carga viva calculada o especificada legalmente y las cargas ambientales como aquéllas ocasionadas por la acción de sismos por la temperatura. De esta manera, los elementos de concreto reforzado se diseñan de manera que, como se demostró en la ecuación (1.5),

$$M_u \leq \phi M_n$$

$$P_u \leq \phi P_n$$

$$V_n \leq \phi V_n$$

donde los subíndices n denotan las resistencias nominales en flexión, axial y cortante respectivamente, y los subíndices u denotan los valores mayorados de momento, axial y cortante. Los coeficientes de reducción de resistencia ϕ varían normalmente dependiendo del tipo de resistencia por calcular, de la importancia del elemento dentro de la estructura y de otros aspectos analizados en detalle en el capítulo 1.

Un elemento diseñado con base en una resistencia adecuada para un estado hipotético de sobrecarga, también debe comportarse en forma satisfactoria bajo condiciones normales de cargas de servicio. En términos específicos, la deflexión debe limitarse a un valor aceptable y las grietas de tensión en el concreto, que ocurren inevitablemente, deben ser de poco espesor y bien distribuidas a lo largo de la zona de tensión. Antes, la práctica consistía en limitar el ancho de las grietas y las deflexiones en forma indirecta, limitando los esfuerzos en el concreto y en el acero para estados de cargas de servicio. El método conocido como *diseño elástico* o *diseño para cargas de servicio* mediante el cual las dimensiones de los elementos se determinan según los límites en los esfuerzos, que a su vez controlan indirectamente el agrietamiento y las deflexiones, puede

utilizarse aún como alternativa, de acuerdo con el Código ACI de 1995 (ver el Código ACI, apéndice A). Sin embargo, debido a las limitaciones e inconsistencias asociadas con el método de diseño para cargas de servicio, se prefiere el *método de la resistencia*. Después de calcular las dimensiones para obtener una resistencia adecuada, las deflexiones se calculan y comparan con valores límites (o se controlan de otra manera), y el ancho de las grietas se limita mediante métodos específicos. Este enfoque de diseño llamado en Europa y con alguna frecuencia en la práctica en los Estados Unidos, *diseño para estados límites*, es la base principal del Código ACI de 1995 y es el enfoque que se seguirá en éste y en posteriores capítulos.

a. Distribución rectangular equivalente de esfuerzos

El método presentado en la sección 3.3*c* para calcular la resistencia última a la flexión de vigas de concreto reforzado, desarrollado a partir de conceptos básicos de la mecánica estructural y de información pertinente de investigaciones experimentales, también se aplica a diferentes situaciones de las de vigas rectangulares reforzadas en el lado de tensión. Puede utilizarse y da resultados válidos para el caso de vigas con otras formas de sección transversal, para vigas reforzadas de otra manera y para elementos sometidos no sólo a flexión simple sino también a la acción simultánea de flexión y fuerza axial (compresión o tensión). Sin embargo, las ecuaciones pertinentes para estos casos más complejos resultan cada vez más complicadas y largas, y lo que es más importante, resulta cada vez más difícil para el diseñador visualizar las bases físicas para los métodos y fórmulas de diseño; esto puede llevar a una confianza ciega en las fórmulas y a generar una mala interpretación. Lo anterior no es solamente indeseable, en términos generales, sino que en la práctica es más probable que conduzca a cometer errores numéricos en el trabajo de diseño que cuando el diseñador cuenta con una imagen clara de la situación física del elemento que calcula o analiza en determinado momento. Afortunadamente resulta posible, mediante un artificio conceptual, formular de otro modo el análisis de la resistencia de elementos de concreto reforzado, que proporciona las mismas respuestas que el análisis general descrito anteriormente, pero que se puede visualizar mucho mejor y aplicar con mayor dificultad a casos de mayor complejidad que el de una viga rectangular simple. Su consistencia está demostrada, y su aplicación a casos más complejos se ha calibrado con los resultados de una gran cantidad de ensayos sobre una diversidad de tipos de elementos y condiciones de carga (ver la referencia 3.4).

En la sección precedente se anotó que la forma geométrica real de la distribución de esfuerzos de compresión en el concreto varía considerablemente y que, de hecho, no se requiere conocer la forma exacta, siempre y cuando se sepan dos cosas: (1) la magnitud C de la resultante de los esfuerzos a compresión en el concreto y (2) la localización de esta resultante. A partir de resultados de investigaciones experimentales se obtuvo información relativa a estas dos cantidades, que fue expresada mediante los dos parámetros α y β.

Evidentemente, se puede pensar entonces en remplazar la compleja distribución real de esfuerzos mediante una distribución ficticia con una forma geométrica simple, siempre y cuando esta distribución ficticia produzca la misma fuerza total de compresión C aplicada en la misma ubicación que en el elemento real cuando está en el punto de falla. Históricamente, investigadores de varios países han propuesto una cantidad simplificada de distribuciones ficticias de esfuerzos equivalentes. La distribución de esfuerzos ampliamente aceptada en los Estados Unidos, y cada vez más en otros países, fue propuesta inicialmente por C. S. Whitney y después fue desarrollada y revisada de modo experimental por otros (ver, por ejemplo, la referencia 3.4). En la figura 3.8 aparecen la distribución real de esfuerzos inmediatamente antes de la falla y la distribución ficticia equivalente.

Se puede observar que la distribución real de esfuerzos se remplaza por una distribución equivalente con forma rectangular simple. La intensidad $\gamma f'_c$ de este esfuerzo constante equivalente, y su profundidad $a = \beta_1 c$, se pueden calcular a partir de que (1) la fuerza total de compresión C y (2) su ubicación, es decir, su distancia desde la fibra superior, sean las mismas, tanto para la distribución

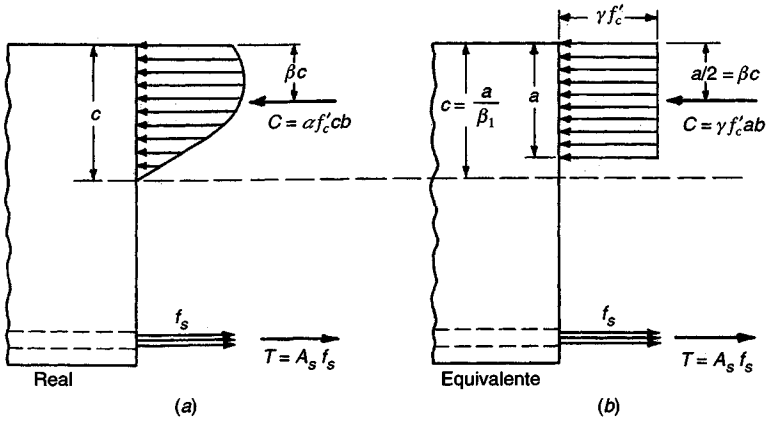


FIGURA 3.8
Distribución real y rectangular equivalente de esfuerzos para carga última.

equivalente rectangular como para la distribución real de esfuerzos. A partir de las figuras 3.8*a* y 3.8*b* la primera condición da como resultado

$$C = \alpha f'_c cb = \gamma f'_c ab \text{ a partir de lo cual } \gamma = \alpha \frac{c}{a}$$

Con $a = \beta_1 c$ esto da $\gamma = \alpha/\beta_1$. La segunda condición requiere simplemente que la fuerza C en el bloque rectangular equivalente de esfuerzos esté localizada a la misma distancia βc tanto desde la fibra superior, como en la distribución real. Se concluye que $\beta_1 = 2\beta$.

Para proporcionar los detalles, las dos líneas superiores de la tabla 3.1 presentan la evidencia experimental de la figura 3.7 en forma tabular. Las dos líneas inferiores muestran los anteriores parámetros β_1 y γ para el bloque rectangular de esfuerzos. Se puede observar que el factor de intensidad del esfuerzo γ es esencialmente independiente de f'_c y se puede tomar siempre igual a 0.85. De ahí que, independientemente de f'_c, la fuerza de compresión en el concreto en la falla para una viga rectangular de ancho b es

$$C = 0.85 f'_c ab \tag{3.25}$$

También para los concretos comunes con $f'_c \leq 4000$ lb/pulg^2, la altura del bloque rectangular de esfuerzos es $a = 0.85c$, donde c es la distancia hasta el eje neutro. Para concretos de mayor resistencia, la distancia es $a = \beta_1 c$; los valores de β_1 se muestran en la tabla 3.1. Esto ha sido estipulado por el Código ACI, en el artículo 10.2.7.3, de la siguiente manera: β_1 debe tomarse igual a 0.85 para concretos con resistencias hasta de 4000 lb/pulg^2 inclusive; para resistencias mayores a 4000 lb/pulg^2, β_1 debe reducirse continuamente a una tasa de 0.05 por cada 1000 lb/pulg^2 de resistencia por encima de 4000 lb/pulg^2, pero β_1 no debe ser menor que 0.65. En términos matemáticos, la relación entre β_1 y f'_c puede expresarse como

$$\beta_1 = 0.85 - 0.05 \frac{f'_c - 4000}{1000} \text{ y } 0.65 \leq \beta_1 \leq 0.85 \tag{3.26}$$

TABLA 3.1
Parámetros del bloque de esfuerzos en el concreto

	f'_c lb/pulg^2				
	≤ 4000	5000	6000	7000	≥ 8000
α	0.72	0.68	0.64	0.60	0.56
β	0.425	0.400	0.375	0.350	0.325
$\beta_1 = 2\beta$	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65
$\gamma = \alpha/\beta_1$	0.85	0.85	0.85	0.86	0.86

La distribución rectangular equivalente de esfuerzos puede utilizarse para deducir las ecuaciones desarrolladas en la sección 3.3*c*. Desde luego, los criterios de falla son los mismos de antes: fluencia del acero para $f_s = f_y$ o aplastamiento del concreto para $\epsilon_u = 0.003$. Puesto que el bloque rectangular de esfuerzos se visualiza fácilmente y sus propiedades geométricas son sencillas en extremo, muchos cálculos se llevan a cabo en forma directa sin hacer referencia a las ecuaciones derivadas formalmente, como aparece en las siguientes secciones.

b. Cuantía balanceada de acero

La cuantía balanceada de acero puede determinarse con base en las condiciones de que en la falla balanceada la deformación en el acero sea exactamente igual a ϵ_y, y la deformación en el concreto alcance en forma simultánea la deformación por aplastamiento de $\epsilon_u = 0.003$. Con referencia a la figura 3.6,

$$c = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} d \tag{3.27}$$

que resulta idéntica a la ecuación (3.23). Entonces, a partir del requisito de equilibrio que exige que $C = T$

$$\rho_b f_y bd = 0.85 f'_c ab = 0.85 \beta_1 f'_c bc$$

a partir de lo cual

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} \tag{3.28a}$$

Como se observa, esta ecuación es equivalente a la ecuación (3.24). Con la sustitución de $\epsilon_u = 0.003$ y $E_s = 29{,}000{,}000$ lb/pulg^2 en la ecuación (3.28*a*), la expresión para la cuantía balanceada de acero puede reescribirse de manera alternativa como,

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{87{,}000}{87{,}000 + f_y} \tag{3.28b}$$

c. Vigas subreforzadas

En la sección 3.3*c* se subrayó que una falla a compresión por flexión, en caso de que se presente, genera muy poco o ningún aviso de peligro, en tanto que una falla a tensión iniciada por fluencia del acero se presenta, por lo general, en forma gradual. El peligro resulta evidente a partir de la aparición de deflexiones grandes y del ensanchamiento de grietas en el concreto asociadas con la fluencia del acero de refuerzo, ante lo cual pueden tomarse las medidas correspondientes para evitar el colapso total. Además, la mayor parte de las vigas para las cuales la falla se inicia por fluencia posee una reserva sustancial de resistencia debida al endurecimiento por deformación de las barras, que no se ha tenido en cuenta en los cálculos de M_n.

A causa de estas diferencias en el comportamiento, resulta prudente exigir que las vigas se diseñen de tal forma que la falla, en caso de que ocurra, sea por fluencia del acero y no por aplastamiento del concreto. Esto puede lograrse, en teoría, exigiendo que la cuantía de acero ρ sea menor que la cuantía balanceada ρ_b determinada por la ecuación (3.28*a*) o la (3.28*b*).

En la práctica, el límite superior de ρ debería ser un poco menor que ρ_b, por las siguientes razones: (1) para una viga con una cuantía ρ exactamente igual a ρ_b, el límite de la deformación de compresión en el concreto se alcanzará teóricamente en el mismo momento en que el acero alcance su esfuerzo de fluencia, sin que se produzca una fluencia significativa antes de la falla; (2) las propiedades de los materiales no se conocen nunca en forma precisa; (3) el endurecimiento por

deformación del acero de refuerzo, no incluido en el diseño, puede acarrear una falla frágil por compresión en el concreto aunque ρ se encuentre un poco por debajo de ρ_b, y (4) el área de acero realmente suministrada, que tiene en cuenta los tamaños estándares de las barras, va a ser siempre igual o mayor que la requerida con base en la cuantía seleccionada de acero ρ, siempre con tendencia a reforzar en exceso. Por estas razones, el Código ACI 10.3.3 especifica que

$$\rho_{max} = 0.75\rho_b \tag{3.29}$$

De esta manera, para todos los elementos diseñados de acuerdo con el Código ACI, $f_s = f_y$ en la falla y la resistencia nominal a la flexión (con referencia a la figura 3.9) está determinada por

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) \tag{3.30}$$

donde

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} \tag{3.31}$$

Ejemplo 3.4. Utilizando la distribución rectangular equivalente de esfuerzos, calcule directamente la resistencia última de la viga analizada en el ejemplo 3.3.

Solución. La distribución de esfuerzos, de fuerzas internas y de deformaciones unitarias es como aparece en la figura 3.9. La cuantía balanceada de acero se calcula a partir de la ecuación (3.28*b*) como

$$\rho_b = 0.85 \times 0.85 \frac{4000}{60{,}000} \frac{87{,}000}{87{,}000 + 60{,}000} = 0.0284$$

y mediante comparación con la cuantía real de acero de 0.0102 se confirma que el elemento está subreforzado y que fallará por fluencia del acero. La profundidad del bloque equivalente de esfuerzos se encuentra a partir de la condición de equilibrio que exige que $C = T$. De esta manera, $0.85 f'_c ab = A_s f_y$ o $a = 2.35 \times 60{,}000/0.85 \times 4000 \times 10 = 4.15$. La distancia al eje neutro, de acuerdo con la definición del bloque rectangular de esfuerzos, es $c = a/\beta_1 = 4.15/0.85 = 4.89$. El momento último es

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = 2.35 \times 60{,}000(23 - 2.07) = 2{,}950{,}000 \text{ lb-pulg} = 246 \text{ klb-pie}$$

Los resultados de este análisis numérico simple y directo, con base en la distribución rectangular equivalente de esfuerzos, son idénticos a aquéllos previamente determinados a partir del análisis general de resistencia última de la sección 3.3*c*.

Para el diseño rutinario resulta conveniente combinar las ecuaciones (3.30) y (3.31) como sigue. Si se observa que $A_s = \rho bd$, la ecuación (3.31) puede reescribirse como

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} \tag{3.32}$$

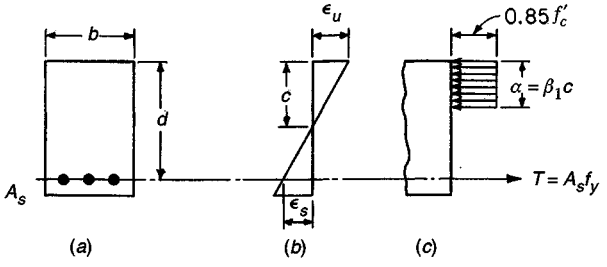


FIGURA 3.9
Viga rectangular simplemente reforzada.

Entonces, ésta puede sustituirse en la ecuación (3.30) para obtener

$$M_n = \rho f_y b d^2 \left(1 - 0.59 \frac{\rho f_y}{f'_c}\right) \tag{3.33}$$

que es idéntica a la ecuación (3.20*b*) deducida en la sección 3.3*c*. Esta ecuación básica puede simplificarse aún más como sigue:

$$M_n = R b d^2 \tag{3.34}$$

en la cual

$$R = \rho f_y \left(1 - 0.59 \frac{\rho f_y}{f'_c}\right) \tag{3.35}$$

El *factor de resistencia a la flexión R* depende sólo de la cuantía de acero y de las resistencias de los materiales, y puede tabularse fácilmente. Las tablas A.6*a* y A.6*b* del apéndice A dan los valores de R para combinaciones normales de acero y concreto, y para el intervalo completo de cuantías de acero usadas en la práctica.

De acuerdo con las disposiciones de seguridad del Código ACI, la resistencia nominal a la flexión M_n debe reducirse imponiendo un coeficiente de reducción de resistencia $\phi = 0.90$ para flexión y así obtener la *resistencia de diseño*:

$$\phi M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) \tag{3.36}$$

o, como alternativa,

$$\phi M_n = \phi \rho f_y b d^2 \left(1 - 0.59 \frac{\rho f_y}{f'_c}\right) \tag{3.37}$$

o

$$\phi M_n = \phi R b d^2 \tag{3.38}$$

d. Cuantía mínima de acero

Otra modalidad de falla puede ocurrir en vigas con muy poco refuerzo. Si la resistencia a la flexión de la sección fisurada es menor que el momento que produce agrietamiento de la sección no fisurada con anticipación, la viga va a fallar de inmediato y sin ningún aviso de peligro una vez que se forme la primera grieta de flexión. Para protegerse contra este tipo de falla se puede establecer un *límite inferior* para la cuantía de acero igualando el momento de agrietamiento, calculado a partir del módulo de rotura del concreto (ver la sección 2.9), con la resistencia de la sección fisurada.

Para una sección rectangular con un ancho b, un espesor total h y un espesor efectivo d (ver la figura 3.2*b*), el módulo elástico de la sección con respecto a la fibra a tensión es $bh^2/6$. Para las secciones transversales típicas puede suponerse de manera satisfactoria que $h/d = 1.1$ y el brazo interno de palanca para la falla a flexión es $0.95d$. Si el módulo de rotura se toma como $f_r = 7.5\sqrt{f'_c}$ como es usual, el análisis, al igualar el momento de agrietamiento a la resistencia a la flexión, resulta en

$$A_{s,\,\min} = \frac{1.8\sqrt{f'_c}}{f_y} b d \tag{3.39a}$$

Este desarrollo puede generalizarse para aplicarlo a vigas con una sección transversal en forma de T (ver, la sección 3.8 y la figura 3.13). Las ecuaciones correspondientes dependen de las dimensiones de

la sección transversal y de si la viga sometida a flexión tiene la aleta en tensión (losa) o en compresión. Mediante análisis se puede confirmar que para vigas T con dimensiones típicas que están sometidas a flexión con el ala en compresión, el área mínima de acero debe ser

$$A_{s,\,\min} = \frac{2.7\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \tag{3.39b}$$

donde b_w es el ancho del alma que se proyecta por debajo de la losa. A partir de un análisis similar puede establecerse que para vigas T sometidas a flexión con el ala en tensión, el área mínima de acero es

$$A_{s,\,\min} = \frac{6.2\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \tag{3.39c}$$

Los requisitos del código ACI para áreas mínima de acero se fundamentan en los anteriores resultados pero incluyen algunas diferencias. De acuerdo con el código ACI 10.5, en cualquier sección donde por análisis se requiera refuerzo a tensión, con algunas excepciones como se anota más adelante, el área A_s que se proporciona no debe ser menor que

$$A_{s,\,\min} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \geq \frac{200 b_w d}{f_y} \tag{3.40a}$$

Esto se aplica tanto a secciones en flexión positiva como negativa. La consideración del límite adicional de $200 b_w d/f_y$ se hace únicamente por razones históricas; esta ecuación da las mismas cuantías mínimas de acero de 0.005 que se establecían en los códigos anteriores para las resistencias de materiales usuales en ese momento. Obsérvese que en la ecuación 3.40*a* se utiliza el ancho de la sección b_w; se entiende que para secciones rectangulares, $b_w = b$. Además, obsérvese que el coeficiente del ACI de 3 es un valor redondeado conservadoramente en comparación con el valor de 2.7 de la ecuación 3.39*b* para vigas T con la aleta en compresión, y es muy conservador cuando se aplica a vigas de sección rectangular, para las cuales un análisis racional da un valor de 1.8 según la ecuación 3.39*a*. Esto refleja probablemente el punto de vista de que el acero mínimo para las secciones en flexión negativa de una viga T continua (que son de hecho secciones rectangulares como se analizó en la sección 3.8*c*) no debe ser menor que para las secciones en flexión positiva, donde los momentos son por lo general menores.

El código ACI 10.5 trata el caso de vigas T *estáticamente determinadas* con la aleta en *tensión* como un caso especial, para el cual el área mínima de acero es la *menor de*

$$A_{s,\,\min} = \frac{6\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d \tag{3.40b}$$

o el valor dado por la ecuación 3.40*a* con b_w tomado igual al ancho de la *aleta*. El coeficiente 6 del ACI en la ecuación 3.40*b* coincide aceptablemente bien con el valor obtenido de la ecuación 3.39*c*.

Obsérvese que las ecuaciones 3.40*a* y 3.40*b* del código ACI se expresan de manera conveniente en términos de una *cuantía mínima de acero a tensión* $\rho_{\min}$ dividiendo a ambos lados por $b_w d$.

De acuerdo con el código ACI 10.5, los requisitos de las ecuaciones 3.40*a* y 3.40*b* no necesitan imponerse si, en todas las secciones, el área de refuerzo a tensión suministrada es al menos un tercio mayor que la requerida por análisis. Esto proporciona refuerzo suficiente para elementos relativamente grandes tales como vigas sobre el terreno, donde las ecuaciones usuales exigirían cantidades excesivas de acero.

Para losas y zapatas estructurales de espesor uniforme, el área mínima de refuerzo a tensión en la dirección de la luz es la que se exige para retracción de refraguado y temperatura (ver la sección 12.3 y la tabla 12.2), y los valores mínimos anteriores no son obligatorios. El espaciamiento máximo de este acero debe ser el menor entre tres veces el espesor total de la losa y 18 pulgadas.

e. Ejemplos de revisión y diseño de vigas rectangulares

Los problemas de flexión pueden clasificarse en forma general en *problemas de revisión* o *problemas de diseño*. En los problemas de revisión se conocen las dimensiones de la sección, el refuerzo y las resistencias de los materiales, y se requiere calcular la capacidad a momento. Para el caso de los problemas de diseño, se determinan la capacidad requerida a momento y las resistencias de los materiales, y deben calcularse las dimensiones de la sección y el refuerzo. Los ejemplos 3.5 y 3.6 que se presentan a continuación ilustran los problemas de revisión y diseño, respectivamente.

Ejemplo 3.5. Resistencia a la flexión de un determinado elemento. Una viga rectangular tiene un ancho de 12 pulg y una altura efectiva de 17.5 pulg. Está reforzada con cuatro barras No. 9 en una sola fila. Si $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 4000$ lb/pulg^2, ¿cuál es la resistencia nominal a la flexión y cuál es el momento máximo que puede utilizarse en el diseño de acuerdo con el Código ACI?

Solución. A partir de la tabla A.2 del apéndice A, el área de cuatro barras No. 9 es 4.00 pulg^2. Por consiguiente, la cuantía real de acero es $\rho = 4.00/(12 \times 17.5) = 0.0190$. Este valor está muy por debajo de la cuantía balanceada de la ecuación (3.28*b*) que es

$$\rho_b = 0.85 \times 0.85\left(\frac{4}{60}\right)\left(\frac{87}{147}\right) = 0.0285$$

de manera que se tendría una falla por fluencia a tensión. Para esta viga subreforzada, a partir de la ecuación (3.31),

$$a = \frac{4.00 \times 60}{0.85 \times 4 \times 12} = 5.89 \text{ pulg}$$

y con la ecuación (3.30),

$$M_n = 4.00 \times 60\left(17.5 - \frac{5.89}{2}\right) = 3490 \text{ klb/pulg}$$

Si se aplica el coeficiente de reducción de resistencia para flexión $\phi = 0.90$, la resistencia de diseño debe tomarse igual a

$$\phi M_n = 0.90 \times 3490 = 3140 \text{ klb/pulg}$$

El Código ACI limita la cuantía de acero a los siguientes valores:

$$\rho_{\max} = 0.75 \times 0.0285 = 0.0214$$

$$\rho_{\min} = \frac{3\sqrt{4000}}{60{,}000} \geq \frac{200}{60{,}000} = 0.0033$$

La viga en consideración cumple los anteriores límites.

Ejemplo 3.6. Dimensiones de la sección de concreto y del área de acero necesarias para resistir un momento dado. Determine la sección transversal de concreto y el área de acero requeridas para una viga rectangular simplemente apoyada con una luz de 15 pies que debe sostener una carga muerta calculada de 1.27 klb/pie y una carga viva de servicio de 2.44 klb/pie. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

Solución. En primera instancia se aplican los coeficientes de carga determinados de servicio, para obtener las cargas mayoradas, y el momento correspondiente para los cuales debe diseñarse la viga:

$$w_u = 1.4 \times 1.27 + 1.7 \times 2.44 = 5.92 \text{ klb/pie}$$

$$M_u = \frac{1}{8} \times 5.92 \times 15^2 \times 12 = 2000 \text{ klb/pulg}$$

Las dimensiones de la sección de concreto dependen de la cuantía de acero escogida por el diseñador. Seleccionando la máxima cuantía de acero permisible, $\rho_{\max} = 0.75\,\rho_b$ se obtendrá la mínima sección posible de concreto. Con $\rho_b = 0.0285$ como en el ejemplo 3.5,

$$\rho = 0.75 \times 0.0285 = 0.0214$$

La resistencia requerida a la flexión se iguala con la resistencia de diseño de la ecuación (3.37), y se sustituyen los valores seleccionados para ρ y para la resistencia de los materiales,

$$M_u = \phi M_n$$

$$2000 = 0.90 \times 0.0214 \times 60bd^2\left(1 - 0.59\frac{0.0214 \times 60}{4}\right)$$

a partir de lo cual

$$bd^2 = 2130 \text{ pulg}^3$$

Una viga con ancho $b = 10$ pulg y $d = 14.6$ pulg satisface los anteriores requisitos. El área de acero requerida se encuentra aplicando la cuantía seleccionada de acero a las dimensiones de la sección de concreto:

$$A_s = 0.0214 \times 10 \times 14.6 = 3.12 \text{ pulg}^2$$

Dos barras No. 11 proporcionan exactamente esta área.

Si se supone un recubrimiento de concreto de 2.5 pulg desde el centroide de las barras, la altura total exigida es $h = 17.1$ pulg. En la práctica, sin embargo, las dimensiones del concreto b y h siempre se redondean a la pulgada inmediatamente superior y en general al múltiplo más cercano de 2 pulgadas (ver la sección 3.5). El valor real de d se encuentra entonces restando el recubrimiento requerido de concreto de la dimensión h. Para este ejemplo se seleccionará $b = 10$ pulg y $h = 18$ pulg, obteniéndose un espesor efectivo $d = 15.5$ pulg. Se puede, entonces, lograr una economía adicional refinando el cálculo del área de acero con base en el mayor espesor efectivo real. Es posible obtener la cuantía necesaria de acero revisada resolviendo directamente la ecuación (3.37) para ρ, con $\phi M_n = M_u$. Una solución más rápida puede obtenerse mediante iteración. Primero se supone un valor razonable para a y se encuentra el valor de A_s a partir de la ecuación (3.36). Con la ecuación (3.3 1) se obtiene un estimativo revisado de a y se revisa A_s. Este método converge muy rápidamente. Por ejemplo, si se supone $a = 5$ pulg, se tiene

$$A_s = \frac{2000}{0.90 \times 60(15.5 - 2.5)} = 2.85 \text{ pulg}^2$$

Se comprueba el valor supuesto de a:

$$a = \frac{2.85 \times 60}{0.85 \times 4 \times 10} = 5.03 \text{ pulg}$$

Este valor está suficientemente cerca del valor supuesto, de manera que no se requieren cálculos adicionales. Para proporcionar el área de acero requerida de 2.85 pulg^2, puede usarse una barra No. 11 más una barra No. 10, pero por facilidad de construcción se usarán dos barras No. 11 como antes.

Una sección transversal un poco mayor de la viga y con menos acero puede ser más económica y tenderá a reducir las deflexiones. Como una solución alterna, la viga se rediseñará con una cuantía menor de refuerzo, de $\rho = 0.50\rho_b = 0.50 \times 0.0285 = 0.0143$. Se iguala la resistencia requerida a la resistencia de diseño [ecuación (3.37)] como antes:

$$2000 = 0.90 \times 0.0143 \times 60bd^2\left(1 - 0.59\frac{0.0143 \times 60}{4}\right)$$

y

$$bd^2 = 2960 \text{ pulg}^3$$

Una viga con $b = 10$ pulg y $d = 17.2$ pulg cumplirá este requisito, para lo cual

$$A_s = 0.0143 \times 10 \times 17.2 = 2.46 \text{ pulg}^2$$

Dos barras No. 10, que proveen un área de 2.53 pulg^2, serían suficientes. Si la altura total de concreto se redondea hacia arriba hasta 20 pulg, se obtiene un espesor efectivo de 17.5 pulg, que disminuye el área necesaria de acero a 2.41 pulg^2. Dos barras No. 10 seguirán siendo la mejor selección.

Parece evidente que es posible encontrar una cantidad infinita de soluciones al problema planteado, dependiendo de la cuantía seleccionada de acero. De acuerdo con el Código ACI la cuantía para vigas puede variar desde un límite superior de $0.75\rho_b$ hasta un límite inferior de

$3\sqrt{f'_c}/f_y \geq 200/f_y$. Si se comparan las dos soluciones (con las dimensiones teóricas, sin redondear los resultados para efectos de la comparación y con el supuesto de que h es 2.5 pulgadas mayor que d en cada caso) se concluye que un aumento del 15 por ciento en el área de la sección de concreto, produce un ahorro del 21 por ciento en el acero. La segunda solución resultaría con certeza más económica y sería preferible a menos que se requiera minimizar las dimensiones de la viga por razones arquitectónicas o funcionales.

Existe una situación que ocurre a menudo, que no se clasifica de modo estricto en ninguna de las dos categorías de problemas de revisión o de diseño anteriores. Las dimensiones del concreto se conocen y se sabe que son adecuadas para resistir el momento requerido, y es necesario encontrar solamente el área de acero. Típicamente, ésta es la situación que se presenta en el diseño de las secciones críticas de vigas continuas, en las cuales las dimensiones del concreto se mantienen, por lo general, constantes, aunque el acero de refuerzo varía a lo largo de la luz de acuerdo con la resistencia exigida a la flexión. Las dimensiones b, d y h se determinan en las secciones de máximo momento, usualmente en uno de los apoyos. En los demás apoyos y en los centros de la luz donde los momentos son en general menores, se sabe que las dimensiones del concreto son adecuadas y únicamente queda por encontrar el acero a tensión. Una situación idéntica se encontró en el problema de diseño del ejemplo 3.6, en el cual las dimensiones del concreto se redondearon hacia arriba a partir de los valores mínimos requeridos y se necesitaba encontrar el área de acero exigida. En cualquier caso, resulta conveniente el proceso iterativo indicado en el ejemplo 3.6.

Ejemplo 3.7. Determinación del área de acero. Con las mismas dimensiones de la sección de concreto que se utilizaron para la segunda solución del ejemplo 3.6 (b = 10 pulg, d = 17.5 pulg y h = 20 pulg) y las mismas resistencias de los materiales, encuentre el área de acero necesaria para resistir un momento M_u de 1600 klb-pulg.

Solución. Se supone a = 4.0 pulg. Entonces

$$A_s = \frac{1600}{0.90 \times 60(17.5 - 2.0)} = 1.91 \text{ pulg}^2$$

Se revisa el valor supuesto de a:

$$a = \frac{1.91 \times 60}{0.85 \times 4 \times 10} = 3.37 \text{ pulg}$$

Luego se supone a = 3.2 pulg y se vuelve a calcular A_s:

$$A_s = \frac{1600}{0.90 \times 60(17.5 - 1.6)} = 1.86 \text{ pulg}^2$$

No se requieren iteraciones adicionales. Utilice A_s = 1.86 pulg. Se usarán dos barras No. 9.

En la solución de los ejemplos anteriores se utilizaron las ecuaciones básicas con el fin de lograr una familiarización con las mismas. Sin embargo, en la práctica resulta más conveniente utilizar ayudas de diseño como la tabla A.5 del apéndice A, que proporciona los valores para las cuantías balanceadas, máximas y mínimas, y la tabla A.6, que ofrece valores del factor de resistencia a la flexión R. Los problemas de ejemplo se repetirán en la sección 3.5 para demostrar la utilización de estas ayudas.

f. Vigas sobrerreforzadas

De acuerdo con el Código ACI, todas las vigas deben diseñarse para las condiciones subreforzadas con cuantías de acero a tensión muy por debajo del valor de la cuantía balanceada y con $f_s = f_y$ en la falla.

Ocasionalmente, sin embargo, cuando se revisa la capacidad de una construcción existente, puede ser necesario calcular la resistencia a la flexión de un elemento sobrerreforzado, para el cual f_s es menor que f_y en la falla a flexión.

En este caso, la deformación unitaria del acero de la figura 3.9*b* va a ser menor que la deformación unitaria de fluencia, pero puede expresarse en términos de la deformación unitaria del concreto ϵ_u y de la distancia c al eje neutro, aún desconocida:

$$\epsilon_s = \epsilon_u \frac{d - c}{c} \tag{3.41}$$

A partir del requisito de equilibrio que exige que $C = T$, se puede formular

$$0.85\beta_1 f'_c bc = \rho \epsilon_s E_s bd$$

Si se remplaza la deformación unitaria del acero de la ecuación (3.41) en esta última ecuación, y con la definición de $k_u = c/d$, se obtiene una ecuación cuadrática para k_u, como sigue:

$$k_u^2 + m\rho k_u - m\rho = 0$$

Aquí, $\rho = A_s/bd$ como antes, y m es un parámetro del material estipulado por

$$m = \frac{E_s \epsilon_u}{0.85\beta_1 f'_c} \tag{3.42}$$

Se soluciona la ecuación cuadrática para k_u:

$$k_u = \sqrt{m\rho + \left(\frac{m\rho}{2}\right)^2} - \frac{m\rho}{2} \tag{3.43}$$

La localización del eje neutro para la viga sobrerreforzada puede determinarse fácilmente a partir de $c = k_u d$, después de lo cual la profundidad del bloque de esfuerzos da como resultado $a = \beta_1 c$. Entonces, con la deformación del acero ϵ_s calculada a partir de la ecuación (3.41), y con $f_s = E_s \epsilon_s$, la resistencia nominal a flexión es

$$M_n = A_s f_s \left(d - \frac{a}{2}\right) \tag{3.44}$$

3.5 AYUDAS DE DISEÑO

Las ecuaciones básicas para el análisis y diseño de vigas de concreto reforzado se desarrollaron en la sección 3.4 y fueron utilizadas directamente en los ejemplos. En la práctica, el diseño de las vigas y de otros elementos de concreto reforzado se facilita considerablemente mediante el uso de ayudas como las presentadas en el apéndice A y en las referencias 3.6 a 3.8. Las tablas A.1, A.2, A.5, hasta la A.8, y el gráfico A.1 del apéndice A, se relacionan de modo directo con este capítulo y el estudiante puede repasar este material para familiarizarse con su cubrimiento. En capítulos posteriores se analizarán otras ayudas de diseño y se demostrará su uso.

La ecuación (3.38) de la sección 3.4 da la resistencia de diseño a flexión ϕM_n de una viga rectangular reforzada a tensión con cuantía de acero en el valor balanceado o próximo a él. El factor de resistencia a la flexión R de la ecuación (3.35) se presenta en la tabla A.6*a* para cuantías menores de acero o en la tabla A.6*b* para cuantías superiores. De manera alternativa, R puede obtenerse a partir del gráfico A.1. Con el fin de *revisar* la capacidad de una sección para la cual se conocen las dimensiones de la sección de concreto b y d, la cuantía de acero ρ y las resistencias de los materiales, el valor de la resistencia de diseño ϕM_n, puede obtenerse en forma directa con la ecuación (3.38).

Para propósitos *de diseño*, donde es necesario determinar las dimensiones del concreto y la cantidad de refuerzo para resistir un momento dado para cargas mayoradas M_u, existen dos metodologías posibles. La primera comienza con la selección de la cuantía óptima de acero para luego calcular las dimensiones de la sección de concreto de la siguiente manera:

1. Se toma la resistencia requerida M_u igual a la resistencia de diseño ϕM_n, con la ecuación (3.38):
$$M_u = \phi R b d^2$$
2. Con la ayuda de la tabla A.5, se selecciona una cuantía apropiada entre ρ_{max} y ρ_{min}. Por lo general, una cuantía alrededor de $0.50\rho_b$ será una selección económica y práctica.
3. A partir de la tabla A.6 se encuentra el factor de resistencia a la flexión R para las resistencias especificadas de los materiales y para la cuantía seleccionada. Entonces
$$bd^2 = \frac{M_u}{\phi R}$$
4. Luego se seleccionan b y d para cumplir el anterior requisito. A menos que deba limitarse la altura por razones constructivas o por otro tipo de restricciones, la altura efectiva debería aproximadamente ser dos a tres veces el ancho de la viga.
5. Se calcula el área de acero que se requiere
$$A_s = \rho b d$$
Luego, con referencia a la tabla A.2, se escoge el tamaño y el número de barras, dando preferencia a tamaños de barra mayores para minimizar los costos de vaciado.
6. Se consulta la tabla A.8 para verificar si el ancho de viga seleccionado proporciona espacio suficiente para las barras escogidas de manera que se logren recubrimientos del concreto y espaciamientos adecuados. (Estos puntos se analizarán con mayor detalle en la sección 3.6.)

La metodología alterna comienza con la selección de las dimensiones del concreto, después de que se encuentra el refuerzo requerido de la siguiente manera:

1. Se selecciona el ancho de la viga b y la altura efectiva d. Después se calcula el valor requerido de R:
$$R = \frac{M_u}{\phi b d^2}$$
2. Con la tabla A.6, y para las resistencias específicas de los materiales, se determina la cuantía de acero ρ, correspondiente a R.
3. Se calcula el área requerida de acero
$$A_s = \rho b d$$
Y a partir de la tabla A.2, se selecciona el tamaño y número de barras.
4. Con la tabla A.8 se confirma si el ancho de la viga es suficiente para colocar el refuerzo seleccionado.

A continuación se ilustra la utilización de las ayudas de diseño para resolver los problemas ejemplificados en la sección 3.4.

Ejemplo 3.8. Resistencia a la flexión para un elemento determinado. Calcule la resistencia nominal a flexión y la resistencia de diseño de la viga del ejemplo 3.5, que tiene $b = 12$ pulg y $d = 17.5$ pulg, y está reforzada con cuatro barras No. 9. Utilice las ayudas de diseño del apéndice A. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

Solución. A partir de la tabla A.2, cuatro barras No. 9 proporcionan un $A_s = 4.00$ pulg^2, y con $b = 12$ pulg y $d = 17.5$ pulg, la cuantía del acero es $\rho = 4.00/(12 \times 17.5) = 0.0190$. De acuerdo con la tabla A.8, este valor es inferior a $\rho_{max} = 0.0214$ y es superior a $\rho_{min} = 0.0033$. Luego, en la tabla A.6*b*, con $f'_c = 4000$ lb/pulg^2, $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $\rho = 0.019$, se encuentra un valor de $R = 949$ lb/pulg^2. Las resistencias nominales y de diseño son respectivamente

$$M_n = Rbd^2 = 949 \times 12 \times \frac{17.5^2}{1000} = 3490 \text{ klb-pulg}$$

$$\phi M_n = 0.90 \times 3490 = 3140 \text{ klb-pulg}$$

igual que antes.

Ejemplo 3.9. Dimensiones de la sección de concreto y área de acero necesarias para resistir un momento dado. Determine la sección transversal de concreto y el área de acero requeridas para la viga del ejemplo 3.6, utilizando las ayudas de diseño del apéndice A. $M_u = 2000$ klb-pulg, $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. Utilice una cuantía de acero igual a la mitad del valor balanceado.

Solución. En la tabla A.5 se encuentra que la cuantía balanceada de acero es $\rho_b = 0.0285$. Por economía se utilizará un valor de $\rho = 0.50\rho_b = 0.0143$. Si se interpola en la tabla A.6*a*, el valor requerido de R es 750. Entonces

$$bd^2 = \frac{M_u}{\phi R} = \frac{2000 \times 1000}{0.90 \times 750} = 2960 \text{ pulg}^3$$

Con dimensiones de la sección de concreto de $b = 10$ pulg y $d = 17.2$ pulg se satisface lo anterior, pero la altura efectiva se redondeará hacia arriba hasta 17.5 pulg, para conseguir un espesor total de la viga de 20.0 pulg. Se obtiene entonces

$$R = \frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{2000 \times 1000}{0.90 \times 10 \times 17.5^2} = 726 \text{ lb/pulg}^2$$

y con la tabla A.6*a*, por interpolación $\rho = 0.0138$. Esto conduce a una exigencia de acero de $A_s = 0.0138 \times 10 \times 17.5 = 2.41$ pulg^2, igual que antes.

Ejemplo 3. 10. Determinación del área de acero. Encuentre el área de acero necesaria para la viga del ejemplo 3.7 con dimensiones de la sección de concreto de $b = 10$ pulg y $d = 17.5$ pulg, las cuales se sabe que son adecuadas para sostener un momento para cargas mayoradas de 1600 lb-pulg. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

Solución. Observe que en aquellos casos en que se sabe que las dimensiones del concreto son adecuadas y sólo se requiere encontrar el refuerzo, no es necesario utilizar el método iterativo propuesto anteriormente. El factor necesario de resistencia a la flexión es

$$R = \frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{1600 \times 1000}{0.90 \times 10 \times 17.5^2} = 580 \text{ lb/pulg}^2$$

De acuerdo con la tabla A.6*a*, en las resistencias especificadas para los materiales, esto corresponde a una cuantía de acero de $\rho = 0.0107$, que da como resultado un área de acero de

$$A_s = 0.01107 \times 10 \times 17.5 = 1.87 \text{ pulg}^2$$

igual que antes (excepto por una pequeña diferencia a causa del redondeo). Se utilizarán, entonces, dos barras No. 9.

Las tablas y gráficos del apéndice A dan información básica y se utilizan ampliamente a lo largo del texto con propósitos ilustrativos. El lector debe estar atento, sin embargo, a la gran cantidad de versiones difundidas de estas tablas, además de muchos otros recursos útiles que pueden encontrarse, entre otros, en las referencias 3.6, 37 y 3.8.

3.6 ASPECTOS PRÁCTICOS EN EL DISEÑO DE VIGAS

Con el fin de enfocar inicialmente la atención en los rasgos fundamentales del diseño a flexión, los ejemplos precedentes se desarrollaron apenas con ciertas particularidades mínimas de algunos aspectos prácticos, que siempre influyen en el diseño real de vigas. Estos aspectos se relacionan con la dimensión óptima del concreto para vigas, el redondeo y la estandarización de las dimensiones, el recubrimiento requerido para los refuerzos principal y secundario, y la selección y combinación de barras. Un buen criterio por parte del diseñador es particularmente importante en la transformación de los requisitos teóricos en un diseño práctico. Algunos de los rasgos más importantes se analizan aquí; las publicaciones del ACI (referencias 3.6 y 3.7) y del CRSI (referencias 3.8 a 3.10) suministran gran cantidad de ayuda adicional.

a. Protección de concreto para el refuerzo

Para dar al acero una adecuada protección de concreto contra el fuego y la corrosión, el diseñador debe mantener un espesor mínimo de recubrimiento de concreto en la parte exterior del acero más expuesto. El espesor requerido varía, pues depende del tipo de elemento y de las condiciones de exposición. Según el Código ACI 7.7, para concreto vaciado en el sitio, la protección de concreto para superficies no expuestas directamente al terreno o a la intemperie no debe ser menor que $\frac{3}{4}$ de pulgada para losas y muros, y que $1\frac{1}{2}$ pulgadas para vigas y columnas. Si la superficie de concreto se expone a la intemperie o está en contacto con el terreno, se requiere un recubrimiento protector de por lo menos 2 pulgadas $1\frac{1}{2}$ pulgadas para barras No. 5 y menores) excepto cuando el concreto se coloca directamente en contacto con el terreno sin la utilización de formaletas, en cuyo caso debe proveerse un recubrimiento de por lo menos 3 pulgadas.

En general, los centros de las barras principales a flexión en vigas deben colocarse de $2\frac{1}{2}$ a 3 pulgadas desde la superficie superior o inferior de la viga, con el fin de suministrar un recubrimiento tanto para las barras como para los estribos de por lo menos $1\frac{1}{2}$ pulgadas (ver la figura 3.10). En losas, una pulgada hasta el centro de la barra es suficiente para proveer el *aislamiento* requerido de $\frac{3}{4}$ de pulgada.

Con el fin de simplificar la construcción y, en consecuencia, reducir costos, las dimensiones globales de la sección de concreto en vigas, b y h, se redondean casi siempre hacia arriba hasta la pulgada más cercana y, con frecuencia, hasta el siguiente múltiplo de 2 pulgadas. Como resultado, la altura efectiva real d que se obtiene al restar de la altura total h la suma de la distancia del recubrimiento, el diámetro del estribo y la mitad del diámetro del refuerzo principal, pocas veces resulta en una dimensión par. Para losas, el espesor total se redondea, en general, hacia arriba a la $\frac{1}{2}$ pulgada más cercana hasta un valor de 6 pulgadas y a la pulgada más cercana por encima de éste. Las diferencias entre h y d que aparecen en la figura 3. 10 no son exactas pero son satisfactorias para propósitos de diseño de

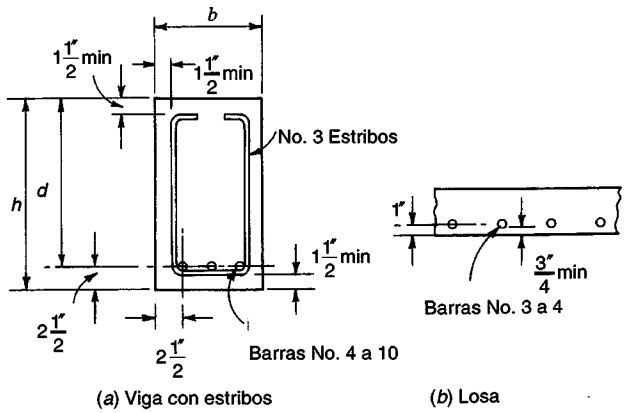


FIGURA 3.10
Requisitos del recubrimiento de concreto en vigas y losas.

vigas con estribos No. 3 y barras longitudinales No. 10 o menores, y para losas con barras No. 4 o menores. Si se utilizan barras mayores para el refuerzo principal a flexión o para los estribos, situación bastante frecuente, las dimensiones correspondientes pueden calcularse sin dificultad.

Dadas las pequeñas tolerancias que pueden lograrse bajo condiciones controladas en planta, el Código ACI 7.7.2 permite algunas reducciones en la protección de concreto para el refuerzo en el caso de concreto prefabricado.

b. Dimensiones del concreto

Las vigas de concreto reforzado pueden ser anchas y de poca altura, o relativamente delgadas y altas. Las consideraciones de máxima economía en los materiales, por lo general, conducen a unas proporciones con altura efectiva d en el intervalo aproximado de dos a tres veces el ancho b (o ancho del alma b_w para vigas T). Sin embargo, se presentan restricciones que pueden obligar a adoptar otras proporciones. Por ejemplo, para el sistema de entrepiso conformado por viguetas de concreto en una dirección y apoyadas sobre vigas monolíticas (ver el capítulo 20), el uso de una misma altura total para vigas y viguetas tolera la utilización de una formaleta de fondo plano que da como resultado una construcción rápida y económica, y permite un cielo raso nivelado. Las vigas principales generalmente serán anchas, de poca altura y con mayor cuantía de refuerzo, pero se logrará en definitiva un ahorro en los costos de construcción. En otras circunstancias puede ser necesario limitar la altura total del sistema de entrepiso o de cubierta por razones arquitectónicas u otras consideraciones. Una ventaja del concreto reforzado es su adaptabilidad a estas necesidades especiales.

c. Selección y espaciamiento de las barras

Como se indicó en la sección 2.12, los tamaños usuales para barras de refuerzo varían entre la No. 3 y la No. 11; el número de la barra corresponde en forma aproximada al número de octavos de pulgada del diámetro de la misma. Los dos tamaños mayores, la No. 14 ($1\frac{3}{4}$ pulg de diámetro) y la No. 18 ($2\frac{1}{4}$ pulg de diámetro) se utilizan principalmente en columnas.

Es aconsejable combinar los tamaños de las barras, con el fin de cumplir en forma más exacta una exigencia de área de acero. En general, las barras mezcladas deben ser de diámetro comparable por razones tanto prácticas como teóricas, y regularmente deben disponerse de manera simétrica con respecto a la línea central vertical. Muchos diseñadores limitan la variación en los diámetros de las barras para una sola fila a dos tamaños de barra, utilizando por ejemplo las barras Nos. 8 y 10 juntas, pero no las Nos. 11 y 6. Existen algunas ventajas prácticas al minimizar el número de los diferentes tamaños de barra utilizados en una estructura.

Normalmente es necesario mantener una distancia mínima entre barras adyacentes con el fin de asegurar una colocación adecuada del concreto con respecto a ellas. Deben evitarse bolsas de aire por debajo del acero y es aconsejable obtener una superficie completa de contacto entre las barras y el concreto para hacer óptima la resistencia por adherencia. El Código ACI 7.6 especifica que la mínima distancia libre entre barras adyacentes no debe ser menor que el diámetro nominal de las barras o que una pulgada. (Para columnas, estos requisitos deben aumentarse a $1\frac{1}{2}$ diámetros de barra y a $1\frac{1}{2}$ pulgadas.) Cuando el refuerzo de las vigas se coloca en dos o más filas, la distancia libre entre filas no debe ser menor que una pulgada, y las barras de la fila superior deben colocarse directamente encima de aquéllas de la fila inferior.

La cantidad máxima de barras que pueden colocarse en una viga con determinado ancho está limitada por el diámetro de la barra y por los requisitos de espaciamiento; también influye el diámetro del estribo, el recubrimiento requerido de concreto y el tamaño máximo del agregado especificado para el concreto. La tabla A.8 del apéndice A presenta el número máximo de barras que

pueden colocarse en una sola fila en vigas, que suponen un recubrimiento de $1\frac{1}{2}$ pulgadas y la utilización de estribos No. 4. También hay restricciones en cuanto a la cantidad mínima de barras que pueden colocarse en una sola fila con base en los requisitos de control de agrietamiento (ver la sección 6.3). La tabla A.9 presenta la cantidad mínima de barras que satisfacen los requisitos del Código ACI, los cuales se analizarán en el capítulo 6.

En vigas y columnas grandes, a veces resulta ventajoso agrupar el refuerzo a tensión o a compresión en dos, tres o cuatro barras en contacto con el fin de suministrar un mejor vaciado del concreto alrededor y entre los grupos adyacentes. Puede suponerse que estas barras actúan como una unidad, con no más de cuatro barras en cualquier grupo, siempre y cuando el grupo esté rodeado por estribos o flejes. No deben agruparse más de dos barras en un mismo plano; las formas de agrupamiento común siguen patrones triangulares, cuadrados o en forma de L. Las barras individuales en un grupo, que tengan que suspenderse dentro de la luz de un elemento a flexión, deben terminar en diferentes puntos. El Código ACI 7.6.6 exige que los puntos de corte se escalonen a distancias mínimas de 40 diámetros de barra. Cuando los requisitos de límites de espaciamiento y de recubrimiento mínimo de concreto se basen en el diámetro de la barra, una unidad de barras agrupadas debe tratarse como una barra simple con un diámetro equivalente de proporción a un área igual a la de las barras en grupo.

El Código ACI 7.6.6 establece que en el caso de las vigas no deben agruparse barras mayores que la No. 11, aunque las especificaciones AASHTO permiten agrupar barras Nos. 14 y 18 en vigas de puentes vehiculares. Debe prestarse especial atención al control de agrietamiento si se utilizan barras en grupo como refuerzo a flexión (ver la sección 6.3).

3.7 VIGAS RECTANGULARES CON REFUERZO A TENSIÓN Y A COMPRESIÓN

Si la sección transversal de una viga se limita a causa de consideraciones arquitectónicas u otras restricciones, puede ocurrir que el concreto no sea capaz de desarrollar la fuerza necesaria de compresión para resistir el momento actuante. En este caso, se adiciona refuerzo en la zona de compresión, dando como resultado una viga que se denomina *doblemente reforzada*, es decir, una viga con refuerzo a compresión al igual que a tensión. La utilización del refuerzo a compresión ha disminuido en forma significativa la introducción y el uso más difundido de los métodos de diseño a la resistencia, los cuales tienen en cuenta el potencial de resistencia completo del concreto en el lado de compresión del eje neutro. Sin embargo, existen situaciones en las que se utiliza el refuerzo a compresión por razones diferentes de las de resistencia. Se ha encontrado que incluir algún acero en la zona de compresión reduce las deflexiones a largo plazo del elemento (ver la sección 6.5). Además, en algunos casos se colocan barras en la zona de compresión para considerar situaciones de carga que producen momentos de signo contrario (ver la sección 11.2) o como barras continuas a lo largo de la luz de la viga para servir de soporte a los estribos (ver el capítulo 4). A menudo es aconsejable tener en cuenta la presencia de este refuerzo en el diseño a flexión aunque en muchos casos, éste se desprecia en los cálculos de la flexión.

a. Acero a tensión y a compresión, ambos en el esfuerzo de fluencia

Si la cuantía de acero a tensión ρ en una viga doblemente reforzada es igual o menor que ρ_b, la resistencia de la viga puede calcularse dentro de límites aceptables, sin tener en cuenta las barras a compresión. La resistencia de una viga así reforzada va a estar controlada por la fluencia a tensión, y en general, la presencia de las barras a compresión va a afectar muy poco el brazo de palanca del momento resistente.

Si la cuantía de acero a tensión es mayor que ρ_b, se requiere un análisis un poco más elaborado. En la figura 3.11*a*, aparece la sección transversal de una viga rectangular con acero a compresión A'_s

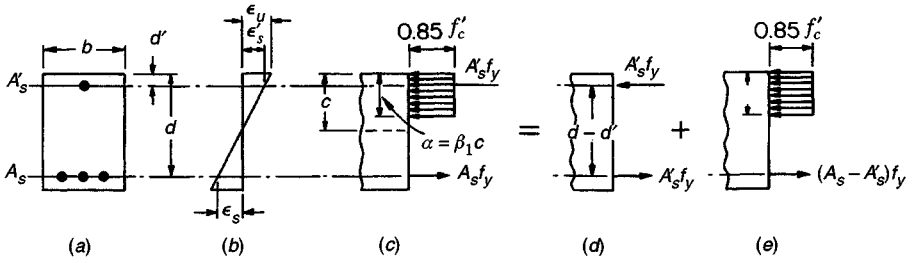


FIGURA 3.11
Viga rectangular doblemente reforzada.

localizada a una distancia d' desde la cara de compresión y con un acero a tensión A_s al nivel de la altura efectiva d. Se supone que inicialmente tanto A_s como A'_s alcanzan el esfuerzo de fluencia f_y en el momento de la falla. El momento resistente total puede visualizarse como la suma de dos partes. La primera parte, M_{n1}, la proporciona el par conformado por la fuerza en el acero a compresión A'_s y la fuerza de un área equivalente del acero a tensión

$$M_{n1} = A'_s f_y (d - d') \tag{3.45a}$$

como aparece en la figura 3.11*d*. La segunda parte, M_{n2}, es la contribución del acero restante a tensión $A_s - A'_s$ que actúa con el concreto a compresión:

$$M_{n2} = (A_s - A'_s) f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) \tag{3.45b}$$

como aparece en la figura 3.11*e*, donde el espesor del bloque de esfuerzo es

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b} \tag{3.46a}$$

Con las definiciones $\rho = A_s/bd$ y $\rho' = A'_s/bd$, esto puede formularse así:

$$a = \frac{(\rho - \rho') f_y d}{0.85 f'_c} \tag{3.46b}$$

Entonces, el momento nominal resistente total es

$$M_n = M_{n1} + M_{n2} = A'_s f_y (d - d') + (A_s - A'_s) f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) \tag{3.47}$$

De acuerdo con las disposiciones de seguridad del Código ACI, la capacidad nominal debe reducirse multiplicándola por un coeficiente $\phi = 0.90$ para obtener la resistencia de diseño.

Es aconsejable, por las razones dadas anteriormente, que la falla, en caso de que se presente, se produzca por fluencia del acero a tensión en vez de que ocurra por aplastamiento del concreto. Esto se puede garantizar estableciendo un *límite superior* en la cuantía del acero a tensión. Si se adopta la deformación unitaria del acero en tensión equivalente a ϵ_y en la figura 3.11*b*, para establecer la localización del eje neutro en la condición de falla balanceada, y si se suman las fuerzas horizontales que aparecen en la figura 3.11*c* (suponiendo todavía que el acero a compresión está en el esfuerzo de fluencia en la falla), se puede demostrar fácilmente que la cuantía balanceada de acero $\overline{\rho}_b$ para una viga doblemente reforzada es

$$\overline{\rho}_b = \rho_b + \rho' \tag{3.48}$$

donde ρ_b es la cuantía balanceada de acero para la viga simplemente reforzada correspondiente, y se calcula a partir de la ecuación (3.28*a*). Para asegurar que el margen contra una falla frágil del

concreto sea igual para las vigas doblemente reforzadas como para las vigas con refuerzo sencillo, según el Código ACI 10.3.3,

$$\overline{\rho}_{\max} = 0.75\rho_b + \rho' \tag{3.49}$$

b. Acero a compresión por debajo del esfuerzo de fluencia

Las ecuaciones anteriores, mediante las cuales se desarrolla en forma clara y concisa el análisis fundamental de vigas doblemente reforzadas, son válidas *únicamente* si el acero a compresión fluye cuando la viga alcanza su capacidad última. En muchos casos, como el de vigas anchas de poca altura, vigas con un recubrimiento de concreto sobre las barras de compresión mayor que el usual, o vigas con cantidades relativamente pequeñas de refuerzo a tensión, el esfuerzo de las barras a compresión estará por debajo del de fluencia en la falla. En consecuencia, es necesario desarrollar ecuaciones más generales para tener en cuenta la posibilidad de que el refuerzo a compresión no fluya cuando la viga doblemente reforzada falle en la flexión.

A continuación se presenta el método para determinar si el acero a compresión fluye o no en la falla. Con referencia a la figura 3.11*b*, y si se toma como caso límite $\epsilon'_s = \epsilon_y$, se obtiene por geometría

$$\frac{c}{d'} = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u - \epsilon_y} \qquad \text{o} \qquad c = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u - \epsilon_y} d'$$

Si se suman las fuerzas en la dirección horizontal (figura 3.11*c*) se obtiene la cuantía de acero a tensión *mínima* $\overline{\rho}_{cy}$ que asegurará la fluencia del acero a compresión en la falla:

$$\overline{\rho}_{cy} = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{d'}{d} \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u - \epsilon_y} + \rho' \tag{3.50a}$$

Si se toma, como es usual, $\epsilon_u = 0.003$ como es usual y $\epsilon_y = f_y / E_s$ con $E_s = 29{,}000{,}000$ lb/pulg^2, se obtiene en forma alternativa.

$$\overline{\rho}_{cy} = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{d'}{d} \frac{87{,}000}{87{,}000 - f_y} + \rho' \tag{3.50b}$$

Si la *cuantía de acero a tensión* es *menor que* este valor límite, el eje neutro está suficientemente alto de manera que el esfuerzo del acero a compresión en la falla es menor que el esfuerzo de fluencia. En este caso puede demostrarse, con base en la figura 3.11 *b* y *c*, que la cuantía balanceada de acero es

$$\overline{\rho}_b = \rho_b + \rho' \frac{f'_s}{f_y} \tag{3.51}$$

donde

$$f'_s = E_s \epsilon'_s = E_s \left[\epsilon_u - \frac{d'}{d} (\epsilon_u + \epsilon_y) \right] \text{y} \leq f_y \tag{3.52}$$

De esta manera, la cuantía máxima de acero permitida por el Código ACI 10.3.3es

$$\overline{\rho}_{\max} = 0.75\rho_b + \rho' \frac{f'_s}{f_y} \tag{3.53}$$

En consecuencia, las ecuaciones (3.5 1) y (3.53), con f'_s dado por la ecuación (3.52), son las formas generalizadas de las ecuaciones (3.48) y (3.49).

Se debe hacer énfasis en que la ecuación (3.52) para el esfuerzo en el acero a compresión se aplica *únicamente para una viga con la cuantía exacta balanceada de acero a tensión.*

Si la cuantía de acero a tensión es menor que $\overline{\rho}_b$, de acuerdo con la ecuación (3.51), y es menor que $\overline{\rho}_{cy}$, determinada por la ecuación (3.50), entonces el acero a tensión se encuentra en el esfuerzo de fluencia en la falla pero el acero de compresión no, y deben desarrollarse nuevas ecuaciones para el esfuerzo en el acero de compresión y para la resistencia a la flexión. El esfuerzo en el acero a compresión puede expresarse en términos de la aún desconocida localización del eje neutro:

$$f_s' = \epsilon_u E_s \frac{c - d'}{c} \tag{3.54}$$

El estudio del equilibrio de fuerzas horizontales (figura 3. 11*c* con el esfuerzo en el acero a compresión igual a f_s') da como resultado

$$A_s f_y = 0.85\beta_1 f_c' bc + A_s' \epsilon_u E_s \frac{c - d'}{c} \tag{3.55}$$

Ésta es una ecuación cuadrática en c, que es la única incógnita y, por tanto, puede resolverse fácilmente para obtener su valor. La resistencia nominal a flexión se encuentra remplazando el valor de f_s' obtenido de la ecuación (3.54) y de $a = \beta_1 c$ en la expresión

$$M_n = 0.85 f_c' ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + A_s' f_s'(d - d') \tag{3.56}$$

Esta capacidad nominal debe reducirse mediante el coeficiente $\phi = 0.90$ para obtener la resistencia de diseño.

Si se utilizan barras a compresión en elementos sometidos a flexión, deben tomarse precauciones para asegurar que estas barras no se pandeen hacia afuera al estar sometidas a carga, descascarando el concreto del recubrimiento. El Código ACI 7.11.1 exige que estas barras estén ancladas de la misma manera que las barras de compresión en columnas están ancladas por flejes transversales (ver la sección 8.2). Estos flejes se deben utilizar en toda la zona donde se exija el refuerzo a compresión.

c. Ejemplos de revisión y diseño de vigas con acero a tensión y a compresión

Como en el caso de vigas con refuerzo a tensión únicamente, los problemas para vigas doblemente reforzadas pueden clasificarse en una de estas dos categorías: problemas de revisión y problemas de diseño. Para problemas de *revisión*, en los cuales se determinan las dimensiones del concreto, el refuerzo y las resistencias de los materiales, se puede encontrar la resistencia a la flexión en forma directa, a partir de las ecuaciones de la sección 3.7*a* o de la sección 3.7*b*. Primero se debe confirmar que la cuantía del acero a tensión es menor que la $\overline{\rho}_b$ dada por la ecuación (3.51), con el esfuerzo en el acero a compresión calculado con la ecuación (3.52). Una vez establecido que el acero a tensión ha fluido, la cuantía de acero a tensión que define la fluencia del acero a compresión se calcula a partir de la ecuación (3.50*b*) y se compara con la cuantía real de acero a tensión. Si ésta última es mayor que $\overline{\rho}_{cy}$ entonces $f_s' = f_y$, y M_n se determina a partir de la ecuación (3.47). Si es menor que $\overline{\rho}_{cy}$ entonces $f_s' < f_y$. En este caso, c se calcula resolviendo la ecuación (3.55), f_s' es el resultado de la ecuación (3.54) y M_n se encuentra mediante la ecuación (3.56).

Para el caso de problemas de *diseño*, en los cuales se conoce el momento de las cargas mayoradas M_u que debe resistir la sección, y es necesario determinar las dimensiones de la sección y el refuerzo, resulta imposible aplicar una solución directa. Las áreas de acero que deben suministrarse dependen de los esfuerzos en el acero que no se conocen antes de calcular la dimensión de la sección. Es posible que el esfuerzo del acero a compresión sea igual al esfuerzo de fluencia, pero esto debe confirmarse; si no es así, el diseño debe ajustarse. El procedimiento de diseño puede describirse como sigue:

1. Calcular el momento máximo que puede resistir la sección reforzada a tensión con $\rho = \rho_{max} = 0.75\rho_b$. El área de acero a tensión correspondiente es $A_s = \rho_{max} bd$ y, como de costumbre,

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right),$$

con

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

2. Si existe, encontrar el exceso de momento que debe resistir la sección y asignar $M_2 = M_n$, según lo calculado en el paso 1. Entonces

$$M_1 = \frac{M_u}{\phi} - M_2$$

El valor de A_s, del paso 1, se define ahora como A_{s2}, es decir, aquella parte del área de acero a tensión en la viga doblemente reforzada que trabaja con la fuerza de compresión en el concreto. En la figura 3.11*e*, $A_{s2} = (A_s - A'_s)$.

3. Suponer tentativamente que $f'_s = f_y$. Entonces

$$A'_s = \frac{M_1}{f_y(d - d')}$$

4. Agregar una cantidad adicional de acero a tensión $A_{s1} = A'_s$. De esta manera el área total de acero a tensión A_s es A_{s2} del paso 2 más A_{s1}.
5. Revisar la viga doblemente reforzada para establecer si $f'_s = f_y$, esto es, comparar la cuantía de acero a tensión contra $\overline{\rho}_{cy}$.
6. Si $\rho < \overline{\rho}_{cy}$, entonces el esfuerzo en el acero a compresión es menor que f_y y el área de acero a compresión debe aumentarse con el fin de proporcionar la fuerza necesaria. Esto puede hacerse como sigue. La profundidad del bloque de esfuerzos se halla a partir del requisito del equilibrio horizontal (figura 3.11*e*),

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b}$$

Y la profundidad del eje neutro es $c = a/\beta_1$. A partir de la ecuación (3.54),

$$f'_s = \epsilon_u E_s \frac{c - d'}{c}$$

El área revisada de acero a compresión, que actúa a un esfuerzo igual a f'_s, debe proveer la misma fuerza que el área tentativa de acero que se supuso actuaba a f_y. Entonces,

$$A'_{s,\text{ revisada}} = A'_{s,\text{ tentativa}} \frac{f_y}{f'_s}$$

El área de acero a tensión no necesita revisarse puesto que ésta trabaja a f_y, como se supuso.

Ejemplo 3.11. Resistencia a la flexión de un elemento dado. Una viga rectangular tiene un ancho de 12 pulgadas y una altura efectiva hasta el centroide del refuerzo a tensión de 18 pulgadas. El refuerzo a tensión consta de seis barras No. 10 colocadas en dos filas. El refuerzo a compresión consta de dos barras No. 9 localizadas a 2.5 pulgadas de la cara en compresión de la viga. Si f_y = 50,000lb/pulg^2 y f'_c = 5000 lb/pulg^2, ¿cuál es el momento de diseño de la viga?

Solución. Las áreas y las cuantías de acero son

$$A_s = 7.59 \text{pulg}^2 \quad \rho = \frac{7.59}{12 \times 18} = 0.0352$$

$$A'_s = 2.00 \text{ pulg}^2 \quad \rho' = \frac{2.00}{12 \times 18} = 0.0093$$

En primer lugar se debe revisar la viga como si fuera simplemente reforzada para ver si puede despreciarse el efecto de las barras a compresión,

$$\rho_b = 0.85 \times 0.80 \times \frac{5}{50} \times \frac{87}{137} = 0.0432$$

$$\rho_{\max} = 0.75 \times 0.0432 = 0.0324$$

La cuantía real $\rho = 0.0352$ es mayor que $\rho_{\max}$, de manera que la viga debe analizarse como doblemente reforzada. A partir de la ecuación (3.50*b*),

$$\overline{\rho}_{cy} = \left(0.85 \times 0.80 \times \frac{5}{50} \times \frac{2.5}{18} \times \frac{87}{37}\right) + 0.0093 = 0.0315$$

La cuantía de acero a tensión es mayor que ésta, de modo que las barras a compresión van a fluir cuando la viga falle. La cuantía balanceada de acero y la cuantía máxima de acero pueden encontrarse entonces a partir de las ecuaciones (3.48) y (3.49), respectivamente.

$$\overline{\rho}_b = 0.0432 + 0.0093 = 0.0525$$

$$\overline{\rho}_{\max} = (0.75 \times 0.0432) + 0.0093 = 0.0417$$

La cuantía real de acero a tensión está por debajo del valor máximo, como se requiere. Entonces, a partir de la ecuación (3.46*a*)

$$a = \frac{5.59 \times 50}{0.85 \times 5 \times 12} = 5.48 \text{ pulg}$$

Y con la ecuación (3.47),

$$M_n = 2.00 \times 50(18 - 2.5) + [5.59 \times 50(18 - 2.74)] = 5820 \text{ klb-pulg}$$

La resistencia de diseño es

$$\phi M_n = 0.90 \times 5820 = 5240 \text{ klb-pulg}$$

Ejemplo 3.12. Diseño de una viga doblemente reforzada. Una viga rectangular que debe sostener una carga viva de servicio de 2.47 klb/pie y una carga muerta calculada de 1.05 klb/pie en una luz simple de 18 pies, tiene limitada la sección transversal (por razones arquitectónicas) a 10 pulgadas de ancho y 20 pulgadas de altura total. Si $f_y = 40{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 3000$ lb/pulg^2, ¿cuál es el área (o áreas) de acero que debe(n) suministrarse?

Solución. Primero deben mayorarse las cargas de servicio mediante los factores de carga para obtener la carga mayorada de $1.4 \times 1.05 + 1.7 \times 2.47 = 5.66$ klb/pie. De ahí que $M_u = 5.66\ 18^2/8 = 229$ klb-pie $= 2750$ klb-pulg. Para satisfacer los requisitos de recubrimiento y espaciamiento (ver la sección 3.6), se supone que el centroide del acero a tensión está 4 pulgadas por encima de la cara inferior de la viga y que el acero a compresión, si se requiere, se colocará a 2.5 pulgadas por debajo de la cara superior de la viga. Por consiguiente, $d = 16$ pulg y $d' = 2.5$ pulg.

Primero es necesario revisar la capacidad de la sección como si fuera simplemente reforzada. Según la tabla A.5, $\rho_{\max} = 0.0278$, de manera que $A_s = 0.0278 \times 10 \times 16 = 4.44$ pulg^2. Entonces, con

$$a = \frac{4.44 \times 40}{0.85 \times 3 \times 10} = 6.96 \text{ pulg}$$

el momento nominal máximo que puede desarrollarse es

$$M_n = 4.44 \times 40(16 - 3.48) = 2220 \text{ klb-pulg}$$

Alternativamente, con $R = 869$ obtenido de la tabla A.6*b*, la resistencia nominal a flexión es $M_n = 869 \times 10 \times 16^2/1000 = 2220$ klb-pulg. Debido a que el momento de diseño correspondiente $\phi M_n = 2000$

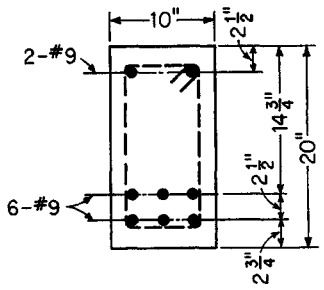


FIGURA 3.12
Viga doblemente reforzada del ejemplo 3.12.

klb-pulg es menor que la capacidad requerida de 2750 klb-pulg, es necesario colocar acero a compresión además del acero a tensión. Si se supone que $f'_s = f_y$ en la falta, se tiene que

$$M_1 = \frac{2750}{0.90} - 2220 = 836 \text{ klb-pulg}$$

$$A_{s1} = \frac{836}{40(16 - 2.5)} = 1.54 \text{ pulg}^2$$

que da el área adicional a tensión requerida por encima de la proporcionada como límite superior para una viga simplemente reforzada con las mismas dimensiones del concreto. Éste también es el acero requerido a compresión. De acuerdo con esto, el área de acero a compresión será

$$A'_s = 1.54 \text{ klb/pulg}^2$$

Y el área de acero a tensión es

$$A_s = 4.44 + 1.54 = 5.98 \text{ pulg}^2$$

Ahora se debe revisar el diseño para confirmar que las barras a compresión fluirán en el momento de falla como se asumió. Con $\rho' = 1.54/(10 \times 16) = 0.0096$, la cuantía límite de acero a tensión para que las barras a compresión fluyan se determina con la ecuación (3.50*a*).

$$\overline{\rho}_{cy} = 0.85 \times 0.85 \frac{3}{40} \frac{2.5}{16} \frac{87}{47} + 0.0096 = 0.0253$$

La cuantía tentativa de acero, $\rho = 5.98/(10 \times 16) = 0.0374$, está por encima del límite inferior, lo que asegura que las barras a compresión fluyan en la falla, como se supuso.

Se utilizarán dos barras No. 9 como refuerzo a compresión y seis barras No. 9 para proveer el área de acero a tensión como aparece en la figura 3.12. Para que las barras a tensión quepan dentro de las 10 pulgadas de ancho de la viga, se utilizarán dos filas de tres barras cada una.

d. Acero a tensión por debajo del esfuerzo de fluencia

Todas las vigas doblemente reforzadas, diseñadas de acuerdo con el Código ACI, deben estar subreforzadas en el sentido de que la cuantía de acero a tensión está limitada para asegurar la fluencia durante la falla de la viga. En las secciones 3.7*a* y 3.7*b* se tuvieron en cuenta dos casos, respectivamente: (*a*) tanto el acero a tensión como el acero a compresión fluyen, y (*b*) el acero a tensión fluye pero el acero a compresión no. También pueden encontrarse dos combinaciones adicionales cuando se está en un proceso de revisión de la capacidad de vigas existentes: (*c*) el acero a tensión no fluye pero el de compresión sí, y (*d*) no fluye el acero a tensión ni el de compresión. Estos dos últimos casos son poco usuales y, de hecho, resulta muy difícil colocar suficiente refuerzo a tensión para crear estas condiciones, pero es posible. La solución en estos casos se obtiene como una extensión simple del tratamiento de la sección 3.7*b*. Se establece una ecuación de equilibrio horizontal en la cual los esfuerzos, tanto en el acero a tensión como en el de compresión, se expresan en términos de la profundidad desconocida del eje neutro *c*. La ecuación cuadrática que resulta se revuelve para *c*, después de lo cual se pueden calcular los esfuerzos en el acero y se determina la resistencia nominal a flexión de la sección.

3.8 VIGAS T

Con excepción de los sistemas prefabricados, los entrepisos, las cubiertas, los tableros de concreto reforzado, etc., casi siempre son monolíticos. Las formaletas se colocan para limitar las caras laterales e intradós de las vigas y las superficies de las losas, y el vaciado del concreto se realiza de una sola vez, desde la parte inferior de la viga de mayor altura hasta la parte superior de la losa. Los estribos de las vigas y las barras dobladas se extienden hasta penetrar dentro de las losas. Es evidente, entonces, que una parte de la losa va a actuar con la parte superior de la viga para resistir la compresión longitudinal. La sección transversal de la viga que resulta tiene forma de T en vez de ser rectangular. La losa conforma el ala de la viga, mientras que la parte de la viga que se proyecta por debajo de la losa configura lo que se conoce como *alma*. La parte superior de esta viga T se ve sometida a esfuerzos transversales a causa de la acción de la losa en esa dirección. Aunque la compresión transversal al nivel de la parte inferior de la losa puede incrementar la resistencia a la compresión longitudinal hasta en un 25 por ciento, la tensión transversal al nivel de la parte superior de la losa reduce la resistencia a la compresión longitudinal (ver la sección 2.9). Por lo regular, ninguno de estos efectos se tiene en cuenta para el diseño.

a. Ancho efectivo del ala

El siguiente aspecto por resolver consiste en determinar el ancho efectivo del ala. En la figura 3.13*a* se hace evidente que si el ala es apenas un poco más ancha que la amplitud del alma, el ala completa puede considerarse efectiva para resistir la compresión. Sin embargo, para el sistema de entrepiso que se muestra en la figura 3.13*b* puede ser igualmente obvio que los elementos del ala localizados a media distancia entre las almas de las vigas están sometidos a un esfuerzo de compresión longitudinal mucho menor que el de aquellos elementos que están directamente sobre el alma. Esto es así a causa de las deformaciones unitarias por cortante del ala misma, que liberan a los elementos más alejados de parte del esfuerzo de compresión.

Aunque la compresión longitudinal real varía por este efecto, en el diseño resulta conveniente hacer uso de un *ancho efectivo del ala*, que puede ser menor que el ancho real, pero que está sometido a un esfuerzo uniforme con magnitud igual al valor máximo. Se ha encontrado que este ancho efectivo depende principalmente de la luz de la viga y del espesor relativo de la losa.

Las recomendaciones dadas por el Código ACI 8.10 para el ancho efectivo son las siguientes:

1. Para vigas T simétricas, el ancho efectivo b no debe exceder una cuarta parte de la longitud de la luz de la viga. El ancho de la losa que sobresale a cada lado del alma de la viga no debe exceder ocho veces el espesor de la losa ni superar más de la mitad de la distancia libre hasta la siguiente viga.
2. Para vigas que tienen losa únicamente de un lado, el ancho efectivo de losa que sobresale no debe exceder un doceavo de la longitud de la luz de la viga, seis veces el espesor de la losa o la mitad de la distancia libre hasta la siguiente viga.
3. Para vigas T aisladas, en las cuales el ala se utiliza únicamente con el propósito de proporcionar un área adicional de compresión, el espesor del ala no debe ser menor que la mitad del ancho del alma y el ancho total del ala no debe exceder cuatro veces el del alma.

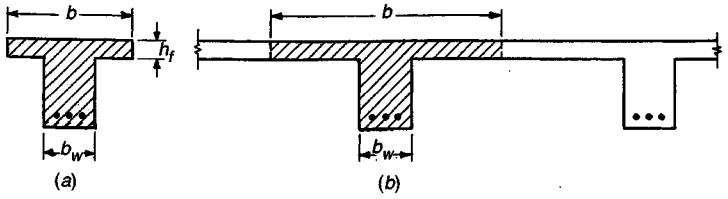


FIGURA 3.13
Ancho efectivo del ala en vigas T.

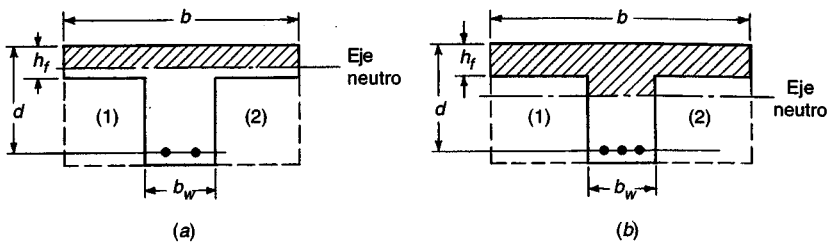


FIGURA 3.14
Secciones transversales efectivas para vigas T.

b. Análisis a la resistencia

El eje neutro de una viga T puede estar bien sea en el ala o en el alma, dependiendo de las dimensiones de la sección transversal, de la cantidad de acero a tensión y de las resistencias de los materiales. Si la profundidad calculada hasta el eje neutro es menor que o igual al espesor h_f de la losa, la viga puede analizarse como si fuera una viga rectangular de ancho igual a b, el ancho efectivo del ala. Las justificaciones se ilustran en la figura 3.14*a*, que presenta una viga T con el eje neutro en el ala. El área de compresión se indica mediante la porción sombreada de la figura. Si el concreto adicional, indicado mediante las áreas 1 y 2, se hubiera incluido cuando la viga fue fundida, la sección transversal física hubiera sido rectangular con un ancho igual a b. Sin embargo, no se hubiera adicionado resistencia a flexión porque las áreas 1 y 2 se encuentran en su totalidad dentro de la zona sometida a tensión y el concreto en tensión no se tiene en cuenta para los cálculos de flexión. La viga T original y la viga rectangular tienen la misma resistencia a la flexión, y puede aplicarse el análisis a flexión de vigas rectangulares.

Cuando el eje neutro está en el alma, como en la figura 3.14*b*, el argumento expuesto ya no es válido. En este caso, deben desarrollarse métodos que tengan en cuenta la forma real de la viga T en la zona de compresión.

En el tratamiento de las vigas T resulta conveniente adoptar la misma distribución de esfuerzos equivalentes para vigas de sección transversal rectangular. El bloque rectangular de esfuerzos, con una magnitud del esfuerzo de compresión de $0.85f'_c$, fue desarrollado originalmente con base en ensayos de vigas rectangulares (ver la sección 3.4*a*) y su aplicabilidad para vigas T puede cuestionarse. Sin embargo, muchos cálculos basados en las curvas reales esfuerzo-formación unitaria (publicados en la referencia 3.11) indican que su uso para vigas T, al igual que para vigas de sección transversal circular o triangular, presenta apenas pequeños errores y se justifica plenamente.

De acuerdo con esto, una viga T puede tratarse como una viga rectangular si la altura del bloque equivalente de esfuerzos es igual o menor que el espesor del ala. La figura 3.15 muestra una viga T reforzada a tensión con un ancho efectivo del ala b, ancho del alma b_w, altura efectiva hasta el centroide del acero d y espesor del ala h_f. Si se supone, de manera tentativa, que el bloque de esfuerzos está completamente dentro del ala,

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} \tag{3.57}$$

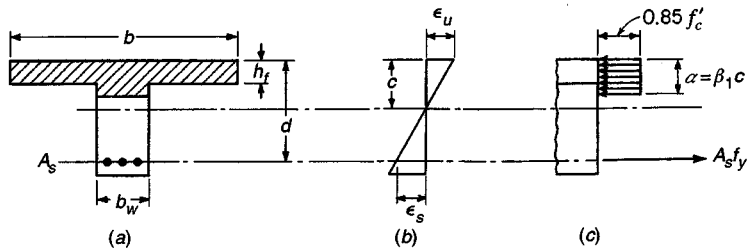


FIGURA 3.15
Distribución de deformaciones unitarias y de esfuerzos equivalentes para vigas T.

donde $\rho = A_s/bd$. Si a es igual o menor que el espesor del ala h_f, el elemento puede tratarse como una viga rectangular con ancho b y espesor d. Si a es mayor que h_f, se requiere un análisis de viga T, como se explica a continuación.

Se supone inicialmente que la resistencia de la viga T está controlada por la fluencia del acero a tensión. Éste va a ser casi siempre el caso por la gran área de compresión de concreto que proporciona el ala. Además, puede establecerse un límite superior para la cuantía de acero con el fin de asegurar que esto sea así, como se demuestra a continuación.

Como herramienta computacional, es conveniente dividir en dos partes la totalidad del acero a tensión. La primera parte, A_{sf}, representa el área de acero que al estar sometida a un esfuerzo igual a f_y, se requiere para balancear la fuerza a compresión longitudinal de las porciones sobresalientes del ala que están sometidas a un esfuerzo uniforme de $0.85f'_c$. De esta manera,

$$A_{sf} = \frac{0.85f'_c(b - b_w)h_f}{f_y} \tag{3.58}$$

La fuerza $A_{sf}f_y$ y la fuerza igual y opuesta $0.85f'_c(b-b_w)h_f$ actúan con un brazo de palanca equivalente a $d-h_f/2$ para proporcionar el momento resistente nominal:

$$M_{n1} = A_{sf}f_y\left(d - \frac{h_f}{2}\right) \tag{3.59}$$

El área restante de acero A_s-A_{sf}, sometida a un esfuerzo igual a f_y, está balanceada por la compresión en la porción rectangular de la viga. La altura del bloque rectangular equivalente de esfuerzo en esta zona se encuentra a partir del equilibrio de fuerzas horizontales:

$$a = \frac{(A_s - A_{sf})f_y}{0.85f'_c b_w} \tag{3.60}$$

Las fuerzas $(A_s-A_{sc})f_y$ y $0.85f'_c ab_w$, que actúan con un brazo de palanca igual a $d-a/2$ suministran entonces un momento adicional

$$M_{n2} = (A_s - A_{sf})f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) \tag{3.61}$$

y el momento resistente nominal total es la suma de las dos partes:

$$M_n = M_{n1} + M_{n2} = A_{sf}f_y\left(d - \frac{h_f}{2}\right) + (A_s - A_{sf})f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) \tag{3.62}$$

De acuerdo con las disposiciones de seguridad del Código ACI, este momento se debe reducir multiplicándolo por un coeficiente $\phi = 0.9$ para obtener la resistencia de diseño.

Al igual que para vigas rectangulares, es mejor asegurar que el acero a tensión fluya antes de que se presente el apiastamiento súbito del concreto a compresión, como se supuso en el desarrollo precedente. Para una falla balanceada, la deformación unitaria en el acero, en la figura 3.15*b*, alcanza ϵ_y al mismo tiempo que la deformación unitaria en el concreto alcanza su valor último ϵ_u. Entonces, a partir de las relaciones geométricas,

$$\frac{c}{d} = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y}$$

Si la suma de las fuerzas horizontales mostradas en la figura 3.15*c* es igual a cero, se obtiene:

$$A_s f_y = 0.85\beta_1 f'_c b_w c + 0.85f'_c(b - b_w)h_f$$

o

$$A_s f_y = 0.85\beta_1 f'_c b_w c + A_{sf}f_y$$

Si se define $\rho_w = A_s/b_w d$ y $\rho_f = A_{sf}/b_w d$ (es decir, expresando tanto la cuantía total del área de acero como la parcial en términos de la porción rectangular de la viga), se obtiene la siguiente cuantía balanceada de acero ρ_{wb} para una viga T:

$$\rho_{wb} = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} + \rho_f$$

El primer término en el lado derecho de esta última ecuación es simplemente la cuantía balanceada de acero ρ_b para la porción rectangular de la viga, como se puede confirmar al compararla con la ecuación (3.28*a*). Por tanto, la cuantía balanceada de acero para una viga T es

$$\rho_{wb} = \rho_b + \rho_f \tag{3.63}$$

donde todas las cuantías están expresadas en términos de la *porción rectangular* de la viga. Para proporcionar un margen contra la falla frágil de vigas T, el código ACI establece que la cuantía utilizada de acero no debe exceder

$$\rho_{w,\max} = 0.75(\rho_b + \rho_f) \tag{3.64}$$

El resultado práctico de esta restricción sobre el área de acero a tensión es que el bloque de esfuerzos en vigas T va a estar casi siempre dentro del ala, excepto para geometrías o combinaciones de resistencias de materiales poco usuales. En consecuencia, se pueden aplicar las ecuaciones para vigas rectangulares en la mayor parte de los casos.

La restricción del Código ACI relativa a que la cuantía de acero a tensión para vigas no debe ser menor que $\rho_{\min} 3\sqrt{f'_c}/f_y$ y $\geq 200/f_y$ (ver la sección 3.4*b*) se aplica tanto para las vigas T como para las vigas rectangulares. Con este propósito, la cuantía ρ para las vigas T debe calcularse con base en el ancho del alma b_w.

c. Dimensiones de la sección transversal

En el diseño de vigas T, en contraste con la revisión de la capacidad de una sección dada, las dimensiones de la losa y el espaciamiento de las vigas se establecen normalmente en forma previa por los requerimientos de flexión transversal. En consecuencia, las únicas dimensiones adicionales que se deben determinar a partir de consideraciones de flexión son el ancho y la altura del alma y el área de acero a tensión.

Si las dimensiones del alma se seleccionaran con base en la capacidad a compresión del concreto, éstas resultarían muy pequeñas debido al gran ancho del ala a compresión que proporciona la presencia de la losa. Este diseño no representaría la solución óptima por la gran cantidad de acero a tensión que se requiere como resultado de la pequeña altura efectiva, a causa de la gran cantidad de refuerzo en el alma que se necesitaría para efectos de cortante, y también por las grandes deflexiones asociadas. Es mejor práctica escoger las dimensiones del alma (1) de manera que se mantenga una cuantía de acero en el alma ρ_w arbitrariamente baja, (2) de modo que se mantengan los esfuerzos cortantes en el alma en límites preferiblemente bajos, o (3) para vigas T continuas, de forma que se satisfagan los requisitos de flexión en los apoyos, donde la sección transversal efectiva se toma como rectangular y con ancho b_w.

Además del refuerzo principal calculado de acuerdo con los requisitos anteriores, es necesarios asegurar la integridad del ala a compresión en vigas T, proporcionando acero en el ala en dirección transversal a la luz principal. En construcciones comunes el acero de la losa cumple con este propósito. En otros casos, deben agregarse barras en forma independiente para permitir que las alas sobresalientes puedan sostener las cargas directamente aplicadas, funcionando como vigas en voladizo. Según el Código ACI 8.10.5, el espaciamiento de estas barras no debe superar cinco veces el espesor del ala y, en ningún caso, debe exceder de 18 pulgadas.

d. Ejemplos de revisión y diseño de vigas T

Para *revisar* la capacidad de una viga T con las dimensiones conocidas de la sección de concreto y del área de acero a tensión, es razonable comenzar suponiendo que la altura a del bloque de esfuerzos no excede el espesor h_f del ala. En este caso, pueden aplicarse todas las ecuaciones para vigas rectangulares (ver la sección 3.4) tomando un ancho de viga igual al efectivo del ala. Si luego de verificar la suposición, el valor de a excede el de h_f, debe aplicarse entonces un análisis de viga T. Las ecuaciones (3.58) a (3.62) pueden utilizarse en secuencia para obtener la resistencia nominal a flexión, y a partir de ésta puede calcularse fácilmente la resistencia de diseño.

Para *diseño*, es posible hacer uso de la siguiente secuencia de cálculos:

1. Determinar el espesor del ala h_f con base en los requisitos de flexión de la losa que, por lo general, se extiende transversalmente entre vigas T paralelas.
2. Determinar el ancho efectivo del ala b de acuerdo con los límites del ACI.
3. Seleccionar las dimensiones del alma b_w y d con base en cualquiera de los siguientes requisitos:
   (a) requisitos de flexión negativos en los apoyos si se tratara de una viga T continua;
   (b) requisitos de cortante, estableciendo un límite superior razonable en el esfuerzo nominal unitario de cortante v_u en el alma de la viga (ver el capítulo 4).
4. Con todas las dimensiones determinadas de la sección de concreto, calcular un valor tentativo de A_s, suponiendo que el valor de a no excede h_f y se utiliza un ancho de viga igual al ancho del ala b. Utilizar los métodos comunes de diseño para vigas rectangulares.
5. Para el área tentativa A_s, verificar la altura del bloque de esfuerzos a para confirmar que éste no excede h_f utilizando las ecuaciones para vigas T.
6. Revisar para confirmar que $\rho_w \geq \rho_{w,\min}$. (Esto va a ser así casi invariablemente).
7. Revisar para confirmar que $\rho_w \leq \rho_{w,\max}$

Ejemplo 3.13. Capacidad última a momento de una sección determinada. Una viga T aislada está compuesta de un ala de 28 pulg de ancho y 6 pulg de espesor, vaciada monolíticamente con un alma de 10 pulg de ancho, que se extiende 24 pulg por debajo de la superficie inferior del ala para producir una viga con altura total de 30 pulg. El refuerzo a tensión consta de seis barras. No. 10 ubicadas en dos filas horizontales. El centroide del grupo de barras está a 26 pulg del tope de la viga. Se ha determinado que el concreto tiene una resistencia de 3000 lb/pulg^2 y que el esfuerzo de fluencia del acero es de 60,000 lb/pulg^2. ¿Cuál es la capacidad útil a momento de la viga?

Solución. De acuerdo con el Código ACI, se puede confirmar fácilmente que las dimensiones del ala son satisfactorias para una viga aislada. La totalidad del ala puede considerarse efectiva. Para seis barras No. 10, $A_s = 7.59$ pulg^2. Primero calcule la posición del eje neutro bajo el supuesto de que pueden utilizarse las ecuaciones para vigas rectangulares,

$$\rho = \frac{7.59}{28 \times 26} = 0.0104$$

y a partir de la ecuación (3.57)

$$a = \frac{0.0104 \times 60 \times 26}{0.85 \times 3} = 6.37 \text{ pulg}$$

Este valor excede el espesor del ala y, en consecuencia, se requiere un análisis de viga T. A partir de la ecuación (3.58)

$$A_{sf} = 0.85 \times \frac{3}{60} \times 18 \times 6 = 4.59 \text{ pulg}^2$$

Entonces

$$A_s - A_{sf} = 7.59 - 4.59 = 3.00 \text{ pulg}^2$$

Las cuantías de acero son

$$\rho_w = \frac{7.59}{260} = 0.0292 \qquad \rho_f = \frac{4.59}{260} = 0.0177$$

mientras que de la ecuación (3.28*a*)

$$\rho_b = 0.85 \times 0.85 \times \frac{3}{60} \times \frac{87}{147} = 0.0214$$

Con respecto al Código ACI, la cuantía máxima de acero a tensión que se permite es

$$\rho_{w,\,\max} = 0.75(0.0214 + 0.0177) = 0.0294$$

que al compararla con ρ_w indica que se puede garantizar una falla dúctil. Entonces, de la ecuación (3.59)

$$M_{n1} = 4.59 \times 60(26 - 3) = 6330 \text{ klb-pulg}$$

mientras que de las ecuaciones (3.60) y (3.61)

$$a = \frac{3.00 \times 60}{0.85 \times 3 \times 10} = 7.07 \text{ pulg}$$

$$M_{n2} = 3.00 \times 60(26 - 3.53) = 4050 \text{ klb-pulg}$$

Cuando se incorpora el coeficiente de reducción de resistencia del ACI, la resistencia de diseño es

$$\phi M_n = 0.90(6330 + 4050) = 9350 \text{ klb-pulg}$$

Ejemplo 3.14. Determinación del área de acero para un momento dado. Un sistema de entrepiso consta de una losa de concreto de 3 pulg sobre vigas T continuas de 24 pies de luz y 47 pulg entre centros. Las dimensiones del alma, determinadas por requisitos de momentos negativos en los apoyos son $b_w = 11$ pulg y $d = 20$ pulg. ¿Cuál es el área de acero a tensión que se requiere en la mitad de la luz para resistir un momento de 6400 klb-pulg, si $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 3000$ lb/pulg^2?

Solución. Primero se determina el ancho efectivo de ala,

$$16h_f + b_w = (16 \times 3) + 11 = 59 \text{ pulg}$$

$$\frac{\text{Luz}}{4} = 24 \times \frac{12}{4} = 72 \text{ pulg}$$

Espaciamiento de vigas centro a centro = 47 pulg

El espaciamiento entre centros de las vigas T controla en este caso, y $b = 47$ pulg. Asimismo, las dimensiones de la sección de concreto d y b_w se sabe que son adecuadas, puesto que fueron seleccionadas para el máximo momento negativo en el apoyo, aplicado a la sección efectiva rectangular $b_w d$. El acero a tensión en el centro de la luz se encuentra más convenientemente mediante tanteos. Si se supone una altura del bloque de esfuerzos igual a las tres pulgadas de espesor del ala, se obtiene

$$d - \frac{a}{2} = 20 - 1.50 = 18.50 \text{ pulg}$$

Tanteo:

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y(d - a/2)} = \frac{6400}{0.90 \times 60 \times 18.50} = 6.40 \text{ pulg}^2$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{6.40}{47 \times 20} = 0.00681$$

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} = \frac{0.00681 \times 60 \times 20}{0.85 \times 3} = 3.20 \text{ pulg}$$

Puesto que a es mayor que h_f se requiere un análisis de viga T.

$$A_{sf} = \frac{0.85 f'_c(b - b_w)h_f}{f_y} = \frac{0.85 \times 3 \times 36 \times 3}{60} = 4.58 \text{ pulg}^2$$

$$\phi M_{n1} = \phi A_{sf} f_y \left(d - \frac{h_f}{2}\right) = 0.90 \times 4.58 \times 60 \times 18.50 = 4570 \text{ klb/pulg}$$

$$\phi M_{n2} = M_u - \phi M_{n1} = 6400 - 4570 = 1830 \text{ klb-pulg}$$

Se supone $a = 4.00$ pulg:

$$A_s - A_{sf} = \frac{\phi M_{n2}}{\phi f_y(d - a/2)} = \frac{1830}{0.90 \times 60 \times 18.00} = 1.88 \text{ pulg}^2$$

Se revisa:

$$a = \frac{(A_s - A_{sf})f_y}{0.85 f'_c b_w} = \frac{1.88 \times 60}{0.85 \times 3 \times 11} = 4.02 \text{ pulg}$$

Este valor coincide satisfactoriamente con el valor supuesto de 4 pulgadas. Entonces

$$A_s = A_{sf} + (A_s - A_{sf}) = 4.58 + 1.88 = 6.46 \text{ pulg}^2$$

Si se revisa para garantizar que no se sobrepase la máxima cuantía de acero a tensión, se obtiene

$$\rho_w = \frac{6.46}{220} = 0.0294$$

$$\rho_f = \frac{4.58}{220} = 0.0208$$

$$\rho_b = 0.85 \times 0.85 \times \frac{3}{60} \times \frac{87}{147} = 0.0214$$

$$\rho_{w,\max} = 0.75(0.0214 + 0.0208) = 0.0316$$

que indica que el valor real de ρ_w es satisfactoriamente bajo.

Debe observarse la correspondencia existente entre el área aproximada de acero a tensión de 6.40 pulg^2, encontrada con una altura supuesta del bloque de esfuerzos equivalente al espesor del ala, y el valor más exacto de 6.46 pulg^2 encontrado mediante el análisis de viga T. La solución aproximada resulta satisfactoria en la mayoría de los casos.

REFERENCIAS

3.1. H. Rusch, "Researches Toward a General Flexural Theory of Structural Concrete", *J. ACI*, vol. 32, no. 1, 1960, pp.1-28.

3.2. L. B. Kriz, "Ultimate Strength Criteria for Reinforced Concrete", *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, vol. 85, no. EM3, 1959, pp. 95-110.

3.3. L. B. Kriz and S. L. Lee, "Ultimate Strength of Overreinforced Beams", *Proc. ASCE*, vol. 86, no. EM3, 1960, pp. 95-106.

3.4. A. H. Mattock, L. B. Kriz, and E. Hogenstad, "Rectangular Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design", *J. ACI*, vol. 32, no. 8, 1961, pp. 875-928.

3.5. P. H. Kaar, N. W. Hanson, and H. T. Capell, "Stress-Strain Curves and Stress Block Coefficients for High-Strength Concrete", *Proceedings Douglas McHenry Symposium*, ACI Special Publication SP-55, 1978.

3.6. *Design Handbook Vol. 1—Beams, One-Way Slabs, Brackets, Footings, and Pile Caps*, ACI Special Publication SP17, American Concrete Institute, Detroit, 1991.

3.7. *ACI Detailing Manual*, ACI Special Publication SP66, American Concrete Institute, Detroit, 1994.

3.8. *CRSI Handbook*, 7th ed. Concrete Reinforcing Steel Institute, Schaumburg, Illinois, 1992.

3.9. *Economical Concrete Construction*, Engineering Data Report No. 30, Concrete Reinforcing Steel Institute, Schaumburg, Illinois, 1988.

3.10. *Manual of Standard Practice*, 25th ed., Concrete Reinforcing Steel Institute, Schaumburg, Illinois, 1990.

3.11. C. W. Dolan, *Ultimate Capacity of Reinforced Concrete Sections Using a Continuous Stress-Strain Function*, MS Thesis, Cornell University, Ithaca, New York, June 1967.

PROBLEMAS

3.1. Una viga rectangular hecha de concreto con resistencia a la compresión $f'_c = 4000$ lb/pulg y acero con $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2, tiene un ancho $b = 24$ pulg, una altura total $h = 18$ pulg y una altura efectiva $d = 15.5$ pulg. El módulo de rotura del concreto es $f_r = 475$ lb/pulg^2. Los módulos elásticos del acero y del concreto son, respectivamente, 29,000,000 lb/pulg^2 y 3,600,000 lb/pulg^2. El área de acero a tensión es $A_s =$ cinco barras No. 11.

(*a*) Determine el momento máximo para las cargas de servicio que puede resistir la viga sin producir esfuerzos mayores de $0.45f'_c$ en el concreto, o de $0.40f_y$ en el acero.
(*b*) Determine la resistencia nominal a flexión de la sección de la viga y calcule el factor de seguridad global contra fallas a flexión.
(*c*) Determine si esta viga presentará grietas de flexión antes de alcanzar la carga de servicio calculada en (*a*).

3.2. Una viga rectangular reforzada a tensión debe diseñarse para una carga muerta de 500 lb/pie más el propio peso, y una carga viva de servicio de 1200 lb/pie con una luz simple de 22 pies. Las resistencias de los materiales son f_y = 60 klb/pulg^2 y f'_c = 3 klb/pulg^2 para el acero y concreto, respectivamente. La altura total de la viga no debe exceder 16 pulg. Calcule el ancho que se necesita para la viga y el acero a tensión exigido utilizando una cuantía de acero de $0.5\rho_b$. Utilice los factores de carga y los coeficientes de resistencia del ACI. La altura efectiva puede suponerse 2.5 pulg menor que la altura total.

3.3. Una viga con una luz simple de 20 pies tiene una sección transversal cuyas dimensiones son b = 10 pulg, d = 23 pulg y h = 25 (ver la figura 3.2*b* para la anotación). Está sometida a una carga uniforme de servicio de 2450 lb/pie, además de su propio peso.
(*a*) Verifique si la viga, al estar reforzada con tres barras No. 8, es adecuada para resistir la carga con un factor mínimo de seguridad contra la falla de 1.85. Si no se cumple con este requisito, selecciones un refuerzo de tres barras con diámetro(s) que proporcione(n) esta seguridad.
(*b*) Determine los esfuerzos máximos en el acero y en el concreto bajo las cargas de servicio, es decir, cuando la viga sostiene su propio peso y la carga uniforme especificada.
(*c*) ¿Se presentarán en la viga grietas capilares en el lado de tensión bajo las cargas de servicio? Las resistencias de los materiales son f'_c= 4000 lb/pulg^2 y f_y = 60,000 lb/pulg^2. Suponga el peso unitario del concreto reforzado igual a 150 lb/pie^3.

3.4. Una viga rectangular de concreto reforzado tiene dimensiones b = 12 pulg, d = 21 pulg y h = 24 pulg, y está reforzada con tres barras No. 10. Las resistencias de los materiales son f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2.
(*a*) Encuentre el momento que va a producir el primer agrietamiento en la superficie inferior de la viga con base en los cálculos de I_g, el momento de inercia de la sección bruta del concreto.
(*b*) Repita los cálculos utilizando I_{ut}, el momento de inercia de la sección transformada no fisurada.
(*c*) Determine el momento máximo que pueda resistir la viga sin producir esfuerzos menores que $0.45\ f'_c$ en el concreto o de $0.40\ f_y$ en el acero.
(*d*) Encuentre la resistencia nominal a flexión y la resistencia de diseño para esta viga.

3.5. Una viga reforzada a tensión tiene b = 10 pulg y d = 20 pulg hasta el centroide de las barras, ubicadas todas en una sola fila. Si f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c= 4000 lb/pulg^2, encuentre la resistencia nominal a flexión M_n, para
(*a*) A_s = dos barras No. 8
(*b*) A_s = dos barras No. 10
(*c*) A_s = tres barras No. 11

3.6. Una viga rectangular simplemente reforzada debe diseñarse utilizando una altura efectiva aproximadamente igual a 1.5 veces el ancho, para resistir una carga viva de servicio de 1500 lb/pie adicionales a su propio peso en una luz simple de 24 pies. Como es usual, deberán aplicarse los factores de carga del código ACI. Con f'_c = 40,000 lb/pulg^2 y f_y = 4000 lb/pulg^2, determine las dimensiones requeridas en la sección de concreto b, d y h, y las barras de acero de refuerzo para
(*a*) $\rho = 0.40\rho_b$ y
(*b*) $\rho = \rho_{max}$
Incluya un esquema a escala de cada una de las secciones transversales. Tenga en cuenta la colocación de estribos No. 3. Explique sus resultados.

3.7. Una viga continua de cuatro luces y de sección rectangular constante está apoyada en A, B, C, D y E. Los momentos mayorados que resultan del análisis son:

En los apoyos, klb-pie	En el centro de la luz klb-pie
M_a = 92	M_{ab} = 105
M_b = 147	M_{bc} = 92
M_c = 134	M_{cd} = 92
M_d = 147	M_{de} = 105
M_e = 92	

Determine las dimensiones que se necesitan para la sección de concreto de esta viga, utilizando $d = 1.75b$, y encuentre el refuerzo requerido en todas las secciones críticas del momento. Utilice una cuantía máxima de acero de $\rho = 0.50\rho_b$, $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 5000$ lb/pulg^2.

3.8. Una viga continua de concreto de dos luces va a estar sostenida por tres muros de mampostería espaciados 25 pies entre centros. La viga debe sostener una carga viva de servicio de 1.5 klb-pie, además de su propio peso. Deberá utilizarse una sección transversal rectangular constante con $h = 2b$, pero el refuerzo tendrá que variarse de acuerdo con lo que se requiera. Encuentre las dimensiones requeridas para la sección de concreto y el refuerzo en todas las secciones críticas. Utilice estribos No. 3. Incluya esquemas dibujados a escala de todas las secciones transversales críticas. Utilice $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2

3.9. Una viga de concreto regular mide 12 pulg de ancho y tiene una altura efectiva de 18 pulg. El acero a compresión que consta de dos barras No. 8 está localizado a 2.5 pulg desde la cara de compresión de la viga. Si $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2, ¿cuál es la capacidad de diseño a momento de la viga de acuerdo con el código ACI, para las siguientes alternativas de áreas de acero a tensión:

(*a*) A_s = tres barras No. 10 en una fila,
(*b*) A_s = cuatro barras No. 10, en dos filas,
(*c*) A_s = seis barras No. 10 en dos filas?

Nota: Verifique la fluencia del acero a compresión en cada caso.

3.10. Una viga rectangular de concreto con ancho $b = 24$ pulg está limitada por consideraciones arquitectónicas a una altura máxima total $h = 16$ pulg. Debe sostener un momento total por cargas mayoradas $M_u = 400$ klb-pie. Diseñe el refuerzo a flexión para este elemento utilizando acero a compresión si es necesario. Deje tres pulgadas hasta el centro de las barras desde la cara de compresión o tensión de la viga. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 4000$ lb/pulg^2. Seleccione las barras para suministrar las áreas necesarias y hacer esquemas de su diseño final incluyendo estribos No. 4.

3.11. Una viga rectangular con ancho $b = 24$ pulg, altura total $h = 14$ pulg y altura efectiva hasta el acero a tensión $d = 11.5$ pulg se construye usando materiales con resistencias $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. El refuerzo a tensión consta de dos barras No. 11 más tres barras No. 10 en una fila. El refuerzo a compresión consta de dos barras No. 10 y está colocado a una distancia $d' = 2.5$ pulg desde la cara de compresión. Calcule la resistencia nominal y de diseño de la viga

(*a*) sin tener en cuenta el refuerzo a compresión,
(*b*) si se tiene en cuenta el refuerzo a compresión y se supone que éste trabaja a f_y y
(*c*) si se considera el refuerzo a compresión trabajando al esfuerzo real f'_c determinado mediante análisis.

3.12. Una viga T reforzada a tensión debe diseñarse para sostener una carga uniformemente distribuida en una luz simple de 20 pies. El momento total que debe sostener es $M_u = 5780$ klb-pulg. Las dimensiones de la sección de concreto, controladas por el cortante en el alma y por los requisitos de espaciamiento son $b = 20$ pulg, $b_w = 10$ pulg, $h_f = 5$ pulg y $d = 20$ pulg. Si $f_y = 60$ klb/pulg^2 y $f'_c = 4$ klb/pulg^2, ¿cuánto refuerzo a tensión se requiere en la mitad de la luz? Seleccione las barras adecuadas para proveer esta área y revise las limitaciones de recubrimiento de concreto, suponiendo estribos No. 3. ¿Cuál es la altura total h que se necesita?

3.13. Un sistema de entrepiso en concreto consta de vigas T paralelas que están espaciadas 10 pies entre centros y con luces entre apoyos de 32 pies. La losa con espesor de 6 pulg está vaciada monolíticamente con las almas de las vigas T que tienen un ancho $b_w = 14$ pulg y una altura total, medida de la parte superior de la losa, igual a $h = 28$ pulg. La altura efectiva se tomará 3 pulg menor que la altura total. Además de su propio peso, cada viga T debe sostener una carga muerta de 50 lb/pie^2 y una carga viva de servicio de 225 lb/pie^2. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 3000$ lb/pulg^2. Determine el área de acero requerida a tensión y seleccione las barras necesarias para un elemento típico.

3.14. Una viga T prefabricada individual se va a utilizar como puente sobre una pequeña vía vehicular. Las dimensiones de la sección de concreto son $b = 48$ pulg, $b_w = 10$ pulg, $h_f = 5$ pulg y $h = 25$ pulg. La altura efectiva es $d = 20$ pulg. El concreto y el acero tienen resistencia de 4000 lb/pulg^2 y 60,000 lb/pulg^2, respectivamente. Si se utiliza casi la mitad del refuerzo máximo a tensión que autoriza el código ACI (seleccione el tamaño real de las barras y el número que se va a utilizar), determine el momento de diseño de la viga. Si la viga se utiliza en una luz simple de 30 pies, y si además de su propio peso debe sostener cargas adicionales de barandas, aceras y otras cargas suspendidas que totalizan 0.475 klb/pie, ¿cuál es el límite que debe establecerse a la carga viva uniforme de servicio?

CAPÍTULO

4 CORTANTE Y TENSIÓN DIAGONAL EN VIGAS

4.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se estudió el tema relacionado con el comportamiento a flexión y con la resistencia a flexión de vigas. Las vigas también deben tener un margen de seguridad adecuado contra otros tipos de fallas, algunas de las cuales pueden ser más peligrosas que la falla a flexión. Esto se debe a la gran incertidumbre en la predicción de otros modos de colapso o a causa de la naturaleza catastrófica de otros tipos de fallas, cuando éstas ocurren.

Un ejemplo de lo anterior es la falla a cortante del concreto reforzado más conocida como *falla a tensión diagonal*. La falla a cortante es difícil de predecir en forma exacta. A pesar de la investigación experimental llevada a cabo durante muchas décadas (ver las referencias 4.1 a 4.5), y del uso de herramientas analíticas altamente sofisticadas (ver la referencia 4.6), ésta no se comprende aún completamente. Además, si una viga sin diseño adecuado del refuerzo a cortante se sobrecarga hasta la falla, se puede presentar un colapso por cortante en forma súbita, sin aviso alguno de peligro. Esto está en fuerte contraste con la naturaleza de la falla a flexión. Para vigas comunes subreforzadas, la falla a flexión se inicia por fluencia gradual del acero a tensión acompañada por agrietamiento obvio del concreto y grandes deflexiones, que dan aviso evidente y la oportunidad de tomar medidas correctivas. A causa de estas diferencias en el comportamiento, por lo general se coloca *refuerzo a cortante* en las vigas de concreto reforzado para garantizar una falla a flexión antes de que ocurra la falla a cortante en caso de que el elemento se sobrecargue en exceso.

La figura 4.1 presenta el resultado de un ensayo en la Universidad de Cornell de una viga crítica a cortante bajo cargas concentradas en los tercios de la luz. Para el caso del elemento sin refuerzo a cortante, la falla se presentó inmediatamente después de la formación de una grieta crítica en la zona de alto cortante, muy cerca del apoyo derecho.

Es importante comprender que el análisis y el diseño a cortante no están relacionados realmente con el cortante como tal. En la mayor parte de las vigas, los esfuerzos cortantes están muy por debajo de la resistencia a cortante directa del concreto. La verdadera inquietud tiene que ver con el *esfuerzo de tensión diagonal*, que surge de la combinación de esfuerzos cortantes y de esfuerzos de flexión longitudinal. La mayor parte de este capítulo trata sobre el análisis y el diseño a tensión diagonal, proporcionando las bases para el entendimiento y la utilización de las disposiciones de cortante del Código ACI de 1995. Primero se estudian los elementos sin refuerzo en el alma con el fin de establecer la localización y orientación de las grietas, y la carga para la cual ocurre el

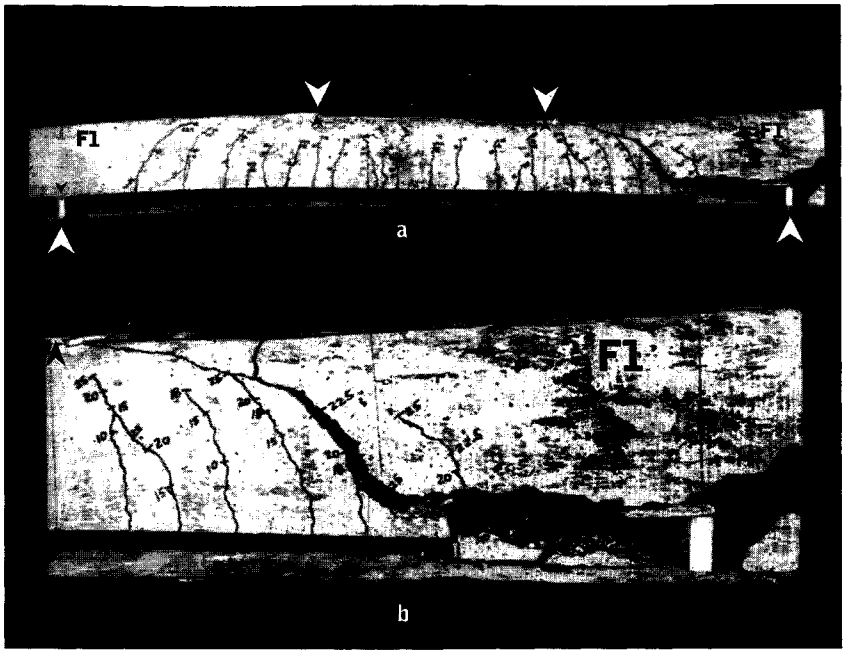


FIGURA 4.1
Falla a cortante de una viga de concreto reforzado: (*a*) vista global, (*b*) detalle cercano al apoyo derecho.

agrietamiento diagonal. En seguida se desarrollan los métodos para el diseño del refuerzo a cortante de acuerdo con el Código actual del ACI, tanto en vigas comunes como en tipos especiales de elementos como en el caso de vigas de gran altura.

Sin embargo, se presentan algunas circunstancias en las cuales resulta apropiado tener en cuenta el cortante directo. Un ejemplo está en el diseño de miembros compuestos donde se combinan vigas prefabricadas con losas superiores fundidas en el sitio. En este caso los esfuerzos cortantes horizontales son importantes para la interfase entre los componentes. La teoría del cortante por fricción, útil en éste y en otros casos, se desarrollará una vez se presenten los métodos para el análisis y el diseño de vigas a tensión diagonal.

En años recientes se han propuesto métodos alternativos para el diseño a cortante, basados en modelos de armadura de ángulo variable y en la teoría del campo de compresión diagonal (ver las referencias 4.7 y 4.8). Estos métodos se presentan de manera breve en secciones posteriores de este capítulo.

4.2 TENSIÓN DIAGONAL EN VIGAS ELÁSTICAS HOMOGÉNEAS

Los esfuerzos que actúan en vigas homogéneas se repasaron brevemente en la sección 3.2. Se indicó que cuando el material es elástico (esfuerzos proporcionales a las deformaciones unitarias), los esfuerzos cortantes

$$v = \frac{VQ}{Ib} \tag{3.4}$$

actúan en cualquier sección, además de los esfuerzos flectores

$$f = \frac{My}{I} \tag{3.2}$$

excepto para aquellos sitios donde se presenta una fuerza cortante V igual a cero.

La función de los esfuerzos cortantes se visualiza con facilidad mediante el comportamiento bajo carga de la viga laminada de la figura 4.2; ésta consta de dos piezas rectangulares unidas entre sí en la superficie de contacto. Si el adhesivo es suficientemente fuerte, el elemento se deformará como una viga individual, como aparece en la figura 4.2*a*. Por otro lado, si el adhesivo es débil, las dos piezas se separarán y se deslizarán relativamente entre sí como señala la figura 4.2*b*. En efecto, cuando el adhesivo es efectivo, existen fuerzas o esfuerzos que actúan sobre éste evitando así el deslizamiento o corte. Estos esfuerzos cortantes horizontales aparecen en la figura 4.2*c* que muestra la manera como actúan en forma separada sobre la pieza superior y la inferior. Los mismos esfuerzos ocurren en planos horizontales para vigas de una sola pieza; éstos son diferentes en intensidad para diversas distancias desde el eje neutro.

La figura 4.2*d* presenta la longitud diferencial de una viga rectangular de una sola pieza que está sometida a una fuerza cortante de magnitud V. Los esfuerzos cortantes verticales v impiden el desplazamiento hacia arriba, es decir, proporcionan el equilibrio vertical. Su valor promedio es igual a la fuerza cortante dividida por el área de la sección transversal $v_{av} = V/ab$, pero la intensidad varía según su localización vertical en la sección. Con la ecuación (3.4) se puede demostrar que el esfuerzo cortante es cero para las fibras exteriores y tiene un máximo de $1.5v_{av}$ en el eje neutro; además, que su variación es parabólica como aparece. Para otras formas de la sección transversal se encuentran otros valores y distribuciones de esfuerzos, pero siempre el esfuerzo cortante es cero en las fibras exteriores y tiene un valor máximo en el eje neutro. Si se aísla un pequeño elemento cuadrado localizado en el eje neutro de una viga sometida a cortante, como indica la figura 4.3*b*, los esfuerzos cortantes verticales, iguales y opuestos en las dos caras por razones de equilibrio, actúan sobre éste como se señala. Sin embargo, si éstos fueran los únicos esfuerzos presentes, el elemento no estaría en equilibrio sino que giraría. Por consiguiente, en las dos caras horizontales existen esfuerzos cortantes horizontales de igual magnitud que equilibran las fuerzas anteriores. Esto es, en cualquier punto de la viga, los esfuerzos cortantes horizontales de la figura 4.3*b* son iguales en magnitud a los esfuerzos cortantes verticales de la figura 4.2*d*.

En cualquier texto de resistencia de materiales se demuestra que en un elemento cortado a un ángulo de 45°, los esfuerzos cortantes se combinan de manera que su efecto sea como el que indica la figura 4.3*c*. Es decir, la acción de los dos pares de esfuerzos cortantes sobre las caras vertical y horizontal es equivalente a aquélla de dos pares de esfuerzos normales, uno en tensión y otro en compresión, que actúan en caras a 45° con valores numéricos iguales a los de los esfuerzos cortantes. Si se considera ahora un elemento de viga localizado entre el eje neutro y los bordes externos, sus caras verticales están sometidas no sólo a esfuerzos cortantes sino también a los ya

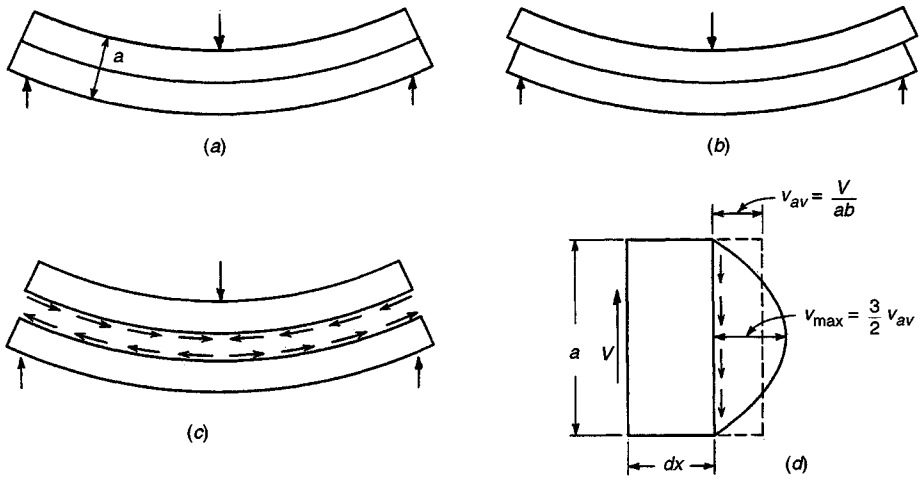


FIGURA 4.2
Cortante en vigas rectangulares homogéneas.

conocidos esfuerzos flectores cuya magnitud está determinada por la ecuación (3.2) (ver la figura 4.3*d*). Los seis esfuerzos que actúan ahora sobre el elemento pueden combinarse en un par de esfuerzos inclinados a compresión y un par de esfuerzos inclinados a tensión, formando ángulos rectos entre sí. Éstos se conocen como *esfuerzos principales* (ver la figura 4.3*e*). Su valor, como se mencionó en la sección 3.2, es

$$t = \frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} + v^2} \tag{3.1}$$

y su inclinación α está dada por $\tan 2\alpha = 2v/f$.

Puesto que las magnitudes de los esfuerzos cortantes v y de los esfuerzos flectores f cambian tanto con la localización de la sección en la viga como verticalmente en cada sección con la distancia desde el eje neutro, las inclinaciones al igual que las magnitudes de los esfuerzos principales t que resultan, también varían de un lugar a otro. La figura 4.3*f* muestra las inclinaciones de estos esfuerzos principales para una viga rectangular uniformemente cargada. Es decir, las trayectorias de esfuerzo son líneas que en cualquier punto se dibujan en aquella dirección en la cual actúa en ese punto el esfuerzo principal particular, el de tensión o el de compresión. Puede verse que en el eje neutro, los esfuerzos principales en una viga están siempre inclinados a 45° del eje. En las vecindades de las fibras extremas, éstos son horizontales cerca del centro de la luz.

Un punto importante surge a partir de este análisis. Los esfuerzos de tensión, que son de especial interés por la baja resistencia a la tensión del concreto, no están limitados a los esfuerzos horizontales de flexión f causados por flexión pura. Existen esfuerzos de tensión con varias inclinaciones y magnitudes, que resultan del cortante solo (en el eje neutro) o de la combinación de cortante y flexión, y éstos se presentan en toda la viga y pueden afectar su integridad si no se consideran adecuadamente. Por consiguiente, los esfuerzos de tensión inclinados, conocidos como esfuerzos de *tensión diagonal*, deben tenerse en cuenta de manera cuidadosa en el diseño del concreto reforzado.

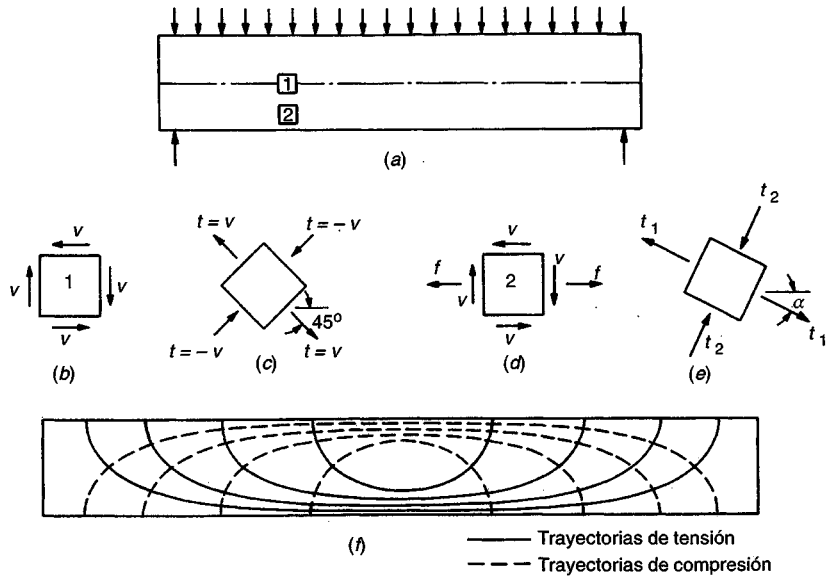


FIGURA 4.3
Trayectorias de esfuerzos en vigas rectangulares homogéneas.

4.3 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SIN REFUERZO A CORTANTE

El estudio del cortante en una viga homogénea elástica se aplica en forma muy aproximada a una viga de concreto simple *sin* refuerzo. A medida que se incrementa la carga en la viga, se forma una grieta de tensión en la sección donde los esfuerzos de tensión son máximos, lo cual causa la falla inmediata de la viga. Excepto para vigas de dimensiones poco usuales, los mayores esfuerzos de tensión son causados únicamente por flexión y se presentan en las fibras extremas en la sección de máximo momento flector. En este caso, el cortante tiene muy poca, o ninguna, influencia en la resistencia de la viga.

Sin embargo, la situación es muy diferente cuando se suministra refuerzo a tensión. A pesar de la formación de grietas de tensión en el concreto, el acero proporciona la resistencia que se requiere para la tensión por flexión y la viga puede soportar entonces cargas mucho mayores. Los esfuerzos cortantes aumentan proporcionalmente con las cargas; en consecuencia, se generan esfuerzos de tensión diagonal de intensidad significativa en regiones de altas fuerzas cortantes, en especial cerca de los apoyos. El refuerzo longitudinal a tensión ha sido calculado y colocado de manera que sea efectivo principalmente para resistir la tensión longitudinal cerca de la cara en tensión. Éste no proporciona refuerzo al concreto débil a tensión contra los esfuerzos de tensión diagonal que ocurren en otros sitios, causados por el cortante solo o por el efecto combinado de cortante y flexión. Eventualmente, estos esfuerzos alcanzan magnitudes suficientes para abrir grietas de tensión adicionales, en dirección perpendicular a la del esfuerzo de tensión local. Éstas se conocen como grietas *diagonales* para diferenciarlas de las grietas verticales de flexión. Éstas últimas se presentan en las regiones de momentos grandes, mientras que las primeras ocurren en regiones de grandes fuerzas cortantes. La aparición de importantes grietas de tensión diagonal en vigas sin refuerzo para este efecto, tiene gran trascendencia y resulta muy perjudicial para la viga, por esta razón conviene utilizar métodos que pronostiquen las cargas con las cuales se forman esta clase de grietas.

a. Criterios para la formación de grietas diagonales

Con la ecuación (3.1) se puede apreciar que los esfuerzos de tensión diagonal t representan el efecto combinado de los esfuerzos cortantes v y de los esfuerzos flectores f. Éstos a su vez son proporcionales, respectivamente, a la fuerza cortante V y al momento flector M en la ubicación particular en la viga [ecuaciones (3.2) y (3.4)]. De acuerdo con la configuración, las condiciones de apoyo y la distribución de la carga, una sección determinada en una viga puede tener un momento grande combinado con una pequeña fuerza cortante o, por el contrario, valores grandes o pequeños tanto para cortante como para momento. Evidentemente, los valores relativos de M y V afectarán tanto la magnitud como la dirección de los esfuerzos de tensión diagonal. La figura 4.4 muestra algunas vigas características y sus diagramas de momento y cortante, y resalta la localización de varias combinaciones de valores grandes y pequeños de V y M.

Para una sección con una gran fuerza cortante V y un pequeño momento flector M, se presentará muy poco o ningún agrietamiento por flexión antes del desarrollo de la grieta de tensión diagonal. En consecuencia, el esfuerzo cortante promedio antes de la formación de grietas es

$$v = \frac{V}{bd} \tag{4.1}$$

La distribución exacta de estos esfuerzos cortantes sobre la altura de la sección transversal no se conoce. No puede calcularse a partir de la ecuación (3.4) porque esta ecuación no tiene en cuenta la influencia del refuerzo y porque el concreto no es un material elástico homogéneo. El valor calculado a partir de la ecuación (4.1) debe tomarse solamente como una medida de la intensidad promedio de los esfuerzos cortantes en la sección. El valor máximo, que ocurre en el eje neutro, excederá este promedio en una cantidad desconocida pero moderada.

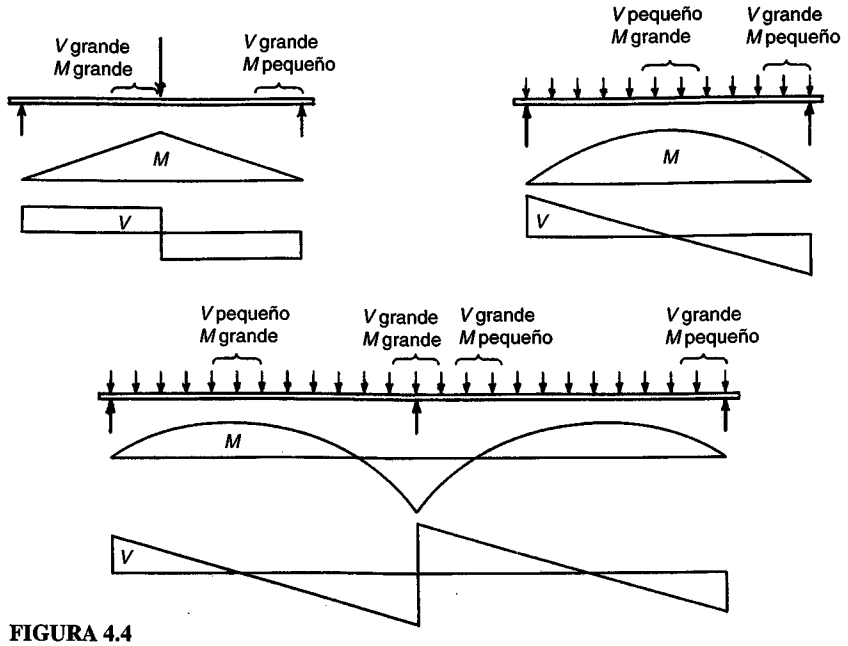


FIGURA 4.4
Localizaciones características de combinaciones críticas de cortante y momento.

Cuando en una sección particular los esfuerzos flectores son despreciables, los esfuerzos de tensión diagonal, como los de las figuras 4.3*b* y 4.3*c*, resultan con una inclinación aproximada de 45° y son numéricamente iguales a los esfuerzos cortantes, con un máximo en el eje neutro. En consecuencia, la mayor parte de las grietas diagonales se formarán en o cerca del eje neutro y se propagarán a partir de este punto como aparece en la figura 4.5*a*. La formación de estas grietas, llamadas de *cortante en el alma*, puede ocurrir cuando el esfuerzo de tensión diagonal en las proximidades del eje neutro alcanza valores similares al de la resistencia a la tensión del concreto. El primero, como se indicó, es del orden de y un poco mayor que $v = V/bd$; el último, como se analizó en la sección 2.8 varía aproximadamente entre $3\sqrt{f'_c}$ y $5\sqrt{f'_c}$. La evaluación de una gran cantidad de ensayos sobre vigas presenta una buena correspondencia con este razonamiento (ver la referencia 4.1). Se encontró que en zonas de cortante grande y momento pequeño, las grietas de tensión diagonal se formaban para un esfuerzo cortante promedio o nominal v_{cr} cercano a $3.5\sqrt{f'_c}$, es decir,

$$v_{cr} = \frac{V_{cr}}{bd} = 3.5\sqrt{f'_c} \qquad (4.2a)$$

donde V_{cr} es la fuerza cortante cuando se observó la formación de la grieta†. Las grietas de cortante en el alma son relativamente raras y se presentan en especial cerca de los apoyos de vigas de gran altura y alma delgada, o en los puntos de inflexión de vigas continuas.

La situación es diferente cuando tanto la fuerza cortante como el momento flector tienen valores grandes. Para una viga bien dimensionada y reforzada, en una sección con las características anteriores, las grietas de tensión por flexión son las que se presentan en primera instancia. Su ancho y longitud están bien controlados y se mantienen pequeños gracias a la presencia del refuer-

† Las grietas de tensión diagonal se forman realmente en zonas donde el esfuerzo de compresión actúa adicionalmente y en dirección perpendicular al esfuerzo de tensión diagonal, como se muestra en las figuras 4.3*d* y 4.3*e*. La grieta se forma entonces en una zona sometida a esfuerzo biaxial en vez de tensión uniaxial. Sin embargo, el efecto de este esfuerzo simultáneo de comprensión sobre la resistencia al agrietamiento parece ser pequeño, de acuerdo con la información de la figura 2.8.

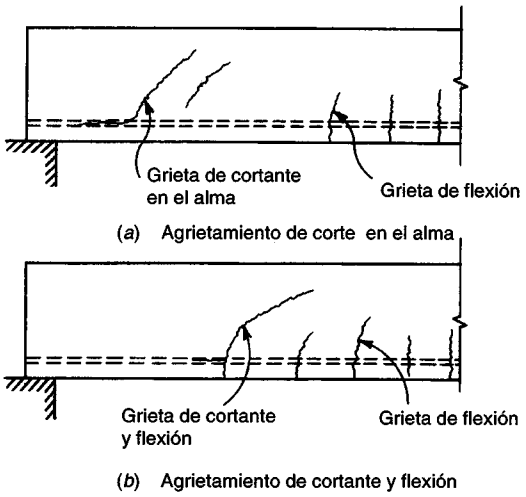


FIGURA 4.5
Agrietamiento de tensión diagonal en vigas de concreto reforzado.

zo longitudinal. No obstante, cuando el esfuerzo de tensión diagonal en la parte superior de una o más de estas grietas excede la resistencia a la tensión del concreto, la grieta se inclina hacia una dirección diagonal y continúa abriéndose y alargándose (ver la figura 4.5*b*). Estas grietas se conocen como grietas de *cortante y flexión* y son más comunes que las grietas de cortante en el alma.

Es evidente que en el momento en que se genera una grieta de tensión diagonal de esta clase, el esfuerzo cortante promedio es mayor que el determinado por la ecuación (4.1). Esto es así porque la grieta de tensión preexistente ha reducido el área de concreto no fisurado disponible para resistir el cortante, hasta un valor menor que el área no fisurada bd que se utiliza en la ecuación (4.1). La magnitud de esta reducción varía, dependiendo de la longitud no predecible de las grietas de tensión por flexión preexistentes. Además, el esfuerzo flector simultáneo f se combina con el esfuerzo cortante v para aumentar aun más el esfuerzo de tensión diagonal t [ver la ecuación (3.1)]. No se ha encontrado un método para calcular valores confiables del esfuerzo de tensión diagonal en estas condiciones, por lo cual debe recurrirse a resultados de ensayos.

Para este propósito se han evaluado una gran cantidad de ensayos sobre vigas (ver la referencia 4.1). Éstos demuestran que, en presencia de momentos grandes (para los cuales se ha proporcionado el refuerzo longitudinal adecuado), el esfuerzo cortante nominal necesario para la formación y propagación de la grietas de tensión diagonal se da conservadoramente por

$$v_{cr} = \frac{V_{cr}}{bd} = 1.9\sqrt{f'_c} \qquad (4.2b)$$

La comparación con la ecuación (4.2*a*) indica que los grandes momentos flectores pueden reducir la fuerza cortante necesaria para la formación de las grietas diagonales, hasta casi la mitad del valor para el cual se formarían, si el momento fuera cero o cercano a cero. Esto está en correspondencia cualitativa con el análisis presentado anteriormente.

Así, resulta evidente que el cortante necesario para el desarrollo de las grietas diagonales depende de la relación entre la fuerza cortante y el momento flector o, más precisamente, de la relación entre el esfuerzo cortante v y el esfuerzo flector f en la parte superior de la grieta de flexión. Ninguno de estos valores puede calcularse en forma precisa. Sin embargo, es claro que $v = K_1(V/bd)$, donde, por comparación con la ecuación (4.1), la constante K_1 depende principalmente de la profundidad de penetración de la grieta de flexión. Por otro lado [ver la ecuación (3.10)], $f = K_2(M/bd^2)$, donde K_2 también depende de la configuración de la grieta. Entonces, debe esperarse que la relación

$$\frac{v}{f} = \frac{K_1}{K_2}\frac{Vd}{M}$$

afecte la carga necesaria para que las grietas de flexión se conviertan en grietas de cortante y flexión, donde la cantidad desconocida K_1/K_2 debe investigarse mediante ensayos. La ecuación (4.2*a*) da el cortante de agrietamiento para valores muy grandes de Vd/M, y la ecuación (4.2*b*) para valores bastante pequeños. Para valores moderados de Vd/M, el valor de v_{cr} resulta en valores intermedios entre estos dos extremos. De nuevo, a partir de la evaluación de muchos ensayos (ver la referencia 4.1), se encuentra que el esfuerzo cortante nominal necesario para que se desarrollen grietas diagonales de cortante y flexión se puede predecir conservadoramente a partir de

$$v_{cr} = \frac{V_{cr}}{bd} = 1.9\sqrt{f'_c} + 2500\frac{\rho Vd}{M} \leq 3.5\sqrt{f'_c} \tag{4.3}$$

donde

$$V_{cr} = v_{cr}bd$$

con $\rho = A_s/bd$ como antes, y 2500 es una constante empírica en unidades de lb/pulg^2. En la figura 4.6 se presenta una gráfica de esta relación y la comparación con datos obtenidos de ensayos.

Además de la influencia de Vd/M, con la ecuación (4.3) se puede concluir que un aumento en el refuerzo a tensión, es decir, un incremento en los valores de la cuantía de acero ρ, produce un efecto benéfico pues se incrementa el cortante necesario para el desarrollo de las grietas diagonales. Esto se debe a que mayores cantidades de acero longitudinal producen grietas de flexión por tensión más pequeñas y delgadas antes de la formación de las grietas diagonales, que dejan un área mayor de concreto no fisurado disponible para resistir el cortante [para mayores detalles acerca del desarrollo de la ecuación (4.3), ver la referencia 4.1].

b. Comportamiento de vigas agrietadas diagonalmente

En relación con la tensión por flexión, a diferencia de la tensión diagonal, en la sección 3.3 se explicó que las grietas en el lado de tensión de una viga se permiten y no perjudican de ninguna manera la resistencia del elemento. Se podría esperar una situación similar con respecto al agrietamiento diagonal ocasionado principalmente por cortante. Sin embargo, la analogía no es tan simple. Las grietas de tensión por flexión son inofensivas sólo cuando se provee un refuerzo longitudinal adecuado para resistir los esfuerzos de tensión por flexión que el concreto fisurado ya no puede transmitir. En contraste, las vigas que ahora se analizan, aunque reforzadas con el refuerzo longitudinal usual, no están equipadas con ningún otro refuerzo para contrarrestar los efectos del agrietamiento diagonal. Esto hace que las grietas diagonales sean mucho más decisivas en el comportamiento posterior y en la resistencia de la viga que las grietas de flexión.

Se observan dos tipos de comportamiento en los diversos ensayos en los cuales se basa el conocimiento actual:

1. Una vez formada, la grieta diagonal se prolonga bien sea de manera inmediata o bajo una carga ligeramente superior, atraviesa la viga por completo desde el refuerzo a tensión hasta la cara de

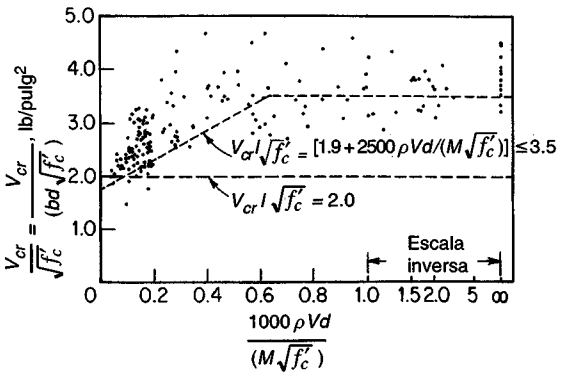


FIGURA 4.6
Corrección de la ecuación (4.3) con los resultados de ensayos.

compresión y la separa en dos, produciendo en consecuencia la falla. Este proceso es súbito, no da aviso y ocurre principalmente en vigas de poca altura relativa, es decir, vigas con relaciones luz-altura casi de 8 o más. Las vigas en este intervalo de dimensiones son muy comunes. La ausencia completa de refuerzo a cortante las haría muy vulnerables a grandes sobrecargas accidentales, que producirían fallas catastróficas sin ningún aviso. Por consiguiente, es buena práctica proveer una cantidad mínima de refuerzo a cortante aun si el cálculo demuestra que no es necesario, porque este refuerzo restringe el crecimiento de las grietas diagonales, aumentando por tanto la ductilidad y dando un aviso anticipado de la falla real. Sólo en situaciones en las que se proporcione un factor de seguridad extremadamente alto contra el agrietamiento diagonal, es decir, cuando los esfuerzos cortantes reales son muy pequeños en comparación con v_{cr}, como en el caso de algunas losas y de la mayor parte de las zapatas, resulta permisible suprimir el refuerzo a cortante.

2. De manera alternativa, la grieta diagonal, una vez formada, se propaga hacia y parcialmente dentro de la zona de compresión, pero se detiene un poco antes de la penetración en la cara de compresión. En este caso no ocurre un colapso súbito y la carga de falla puede ser significativamente mayor que aquélla para la cual se formó la grieta diagonal por primera vez. Este comportamiento se observa en especial en vigas de mayor altura relativa con menores relaciones luz-altura, que se analizarán enseguida.

La figura 4.7*a* muestra una porción de una viga cargada arbitrariamente, donde se ha formado una grieta de tensión diagonal. Observe la parte de la viga a la izquierda de la grieta, señalada con líneas sólidas. En esta porción existe una fuerza cortante externa que actúa hacia arriba $V_{ext} = R_1 - P_1$.

Cuando se forma la grieta, no puede transmitirse a través de ella ninguna fuerza de tensión en dirección perpendicular a la misma. Sin embargo, siempre que la grieta se mantenga delgada, ésta aún puede transmitir fuerzas en su propio plano mediante el entrelazamiento de las superfi-

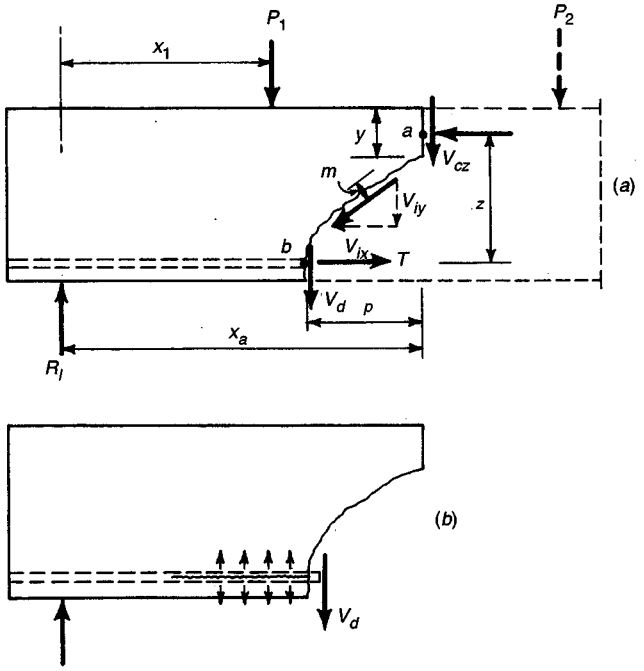


FIGURA 4.7
Fuerzas en una grieta diagonal de una viga sin refuerzo en el alma.

cies rugosas. De hecho, se han medido fuerzas de interacción considerables V_i de este tipo que alcanzan, en algunos casos, valores hasta de un tercio o más de la fuerza cortante total. Las componentes V_{ix} y V_{iy}, de V_i, aparecen en la figura 4.7*a*. Las otras fuerzas verticales internas son aquéllas existentes en la porción no fisurada del concreto, V_{cz} y la que actúa como una dovela a través del acero longitudinal, V_d. Entonces, la fuerza cortante interna es

$$V_{\text{int}} = V_{cz} + V_d + V_{iy}$$

Por equilibrio, $V_{\text{int}} = V_{\text{ext}}$, de manera que la parte del cortante que resiste la sección de concreto no fisurada, es

$$V_{cz} = V_{\text{ext}} - V_d - V_{iy} \tag{4.4}$$

Por lo general, en una viga reforzada sólo con acero longitudinal, la porción de la fuerza cortante resistida por el acero mediante acción de dovela es bastante pequeña. De hecho, las barras de refuerzo sobre las cuales actúa la fuerza de dovela V_d están sostenidas contra desplazamientos verticales, principalmente por la delgada capa inferior del concreto de recubrimiento. La presión de aplastamiento causada por V_d produce esfuerzos de tensión vertical en este concreto, como aparece en la figura 4.7*b*. A causa de estos esfuerzos, las grietas diagonales conllevan con frecuencia a un fracturamiento del concreto a lo largo del refuerzo a tensión, como se indica (ver también la figura 4.1). Esto reduce la fuerza de dovela V_d y permite que la grieta diagonal se ensanche. Esto a su vez reduce la fuerza de interfase V_i y conduce a menudo a la falla inmediata.

Ahora, calculando momentos con respecto al punto a en la intersección de V_{cz} y C, el momento externo $M_{\text{ext},a}$ actúa en a y es igual a $R_t x_a - P_1(x_a - x_1)$ para el sistema de carga presentado. El momento interno es

$$M_{\text{int},a} = T_b z + V_d p - V_i m$$

en donde p es la proyección horizontal de la grieta diagonal y m es el brazo de palanca del momento de la fuerza V_i con respecto al punto a. La designación T_b para T se hace para destacar que esta fuerza en el acero se ejerce en el punto b en vez de hacerlo verticalmente por debajo del punto a. El equilibrio exige que $M_{\text{int},a} = M_{\text{ext},a}$, de manera que la tensión longitudinal en el acero en b es

$$T_b = \frac{M_{\text{ext},a} - V_d p + V_i m}{z} \tag{4.5}$$

Despreciando las fuerzas V_d y V_i, las cuales disminuyen con el aumento en el ancho de las grietas, se tiene, con un margen de error muy pequeño,

$$T_b = \frac{M_{\text{ext},a}}{z} \tag{4.6}$$

La formación de la grieta diagonal produce entonces la siguiente redistribución de fuerzas y esfuerzos internos:

1. En la sección vertical a través del punto a, el esfuerzo cortante promedio antes de la formación de la grieta era V_{ext}/bd. Después de la formación de ésta, la fuerza cortante es resistida por una combinación del cortante de dovela, del cortante de interfase y de la fuerza cortante en el área mucho menor by de la sección de concreto que permanece no fisurada. A medida que se desarrolla el fracturamiento a tensión a lo largo de las barras longitudinales, V_d y V_i disminuyen; esto a su vez produce un aumento en la fuerza cortante y en el correspondiente esfuerzo cortante en el área de concreto que permanece no fisurada.
2. Como se describió anteriormente, la grieta diagonal pasa por lo general por encima del eje neutro y atraviesa una parte de la zona de compresión antes de que sea detenida por los esfuerzos de compresión. En consecuencia, la fuerza de compresión C también actúa en un área by

menor que aquélla sobre la cual actuaba antes de que se formara la grieta. En efecto, la formación de la grieta aumenta los esfuerzos de compresión en el concreto que permanece no fisurado.

3. Antes del agrietamiento diagonal, la fuerza de tensión en el acero en el punto *b* era causada por el momento flector y proporcional al mismo, ubicado en la sección vertical a través del punto *b*. Sin embargo, como una consecuencia de la grieta diagonal, la ecuación (4.6) muestra que la tensión en el acero en *b* ahora la genera y es proporcional al momento flector en el punto *a*. Puesto que el momento en *a* es evidentemente mayor que en *b*, la formación de la grieta ocasiona un incremento súbito en el esfuerzo del acero en *b*.

Si los dos materiales son capaces de resistir estos esfuerzos incrementados, el equilibrio se restablecerá por sí mismo después de una redistribución interna y se podrán aplicar entonces cargas adicionales antes de que se presente la falla. Esta falla puede desarrollarse de varias maneras. En una de ellas, para el caso en que sólo se suministra el acero suficiente en *b* para resistir el momento en esta sección, el incremento de la fuerza en el acero descrita en el ítem 3 provocará la fluencia en el mismo a causa del momento mayor en *a*, produciendo así la falla de la viga. Si la viga está diseñada en forma adecuada para impedir que esto suceda, será por lo general el concreto en la cabeza de la grieta el que presente un eventual aplastamiento. Este concreto está sometido de modo simultáneo a grandes esfuerzos de compresión y de cortante, y esta combinación biaxial de esfuerzos conduce a la falla más pronto que en caso de que cualquiera de los esfuerzos estuviera actuando solo. Finalmente, si existe fracturamiento a lo largo del refuerzo, éste va a ocasionar un debilitamiento en la adherencia entre el acero y el concreto hasta tal grado que el refuerzo puede soltarse. Esto puede causar la falla de la viga o puede ocurrir en forma simultánea con el aplastamiento del concreto que aún permanezca no fisurado.

Ya se había anotado que vigas relativamente altas mostrarán con frecuencia resistencia continua y creciente después de la formación de una grieta de tensión diagonal crítica, pero que vigas relativamente bajas fallarán casi de inmediato luego de la formación de la grieta. La cantidad de resistencia de reserva, si es que existe, resulta incierta. De hecho, en varias series de ensayos en los cuales se experimentaron dos elementos tan idénticos como fue posible, uno falló inmediatamente después de la formación de la grieta diagonal, mientras que el otro alcanzó el equilibrio después de la redistribución descrita y falló a una carga mayor.

Por esta razón, la resistencia de reserva no se tiene en cuenta en los procedimientos modernos de diseño. Como se mencionó, la mayor parte de las vigas están provistas por lo menos con una mínima cantidad de refuerzo en el alma. Para aquellos elementos a flexión que no la tienen, como losas, zapatas y otros, el diseño se fundamenta en la fuerza cortante V_{cr} o en el esfuerzo cortante v_{cr} para el cual se espera la formación de grietas inclinadas. Así que la ecuación (4.3), o alguna equivalente, se convierte en el criterio de diseño para estos elementos.

4.4 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO CON REFUERZO EN EL ALMA

La economía en el diseño exige, en la mayor parte de los casos, que un elemento sometido a flexión sea capaz de desarrollar su máxima capacidad a momento en vez de tener limitada su resistencia por una falla a cortante prematura. Esto también es necesario porque las estructuras, si se sobrecargan, no deben fallar de la manera súbita y explosiva, característica de muchas fallas a cortante, sino que deben mostrar adecuada ductilidad y avisar en caso de desastre inminente. Esta última forma de falla, como se subrayó con anterioridad, es común en la falla a flexión ocasionada por fluencia de las barras longitudinales, la cual es precedida por grandes deflexiones gradualmente mayores y un ensanchamiento de las grietas perceptible con facilidad. Por consiguiente, si no existe un amplio margen de seguridad con respecto a la resistencia a cortante disponible determinada por la ecuación (4.3) o su equivalente, se utiliza refuerzo a cortante especial (conocido como *refuerzo en el alma*) para aumentar esta resistencia de la viga.

a. Tipos de refuerzo en el alma

En general, el refuerzo en el alma se suministra en forma de *estribos* verticales espaciados a intervalos variables a lo largo del eje de la viga según lo requerido, como indica la figura 4.8*a*. Se utilizan barras de tamaño relativamente pequeño, por lo general las Nos. 3, 4 y 5. Las barras con formas sencillas en U, similares a las de la figura 4.8*b* son las más comunes aunque algunas veces se requieran estribos de múltiples ramas como los que aparecen en la figura 4.8*c*. Los estribos se conforman para ajustarse alrededor de las barras longitudinales principales, como se señala; usualmente se incluyen barras longitudinales de diámetro pequeño en la parte superior de los estribos para proveer soporte durante la construcción. A causa de la longitud relativamente corta del estribo embebido en la zona de compresión de la viga, en la mayor parte de los casos se debe proporcionar anclaje especial en forma de ganchos o doblamientos; los requisitos para el anclaje de estribos se analizarán en forma minuciosa en el capítulo 5.

Como alternativa, el refuerzo a cortante puede proporcionarse mediante el doblamiento hacia arriba de una fracción del acero longitudinal cuando éste no se requiera más para resistir la tensión por flexión, como se sugiere en la figura 4.8*d*. En vigas continuas, estas barras dobladas hacia arriba pueden constituir todo o parte del refuerzo necesario para momentos negativos. Los requisitos para refuerzo a flexión longitudinal por lo general entran en conflicto con aquellos que se exigen para tensión diagonal, y puesto que el ahorro en acero, generado por la utilización de la capacidad de las barras dobladas como resistencia al corte es pequeño, muchos diseñadores prefieren incluir estribos verticales para suministrar toda la resistencia a cortante necesaria contando con la parte doblada de las barras longitudinales, si se utilizan, sólo para incrementar el margen de seguridad global contra falla a tensión diagonal.

Las mallas electrosoldadas de alambrón se emplean algunas veces como refuerzo a cortante, en particular para elementos pequeños con cargas ligeras y almas delgadas, y para algunos tipos de vigas prefabricadas y preesforzadas.

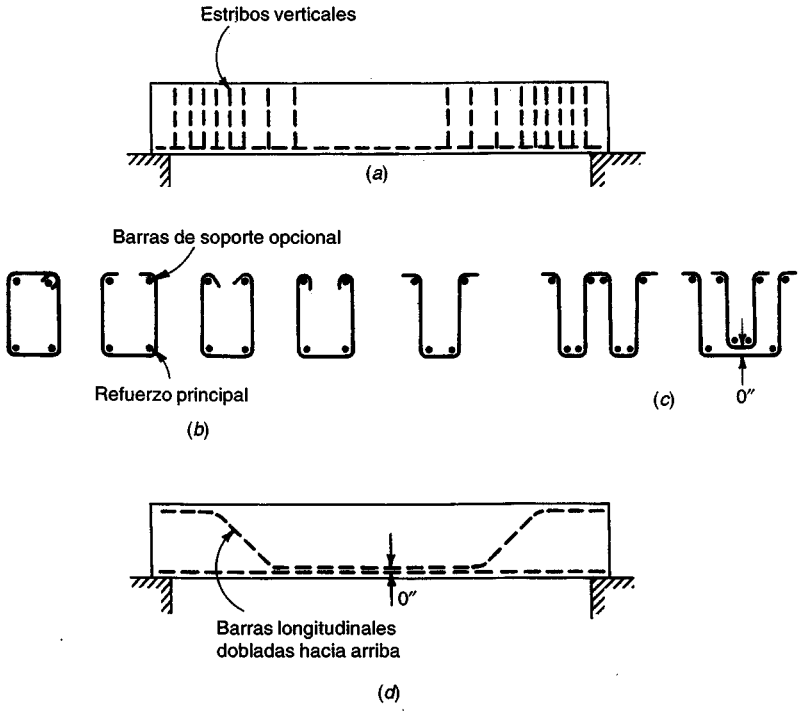


FIGURA 4.8
Tipos de refuerzo en el alma.

b. Comportamiento de vigas de concreto con refuerzo en el alma

El refuerzo en el alma no tiene un efecto perceptible previo a la formación de las grietas diagonales. De hecho, mediciones realizadas demuestran que el acero en el alma está prácticamente libre de esfuerzos antes de la formación de las grietas. Después de que se desarrollan las grietas diagonales, el refuerzo en el alma aumenta la resistencia a cortante de la viga de cuatro maneras diferentes:

1. Las barras que atraviesan la grieta particular resisten parte de la fuerza cortante. El mecanismo de esta resistencia adicional se analiza más adelante.
2. La presencia de estas mismas barras restringe el crecimiento de las grietas diagonales y reduce su penetración dentro de la zona de compresión. Esto deja mayor concreto no fisurado en la cabeza de la grieta para resistir la acción combinada del cortante y de la compresión, tal como se presentó anteriormente.
3. Los estribos también contrarrestan el ensanchamiento de las grietas de manera que las dos caras de la grieta permanecen en estrecho contacto. Esto produce una fuerza de interfase V_i significativa y confiable (ver la figura 4.7).
4. Como aparece en la figura 4.8, los estribos están distribuidos de manera que amarren el refuerzo longitudinal al cuerpo principal de concreto. Esto provee alguna medida de restricción contra el fracturamiento del concreto a lo largo del refuerzo longitudinal, como indican las figuras 4.1 y 4.7*b*, y aumenta la parte de fuerza cortante resistida por la acción de dovela.

A partir de lo anterior es obvio que la falla será inminente cuando los estribos comiencen a fluir. Esta fluencia no sólo agota la propia resistencia de los estribos sino que también permite un ensanchamiento en las grietas con la consecuente reducción de los efectos benéficos de restricción analizados en los puntos 2 a 4.

De esta descripción resulta claro que el comportamiento, una vez se forma la grieta, es bastante complejo y depende en sus detalles de la configuración particular de las grietas (longitud, inclinación y localización de la grieta principal o crítica). Ésta última es a su vez bastante incierta y hasta ahora ha desafiado una predicción puramente analítica. Por esta razón, los conceptos que fundamentan la práctica del diseño actual no son del todo racionales; ellos se fundamentan de manera parcial en análisis racionales, en evidencias de ensayos y en la experiencia exitosa a largo término con estructuras en las cuales algunos procedimientos para diseño del refuerzo en el alma han dado como resultado un comportamiento satisfactorio.

VIGAS CON ESTRIBOS VERTICALES. Puesto que el refuerzo en el alma no es efectivo en vigas no fisuradas, la magnitud de la fuerza cortante o del esfuerzo cortante que causa el agrietamiento es la misma que en una viga sin refuerzo en el alma y puede determinarse con la ecuación (4.3). En la mayor parte de los casos, el refuerzo en el alma consta de *estribos verticales*; en la figura 4.9 aparecen las fuerzas que actúan en la porción entre la grieta y el apoyo más cercano a una viga así reforzada. Ellas son las mismas que las de la figura 4.7, excepto que cada estribo que atraviesa la grieta ejerce una fuerza $A_v f_v$ en la porción dada de la viga. Aquí A_v es el área de la sección transversal del estribo (en el caso de los estribos en forma de U de la figura 4.8*b*, el área

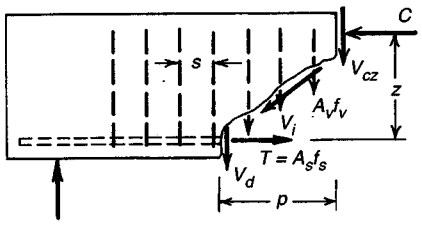


FIGURA 4.9
Fuerzas en una grieta diagonal de una viga con estribos verticales.

es el doble del área de una barra) y f_v es el esfuerzo de tensión en el estribo. El equilibrio en la dirección vertical exige que

$$V_{ext} = V_{cz} + V_d + V_{iy} + V_s \qquad (a)$$

donde $V_s = nA_v f_v$ es la fuerza vertical en los estribos, con n igual al número de estribos que atraviesan la grieta. Si s es el espaciamiento entre estribos y p la proyección horizontal de la grieta, como se indica, entonces $n = p/s$.

En la figura 4.10 se señala esquemáticamente la variación en la distribución aproximada de los cuatro componentes de la fuerza cortante interna con un aumento en el cortante externo V_{ext}. Se puede apreciar que después de que aparecen las grietas inclinadas, la porción del cortante $V_s = nA_v f_v$ resistida por los estribos aumenta linealmente, mientras que la suma de los otros tres componentes, $V_{cz} + V_d + V_{iy}$, permanece casi constante. Cuando los estribos fluyen, su contribución permanece constante en el valor de fluencia $V_s = nA_v f_v$. Sin embargo, a causa del ensanchamiento de las grietas inclinadas y del fracturamiento longitudinal, V_{iy} y V_d disminuyen rápidamente. Esto sobrecarga el concreto que todavía permanece no fisurado y precipita muy pronto la falla.

Aunque se puede calcular el cortante total tomado por los estribos en la fluencia, las magnitudes individuales de los otros tres componentes no se conocen. Una cantidad limitada de evidencia experimental conduce al supuesto conservador en los métodos actuales de que, justo antes de la falla de una viga con refuerzo en el alma, la suma de estos tres componentes del cortante es equivalente al cortante de agrietamiento V_{cr} determinado por la ecuación (4.3). Generalmente se hace referencia a esta suma (un poco a la ligera) como la *contribución del concreto* a la resistencia total al cortante, que se denota con V_c. Entonces $V_c = V_{cr}$ y

$$V_c = V_{cz} + V_d + V_{iy} \qquad (b)$$

Anteriormente se vio que la cantidad de estribos n espaciados a una distancia s entre sí, dependía de la longitud p que es la proyección horizontal de la grieta diagonal. Esta longitud se

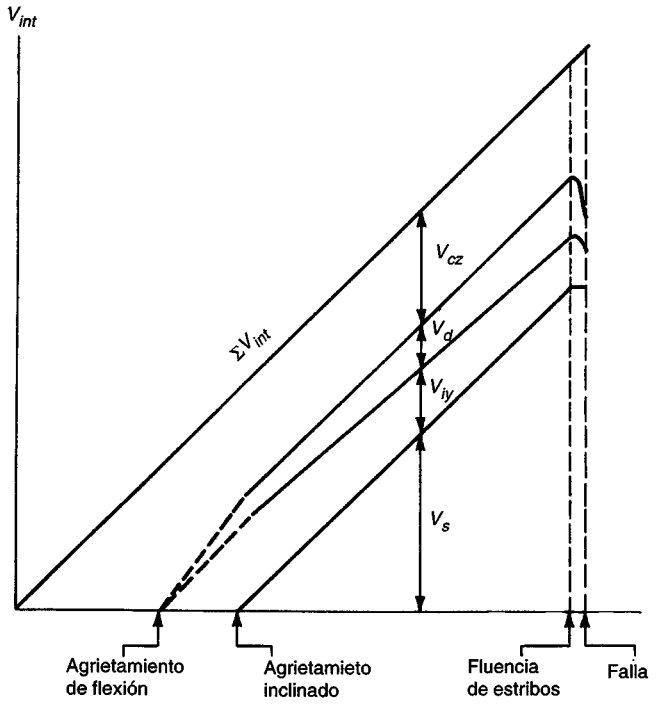


FIGURA 4.10
Redistribución de las fuerzas cortantes internas en una viga con estribos (*adaptada de la referencia 4.3*).

supone igual a la altura efectiva de la viga; entonces $n = d/s$, que implica una grieta con una inclinación un poco menor a 45°. Así, en la falla, cuando $V_{ext} = V_n$, las ecuaciones (a) y (b) dan para la resistencia a cortante última nominal

$$V_n = V_c + \frac{A_v f_y d}{s} \tag{4.7a}$$

en donde V_c se toma igual al cortante de agrietamiento V_{cr} dado por la ecuación (4.3); es decir,

$$V_c = \left(1.9\sqrt{f_c'} + 2500\frac{\rho V d}{M}\right)bd \leq 3.5\sqrt{f_c'}bd \tag{4.8}$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación (4.7a) por bd, se obtiene la misma relación expresada en términos del esfuerzo cortante último nominal:

$$v_n = \frac{V_n}{bd} = v_c + \frac{A_v f_y}{bs} \tag{4.7b}$$

En la referencia 4.1 se comparan los resultados de 166 ensayos sobre vigas con el valor determinado por la ecuación (4.7b). Se demuestra que la ecuación pronostica en forma bastante conservadora la resistencia a cortante real, y que la resistencia observada es en promedio 45 por ciento mayor que la predicha; muy pocos ensayos sobre vigas individuales desarrollaron resistencias ligeramente por debajo de la determinada por la ecuación (4.7b).

VIGAS CON BARRAS INCLINADAS. La función del *refuerzo en el alma inclinado* (figura 4.8d) puede analizarse en términos bastante similares. La figura 4.11 presenta de nuevo las fuerzas que actúan en la porción de la viga a un lado de la grieta diagonal que eventualmente produce la falla. La grieta con proyección horizontal p y longitud inclinada $i = p/(\cos\theta)$ está atravesada por barras inclinadas y espaciadas horizontalmente entre sí a una distancia s. La inclinación de las barras es a y la de la grieta es θ, como se indica. La distancia entre barras, medida paralelamente a la dirección de la grieta, puede calcularse a partir del triángulo irregular como

$$a = \frac{s}{\operatorname{sen}\theta(\cot\theta + \cot\alpha)}$$

La cantidad de barras que atraviesan la grieta, $n = i/a$, se puede calcular después de algunas transformaciones, mediante

$$n = \frac{p}{s}(1 + \cot\alpha\tan\theta)$$

La componente vertical de la fuerza en una barra o estribo es $A_v f_v \operatorname{sen}\alpha$, de manera que la componente total vertical de las fuerzas en todas las barras que atraviesan la grieta es

$$V_s = nA_v f_v \operatorname{sen}\alpha = A_v f_v \frac{p}{s}(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\tan\theta)$$

Como en la situación de estribos verticales, la falla a cortante ocurre cuando el esfuerzo en el refuerzo del alma alcanza el punto de fluencia. De igual modo, se trabaja con los mismos supuestos

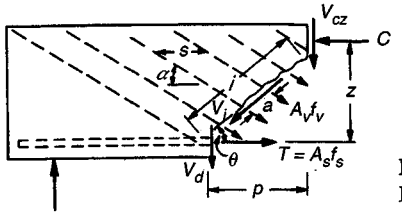


FIGURA 4.11
Fuerzas en una grieta diagonal de una viga con refuerzo en el alma inclinado.

que para el caso de estribos, es decir, que la proyección horizontal de la grieta diagonal es igual a la altura efectiva d y que $V_{cz} + V_d + V_{iy}$ es igual a V_c. Finalmente, la inclinación θ de la grieta diagonal, que varía un poco dependiendo de varios factores, por lo general se supone igual a 45°. Con base en esto, la resistencia última para una falla a cortante se obtiene como

$$V_n = V_c + \frac{A_v f_y d(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)}{s} \tag{4.9}$$

Se puede observar que la ecuación (4.7*a*), desarrollada para estribos verticales, apenas es un caso especial de la expresión más general (4.9), tomando $\alpha = 90°$.

Debe anotarse que las ecuaciones (4.7) y (4.9) se aplican sólo si el refuerzo del alma se encuentra espaciado de manera que cualquier grieta diagonal posible está atravesada al menos por un estribo o una barra inclinada. De otra manera, el refuerzo en el alma no contribuiría a la resistencia a cortante de la viga, puesto que las grietas diagonales que pudieran formarse entre dicho refuerzo, ampliamente espaciado, producirían la falla de la viga con la misma carga que produce la falla cuando no está presente el refuerzo del alma. Esto impone límites superiores al espaciamiento permitido s para asegurar que el refuerzo del alma sea tan efectivo en la realidad como en los cálculos.

Para resumir, en este momento se comprenden sin duda y en forma cualitativa la naturaleza y el mecanismo de la falla por tensión diagonal, pero algunos de los supuestos cuantitativos realizados en el desarrollo precedente no pueden probarse mediante análisis racionales. Sin embargo, los resultados calculados están en correspondencia aceptable y, generalmente, conservadora con una gran cantidad de datos empíricos y estructuras diseñadas con estos principios básicos que han demostrado un comportamiento satisfactorio. Nuevos métodos basados en los modelos racionales que se describen brevemente en la sección 4.8 son promisorios y quizá sean incorporados en ediciones futuras de los códigos ACI y AASHTO.

4.5 DISPOSICIONES DEL CÓDIGO ACI PARA DISEÑO A CORTANTE

De acuerdo con el Código ACI 11.1.1, el diseño a cortante de vigas debe basarse en la relación

$$V_u \leq \phi V_n \tag{4.10}$$

donde V_u es la fuerza cortante total aplicada en determinada sección de la viga y producida por las cargas mayoradas, y $V_n = V_c + V_s$ es la resistencia a cortante nominal igual a la suma de las contribuciones del concreto y del acero en el alma, si éste último existe. Entonces, para estribos verticales

$$V_u \leq \phi V_c + \frac{\phi A_v f_y d}{s} \tag{4.11a}$$

y para barras inclinadas

$$V_u \leq \phi V_c + \frac{\phi A_v f_y d(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)}{s} \tag{4.11b}$$

donde todos los términos se definieron previamente. Para cortante, el coeficiente de reducción de resistencia ϕ debe tomarse igual a 0.85; este valor, ligeramente más conservador que el valor de $\phi = 0.90$ para flexión, refleja tanto la naturaleza súbita de la falla a tensión diagonal, como la amplia dispersión de resultados experimentales.

Para condiciones normales de apoyo, en que la reacción producida por la superficie de apoyo o por una columna monolítica presenta una compresión vertical al final de la viga, las secciones localizadas a distancias menores que d desde la cara del apoyo, pueden diseñarse para el mismo cortante V_u calculado a una distancia d. Sin embargo, si alguna carga concentrada actúa dentro de esta distancia o si la reacción produce tensión vertical en vez de generar compresión (por ejemplo,

si la viga está apoyada en el extremo inferior de un elemento vertical monolítico), la sección crítica de diseño debe tomarse en la cara del apoyo.

a. Resistencia a cortante suministrada por el concreto

La contribución del concreto a la resistencia a cortante nominal (se incluye la contribución generada por el entrelazamiento de agregados, la acción de dovela del refuerzo principal y la del concreto no fisurado) es esencialmente la misma de la ecuación (4.8) con pequeñas modificaciones en la notación. Para permitir la aplicación de la ecuación (4.8) a vigas T con ancho del alma b_w, el ancho b de viga rectangular se remplaza por b_w, teniendo en cuenta que para vigas rectangulares se toma b en lugar de b_w. Para vigas T con anchos variables de alma, como en las viguetas comunes de concreto, se utiliza el ancho promedio del alma a no ser que la parte más delgada del alma esté sometida a compresión, en cuyo caso b_w se toma igual al ancho mínimo. Además, el cortante V y el momento M se designan como V_u y M_u en la ecuación (4.8) para destacar que éstos son valores calculados a partir de las cargas mayoradas. Así que, para elementos sometidos a cortante y flexión, según el código ACI 11.3.2, la contribución del concreto a la resistencia a cortante es

$$V_c = \left(1.9\sqrt{f'_c} + 2500\,\frac{\rho_w V_u d}{M_u}\right) b_w d \le 3.5\sqrt{f'_c}\, b_w d \qquad (4.12a)$$

donde ρ_w es igual a la cuantía de acero longitudinal a tensión $A_s/b_w d$ o A_s/bd. Con las dimensiones de la sección b_w y d en pulgadas, y con $V_u d$ y M_u en unidades consistentes, V_c se expresa en libras. En la ecuación (4.12*a*), la cantidad $V_u d/M_u$ no debe tomarse mayor que 1.0.

Aunque la ecuación (4.12*a*) es perfectamente apropiada para el diseño computarizado o la investigación, para cálculos manuales su uso es tedioso porque ρ_w, V_u, y M_u cambian generalmente a lo largo de la luz, exigiendo el cálculo de V_c a intervalos cercanos. En consecuencia, el código ACI 11.3.1 permite una ecuación alterna para calcular V_c:

$$V_c = 2\sqrt{f'_c}\, b_w d \qquad (4.12b)$$

Con referencia a la figura 4.6, es obvio que la ecuación (4.12*b*) es muy conservadora en regiones donde la relación cortante-momento es grande, como cerca de los bordes de luces simples o de los puntos de inflexión en luces continuas; sin embargo, a causa de su simplicidad, es la que generalmente se utiliza en la práctica.

Los ensayos en que se basaron las ecuaciones (4.12*a*) y (4.12*b*) se realizaron con vigas de concreto con resistencia a la compresión principalmente en el intervalo de 3000 a 5000 lb/pulg^2. Resultados de ensayos experimentales más recientes en la Universidad de Cornell y en otros lugares (ver las referencias 4.9 a 4.11), han demostrado que en vigas construidas con concreto de alta resistencia (ver la sección 2.11) con valores de f'_c superiores a 6000 lb/pulg^2, la contribución del concreto a la resistencia a cortante, V_c, es menor que la estimada por estas ecuaciones. Las diferencias resultan significativamente mayores en cuanto mayor sea la resistencia del concreto. Por esta razón, el Código ACI 11.1.2 establece un límite superior de 100 lb/pulg^2 en el valor de $\sqrt{f'_c}$ para ser utilizado en las ecuaciones (4.12*a*) y (4.12*b*), *al igual que para todas las demás disposiciones del Código ACI relacionadas con el cortante*. Sin embargo, pueden utilizarse valores de $\sqrt{f'_c}$ mayores que 100 lb/pulg^2 para el cálculo de V_c, si se incrementa la cantidad mínima usual de refuerzo en el alma (ver la sección 4.5*b*).

Las disposiciones del código para calcular V_c de acuerdo con las ecuaciones (4.12*a*) y (4.12*b*) son aplicables para concretos de peso normal. Cada vez más se usan concretos con agregados livianos con densidades entre 90 y 120 lb/pulg^3, en particular para elementos prefabricados. Su resistencia a la tensión, de singular importancia para los cálculos de cortante y tensión diagonal, es significativamente menor que la de los concretos de peso normal con la misma resistencia a la compresión (ver la tabla 2.2 y la referencia 4.12). Cuando se diseñe con concretos livianos, es

recomendable obtener un estimativo aproximado de la resistencia a la tensión real del material. La resistencia determinada a partir del ensayo de tensión indirecta f_{ct} no es idéntica a la resistencia a la tensión directa, pero se puede utilizar como una medida conveniente y confiable.

Para concretos de peso normal, la resistencia del ensayo de tensión indirecta se toma a menudo igual a $6.5\sqrt{f'_c}$. De acuerdo con esto, el Código ACI especifica que $\sqrt{f'_c}$ debe sustituirse por $f_{ct}/6.7$ en todas las ecuaciones para V_c, con la restricción adicional de que $f_{ct}/6.7$ no debe exceder a $\sqrt{f'_c}$. Si la resistencia determinada en el ensayo de tensión indirecta no está disponible, los valores de V_c calculados con $\sqrt{f'_c}$ deben multiplicarse por 0.75 para los concretos "livianos en todo" y por 0.85 para concretos con "arenas livianas". Todas las demás disposiciones de cortante permanecen invariables.

b. Refuerzo mínimo en el alma

Si V_u, la fuerza cortante para las cargas mayoradas, no es mayor que ϕV_c, calculada con la ecuación (4.12*a*) o, como alternativa, mediante la ecuación (4.12*b*), entonces en teoría no se requiere refuerzo en el alma. Aun en tal caso, el Código ACI 11.5.5 exige al menos un área mínima de refuerzo en el alma igual a

$$A_v = 50\frac{b_w s}{f_y} \tag{4.13}$$

donde s = espaciamiento longitudinal del refuerzo en el alma, pulg
f_y = resistencia a la fluencia del acero en el alma, lb/pulg^2
A_v = área total de la sección transversal de acero en el alma dentro de la distancia s, pulg^2

Estas disposiciones son válidas a menos que V_u sea la mitad o menos que la resistencia a cortante de diseño ϕV_c suministrada por el concreto. Hay algunas excepciones específicas a estos requisitos de acero mínimo en el alma para losas y zapatas, para la construcción de entrepisos con viguetas de concreto y para vigas con espesor total no mayor de 10 pulg, $2\frac{1}{2}$ veces el espesor del ala o la mitad del ancho del alma (la que sea mayor). Estos elementos se excluyen por su capacidad para redistribuir las fuerzas internas antes de la falla a tensión diagonal, como lo comprueban los ensayos y la experiencia exitosa de diseño.

Para vigas de concreto de alta resistencia, la limitación usual de 100 lb/pulg^2 que se impone al valor de $\sqrt{f'_c}$ utilizado en los cálculos de V_c mediante la ecuación (4.12*a*) o la ecuación (4.12*b*), es eliminada por el Código ACI 11.1.2.1, si estas vigas se diseñan con un refuerzo mínimo a cortante igual a $f'_c/5000$ veces, pero no más de tres veces la cantidad requerida por la ecuación (4.13). La contribución del concreto a la resistencia a cortante puede calcularse con base en la totalidad de la resistencia a compresión del concreto. Los ensayos descritos en la referencia 4.9 indican que para vigas con resistencias del concreto por encima de las 6000 lb/pulg^2, la contribución V_c del concreto fue significativamente menor que la estimada por las ecuaciones del Código ACI, a pesar de que la contribución V_s del acero fue mayor. La resistencia a cortante nominal total V_n, fue mayor en todos los casos que la estimada por los métodos del Código ACI. Las disposiciones del Código ACI que modifican el acero mínimo en el alma para vigas de concreto de alta resistencia y que produce en la mayor parte de los casos mayor cantidad de acero en el alma, están dirigidas a aumentar la capacidad después del agrietamiento, permitiendo obtener así diseños más seguros aunque la contribución del concreto a la resistencia a cortante sea sobrestimada†.

† Las limitaciones del enfoque del Código ACI "$V_c + V_s$" para el diseño a cortante, en particular las relacionadas con la contribución del concreto V_c, motivaron el desarrollo de procedimientos más racionales aún no implementados en los Estados Unidos. En la sección 4.8 se analizará un método alterno para diseño a cortante.

Ejemplo 4.1. Viga sin refuerzo en el alma. Debe diseñarse una viga rectangular para resistir una fuerza cortante V_n de 30 klb. No se debe utilizar refuerzo en el alma y se sabe que $f'_c = 4000$ lb/pulg^2. ¿Cuál es la sección transversal mínima si el diseño está controlado por cortante?

Solución. Si no se utiliza refuerzo en el alma, las dimensiones de la sección transversal deben seleccionarse de manera que el cortante aplicado V_u no sea mayor que la mitad de la resistencia de diseño a cortante ϕV_c. Los cálculos se basan en la ecuación (4.12*b*). Entonces

$$V_u = \frac{1}{2}\phi(2\sqrt{f'_c}b_w d)$$

$$b_w d = \frac{30{,}000}{0.85\sqrt{4000}} = 560 \text{ pulg}^2$$

Se requiere una viga con $b_w = 18$ pulg y $d = 31$ pulg. De manera alterna, si se utiliza la mínima cantidad de refuerzo en el alma determinada por la ecuación (4.13), la resistencia a cortante del concreto ϕV_c puede tomarse en todo su valor, y se confirma fácilmente que una viga con $b_w = 12$ pulg y $d = 23.5$ pulg es suficiente.

c. Regiones donde se requiere refuerzo en el alma

Si la resistencia a cortante requerida V_u es mayor que la resistencia de diseño a cortante ϕV_c suministrada por el concreto en cualquier porción de la viga, existe una necesidad teórica de refuerzo en el alma. Para otros sitios a lo largo de la luz, debe proveerse acero en el alma por lo menos en cantidad igual a la dada por la ecuación (4.13), excepto que la fuerza cortante calculada sea menor que $\frac{1}{2}\phi V_c$.

La porción de cualquier luz a lo largo de la cual se requiere, en teoría, el refuerzo en el alma, puede encontrarse dibujando el diagrama de cortante para la luz y superponiendo un gráfico de la resistencia a cortante del concreto. Donde la fuerza cortante V_u exceda ϕV_c, debe proporcionarse refuerzo a cortante para resistir el exceso. La longitud adicional que requiere por lo menos el acero mínimo en el alma puede encontrarse superponiendo un gráfico de $\phi V_c/2$.

Ejemplo 4.2. Límites del refuerzo en el alma. Una viga rectangular simplemente apoyada con 16 pulg de ancho y con una altura efectiva de 22 pulg, sostiene una carga total mayorada de 7.9 klb/pie en una luz libre de 20 pies. Está reforzada con 9.86 pulg^2 de acero a tensión que continúa sin interrupción hasta los apoyos. Si $f'_c = 3000$ lb/pulg^2, ¿qué parte de la viga requiere refuerzo en el alma?

Solución. La fuerza cortante externa máxima se presenta en los extremos de la luz donde $V_u = 7.9 \times 20/2 = 79.0$ klb. En la sección crítica a cortante, a una distancia d del apoyo, $V_u = 79.0 - 7.9 \times 1.83 = 64.5$ klb. La fuerza cortante varía linealmente hasta cero en el centro de la luz. Lá variación de V_u aparece en la figura 4.12*a*. Con la ecuación (4.12*b*) se obtiene

$$V_c = 2\sqrt{3000} \times 16 \times 22 = 38{,}600 \text{ lb}$$

Entonces $\phi V_c = 0.85 \times 38.6 = 32.8$ klb. Este valor se superpone en el diagrama de cortante, y con base en la geometría se determina el punto para el cual, en teoría, no se requiere más el refuerzo en el alma, y que está a

$$10\left(\frac{79.0 - 32.8}{79.0}\right) = 5.86 \text{ pies}$$

desde la cara del apoyo. Sin embargo, según el Código ACI, se requiere por lo menos una cantidad mínima de refuerzo en el alma donde la fuerza cortante exceda $\phi V_c/2$, o 16.4 klb en este caso. Como se observa en la figura 4.12*a*, esto corresponde a una distancia de

$$10\left(\frac{79.0 - 16.4}{79.0}\right) = 7.92 \text{ pies}$$

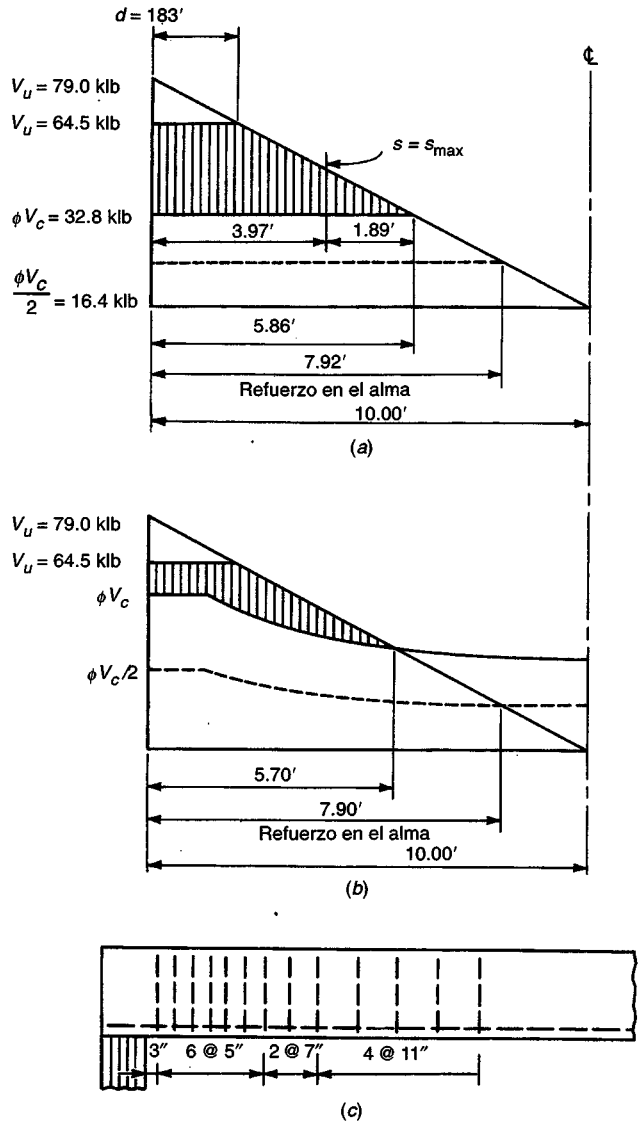


FIGURA 4.12
Ejemplo de diseño a cortante.

desde la cara del apoyo. Para resumir, debe suministrarse por lo menos el acero mínimo en el alma hasta una distancia de 7.92 pies desde los apoyos, y se debe proporcionar el acero en el alma hasta una distancia de 5.86 pies para la fuerza cortante correspondiente al área sombreada.

Si se utiliza la ecuación alterna (4.12*a*), se debe conocer la variación de ρ_w, V_u y M_u a lo largo de la luz, de manera que pueda calcularse V_c. Esto se hace mejor en forma tabular como se indica en la tabla 4.1.

El cortante último aplicado V_u y la capacidad de diseño a cortante ϕV_c se grafican en la figura 4.12*b*. A partir del gráfico se encuentra que, teóricamente, a una distancia de 5.70 pies desde la cara del apoyo no se requieren más los estribos. Sin embargo, a partir del gráfico de $\phi V_c/2$ se encuentra que debe suministrarse por lo menos el acero mínimo en el alma hasta una distancia de 7.90 pies.

Al comparar las figuras 4.12*a* y 4.12*b* resulta evidente que la longitud donde se necesita refuerzo en el alma es casi la misma para este ejemplo, bien sea que se utilice la ecuación (4.12*a*) o la (4.12*b*). Sin embargo, la menor área sombreada de la figura 4.12*b* indica que se necesitaría sustancialmente menos área de acero en el alma, dentro de la distancia requerida, si se adoptara la ecuación (4.12*a*), que es más precisa.

TABLA 4.1
Ejemplo de diseño a cortante

Distancia en pies desde el apoyo	M_u, klb-pie	V_u, klb	V_c^a	ϕV_c
0	0	79.0	61.2	52.0
1	76	71.1	61.2	52.0
2	142	63.2	56.7	48.2
3	201	55.3	48.9	41.6
4	252	47.4	45.1	38.3
5	296	39.5	42.6	36.2
6	332	31.6	40.8	34.7
7	370	23.7	39.4	33.5
8	379	15.8	38.4	32.6
9	391	7.9	37.7	32.0
10	395	0	36.6	31.1

[a] $V_c = (1.9\sqrt{f'_c} + 2500\rho_w V_u d/M_u)b_w d \leq 3.5\sqrt{f'_c}b_w d$ y $V_u d/M_u \leq 1.0$

d. Diseño del refuerzo en el alma

El diseño del refuerzo en el alma, bajo las disposiciones del Código ACI, se basa en la ecuación (4.11*a*) para estribos verticales y en la (4.11*b*) para estribos inclinados o barras dobladas. En el diseño, por lo general, es conveniente seleccionar un área tentativa de acero en el alma A_v, con base en tamaños estándares de estribos (a menudo en el intervalo de los Nos. 3 a 5 para estribos y según el tamaño de las barras longitudinales para barras dobladas), para los cuales se puede encontrar el espaciamiento necesarios. Si se iguala la resistencia de diseño ϕV_n con la resistencia requerida V_u, y se transforman las ecuaciones (4.11*a*) y (4.11*b*) como corresponde, se encuentra que el espaciamiento requerido para el refuerzo en el alma para estribos verticales es:

$$s = \frac{\phi A_v f_y d}{V_u - \phi V_c} \tag{4.14a}$$

para barras dobladas:

$$s = \frac{\phi A_v f_y d(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}{V_u - \phi V_c} \tag{4.14b}$$

Debe recalcarse que cuando se utilicen estribos convencionales en forma de U como los de la figura 4.8*b*, el área en el alma A_v, suministrada por cada estribo, es el *doble* del área de la sección transversal de la barra; para estribos como los de la figura 4.8*c*, A_v es cuatro veces el área de la barra utilizada.

Mientras que el Código ACI exige que la parte inclinada de una barra doblada forme un ángulo de por lo menos 30° con la parte longitudinal, en general las barras se doblan a un ángulo de 45°. Sólo las tres cuartas partes centrales de la parte inclinada de cualquier barra pueden considerarse efectivas como refuerzo en el alma.

No es aconsejable espaciar los estribos verticales a menos de cerca de 4 pulgadas; el tamaño de los estribos debe seleccionarse para evitar un espaciamiento más estrecho. Cuando se requieren estribos verticales a lo largo de una distancia relativamente corta, es buena práctica espaciarlos de modo uniforme a lo largo de toda la distancia, calculando el espacio para el punto de mayor cortante (mínimo espaciamiento). Si se requiere refuerzo en el alma en una gran distancia, y si el cortante varía sustancialmente en ella, es más económico calcular el espaciamiento necesario en varias secciones y colocar los estribos de esta manera en grupos de espaciamiento variable.

Donde realmente se necesite refuerzo en el alma, el Código exige que los estribos queden espaciados de manera que cualquier línea a 45°, que represente una grieta diagonal potencial y que se extienda desde la mitad de la altura del elemento $d/2$ hasta las barras longitudinales a tensión, esté atravesada al menos por una línea de refuerzo en el alma; además, el Código especifica un espaciamiento máximo de 24 pulgadas. Cuando V_s es mayor que $4\sqrt{f'_c}\,b_w\,d$, estos espaciamientos máximos se reducen a la mitad. Estas limitaciones aparecen en la figura 4.13 tanto para estribos verticales como para barras inclinadas, en situaciones en que el cortante en exceso no sobrepasa el límite establecido.

Para propósitos de diseño, resulta más conveniente invertir la ecuación (4.13), que da el área mínima de acero en el alma A_v, para permitir el cálculo del espaciamiento máximo s para el área seleccionada A_v. Entonces, para el caso usual de estribos verticales, con $V_s \leq 4\sqrt{f'_c}\,b_w d$, el espaciamiento máximo de estribos es el menor de

$$s_{\max} = \frac{A_v f_y}{50 b_w} \tag{4.15a}$$

$$s_{\max} = \frac{d}{2} \tag{4.15b}$$

$$s_{\max} = \frac{d}{2} \tag{4.15c}$$

Para barras longitudinales dobladas a 45°, la ecuación (4.15b) se remplaza por $s_{\max} = 3d/4$, como lo confirma la figura 4.13.

Para evitar grietas muy anchas en el alma de las vigas, el Código ACI limita la resistencia a la fluencia del refuerzo a valores de f_y = 60,000 lb/pulg² o menos. De acuerdo con el Código ACI, en ningún caso el valor de V_s debe exceder $8\sqrt{f'_c}\,b_w d$ independientemente de la cantidad de acero utilizado en el alma.

Ejemplo 4.3. Diseño de refuerzo en el alma. Si se utilizan estribos verticales en forma de U, con f_y = 40,000 lb/pulg², diseñe el refuerzo en el alma para la viga del ejemplo 4.2.

Solución. La solución se basa en el diagrama de corte de la figura 4.12a. Los estribos deben diseñarse para resistir aquella parte del cortante que aparece sombreada. Con estribos No. 3, en forma tentativa, se aplican inicialmente los tres criterios de máximo espaciamiento. Para $\phi V_s = V_u - \phi V_c$ = 31,700 lb, que es menor que $4\phi\sqrt{f'_c}\,b_w d$ = 65,600 lb, el espaciamiento máximo no debe exceder $d/2$ = 11 pulg ni 24 pulg. También, con la ecuación (4.15a),

$$s_{\max} = \frac{A_v f_y}{50 b_w} = \frac{0.22 \times 40{,}000}{50 \times 16} = 11 \text{ pulg}$$

El primer y tercer criterios controlan de igual manera en este caso y se impone un máximo espaciamiento de 11 pulg. A una distancia d desde el apoyo, el cortante en exceso $V_u - \phi V_c$ es 31,700 lb. En esta región el espaciamiento necesario es

$$s = \frac{\phi A_v f_y d}{V_u - \phi V_c} = \frac{0.85 \times 0.22 \times 40{,}000 \times 22}{31{,}700} = 5.2 \text{ pulg}$$

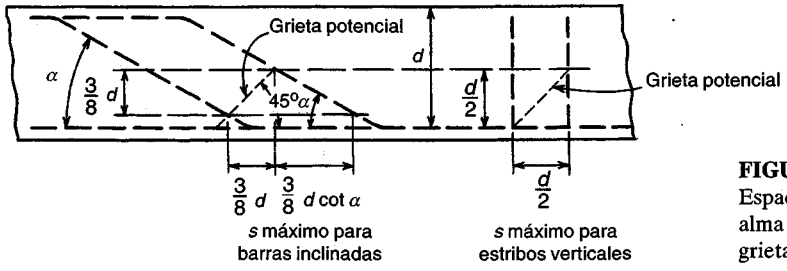


FIGURA 4.13
Espaciamiento máximo del refuerzo en el alma controlado por la intersección de grietas diagonales.

Este valor no es tan pequeño para que haya problemas de vaciado, ni tan grande para que controle los criterios de espaciamiento máximo; por tanto, se puede confirmar la selección de estribos No. 3. Con la solución de la ecuación (4.14*a*) para el cortante en exceso para el cual se puede utilizar el máximo espaciamiento, se obtiene

$$V_u - \phi V_c = \frac{\phi A_v f_y d}{s} = \frac{0.85 \times 0.22 \times 40{,}000 \times 22}{11} = 14{,}960 \text{ lb}$$

Con referencia a la figura 4.12*a*, este valor se alcanza a una distancia x_1 a partir del punto de cero cortante en exceso, donde $x_1 = 5.86 \times 14{,}960/46{,}200 = 1.89$ pies. Es decir, 3.97 pies desde la cara de apoyo. Con base en esta información, puede seleccionarse un patrón de espaciamiento satisfactorio. El primer estribo se coloca en general a una distancia $s/2$ del apoyo. El siguiente esquema de espaciamiento resulta aceptable:

1 espacio a 3 pulg = 3 pulg
6 espacios a 5 pulg = 30 pulg
2 espacios a 7 pulg = 14 pulg
4 espacios a 11 pulg = 44 pulg
Total = 91 pulg = 7 pies 7 pulg

Este esquema resultante de estribos se indica en la figura 4.12*c*. Como solución alterna, es posible delinear una curva que muestre el espaciamiento requerido en función de la distancia desde el apoyo. Una vez que se determine el espaciamiento necesario en una sección de referencia, por ejemplo en el apoyo

$$s_0 = \frac{0.85 \times 0.22 \times 40{,}000 \times 22}{79{,}000 - 32{,}800} = 3.55 \text{ pulg}$$

es fácil obtener el espaciamiento exigido para cualquier otro punto. En la ecuación (4.14*a*), solamente $V_u - \phi V_c$ cambia con la distancia desde el apoyo. Para carga uniforme esta cantidad es una función lineal de la distancia desde el punto donde no hay cortante en exceso; es decir, a 5.86 pies de la cara de apoyo. Entonces, a intervalos de un pie,

$$s_1 = 3.55 \times 5.86/4.86 = 4.27 \text{ pulg}$$
$$s_2 = 3.55 \times 5.86/3.86 = 5.39 \text{ pulg}$$
$$s_3 = 3.55 \times 5.86/2.86 = 7.27 \text{ pulg}$$
$$s_4 = 3.55 \times 5.86/1.86 = 11.18 \text{ pulg}$$
$$s_5 = 3.55 \times 5.86/0.86 = 24.20 \text{ pulg}$$

Los anteriores valores se grafican en la figura 4.14 simultáneamente con el espaciamiento máximo de 11 pulg, y se escoge un patrón de espaciamiento práctico. El espaciamiento a una distancia d desde la

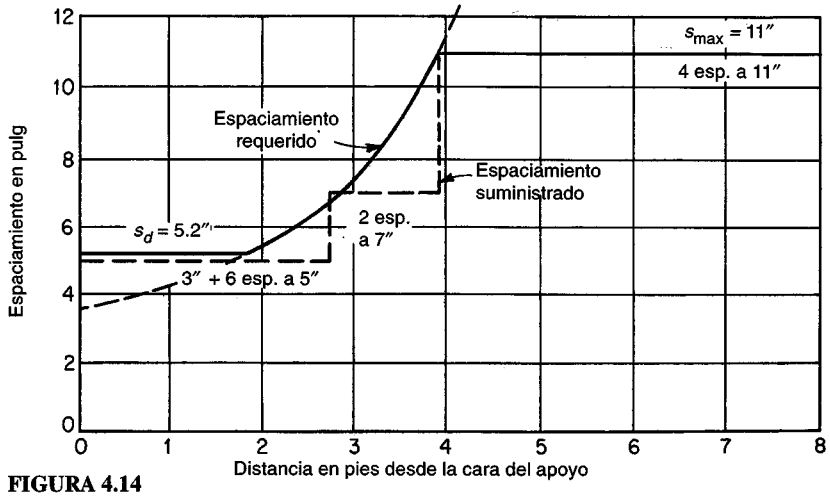


FIGURA 4.14
Espaciamientos requeridos para los estribos del ejemplo 4.3.

cara del apoyo se elige con base en los requisitos mínimos del Código ACI. El patrón seleccionado para estribos No. 3 con forma de U (mostrado en el gráfico) es idéntico al de la solución anterior. En muchos casos el diseñador experimentado encontrará innecesario delinear el diagrama de espaciamiento de la figura 4.14 y optará por un patrón de espaciamiento, directamente después de calcular los espaciamientos requeridos en varios intervalos a lo largo de la viga.

Si se quisiera diseñar el acero en el alma con base en el diagrama de cortante en exceso de la figura 4.12*b*, sería necesario seleccionar el segundo procedimiento ilustrado antes, y el espaciamiento se calcularía para varios intervalos a lo largo de la luz. En este caso en particular, el espaciamiento máximo permitido de 11 pulg es menor que el requerido por cortante en exceso en cualquier sitio entre el punto de cortante en exceso cero y el punto a una distancia d desde el apoyo. En consecuencia, se podría utilizar el siguiente espaciamiento:

$$\begin{aligned} 1 \text{ espacio a } 5 \text{ pulg} &= 5 \text{ pulg} \\ 8 \text{ espacios a } 11 \text{ pulg} &= 88 \text{ pulg} \\ \text{Total} &= 93 \text{ pulg} = 7 \text{ pies } 9 \text{ pulg} \end{aligned}$$

Se usarían nueve estribos No. 3 en cada mitad de la luz, en lugar de los trece calculados anteriormente. Para diseños en que, si se siguen los dos métodos anteriores, los esfuerzos controlan el espaciamiento de estribos en vez de que lo hagan los requisitos de máximo espaciamiento, el ahorro obtenido por la segunda solución sería aún más significativo.

4.6 EFECTO DE LAS FUERZAS AXIALES

Las vigas que se estudiaron en las secciones anteriores estaban sometidas a cortante y flexión únicamente. Por diversas razones, las vigas de concreto reforzado pueden estar sometidas también a fuerzas axiales que actúan de manera simultánea con el cortante y la flexión. Éstas incluyen cargas axiales externas, preesfuerzo longitudinal y fuerzas por restricción, que se presentan como resultado de la retracción del concreto o los cambios de temperatura. La resistencia a cortante de vigas se puede ver significativamente modificada por la presencia de tensión o compresión axiales, lo cual es evidente a partir del repaso de las secciones 4.1 a 4.4.

De acuerdo con la práctica actual, los elementos de concreto preesforzado se tratan mediante métodos especializados basados ampliamente en resultados de ensayos sobre vigas de concreto preesforzado. Éstos se analizan en forma independiente en el capítulo 21† y aquí se tratan sólo vigas no preesforzadas de concreto reforzado.

El principal efecto de la carga axial es modificar la carga que produce agrietamiento diagonal del elemento. En la sección 4.3 se demostró que el agrietamiento por tensión diagonal ocurre cuando el esfuerzo principal de tensión en el alma de la viga, que produce la acción combinada de cortante y flexión, alcanza la resistencia a tensión del concreto. Es obvio que la introducción de una fuerza longitudinal, que modifica la magnitud y dirección del esfuerzo principal de tensión, puede alterar de manera significativa la carga de agrietamiento diagonal. La compresión axial aumentará la carga de agrietamiento, mientras que la tensión axial la disminuirá.

Para elementos cargados exclusivamente a flexión y a cortante, la fuerza cortante para la cual ocurre el agrietamiento diagonal, V_{cr}, puede estimarse mediante la ecuación (4.2*c*), basada en una combinación de evidencia teórica y experimental. Además, por las razones explicadas en la sección 4.4b, en vigas con refuerzo en el alma, la contribución del concreto a la resistencia a cortante V_c se toma igual a la carga de agrietamiento diagonal V_{cr}. Así que, según el Código ACI, la contribución del concreto se calcula mediante las ecuaciones (4.12*a*) o (4.12*b*). Para elementos sometidos a cargas de flexión y cortante además de cargas axiales, V_c puede calcularse mediante modificaciones adecuadas de estas ecuaciones, como se indica a continuación.

† De la edición decimoprimera (N. del T.).

a. Compresión axial

En el desarrollo de la ecuación (4.2*c*) para V_{cr} se indicó que la carga de agrietamiento diagonal dependía de la relación del esfuerzo cortante v al esfuerzo flector f en la parte superior de la grieta a flexión. Aunque estos esfuerzos nunca se determinaron en realidad, se expresaron convenientemente mediante

$$v = K_1\left(\frac{V}{bd}\right) \qquad (a)$$

y

$$f = K_2\left(\frac{M}{bd^2}\right) \qquad (b)$$

La ecuación (*a*) relaciona el esfuerzo cortante en el concreto, ubicado en la parte superior de la grieta a flexión, con el esfuerzo cortante promedio; la ecuación (*b*) relaciona la tensión por flexión en el concreto, en la parte superior de la grieta, con la tensión en el acero a flexión, mediante la relación modular $n = E_s/E_c$, como sigue:

$$f = K_0\frac{f_s}{n} = K_0\frac{M}{nA_s jd}$$

o

$$f = K_0\frac{M}{n\rho jbd^2} \qquad (c)$$

donde jd es el brazo de palanca interno entre C y T, y K_0 es una constante desconocida. Así que, la constante anterior K_2 es igual a $K_0/n\rho j$.

Se considera ahora una viga sometida a compresión axial N al igual que a M y V, como se señala en la figura 4.15*a*. En la figura 4.15*b* se indica cómo el momento, el cortante y la fuerza axial, elementos externos que actúan en el lado izquierdo de un pequeño elemento de la viga con longitud dx, se equilibran mediante los efectos de los esfuerzos internos T, C y V que actúan en el lado derecho. Resulta conveniente remplazar las cargas externas M y N con una carga estáticamente

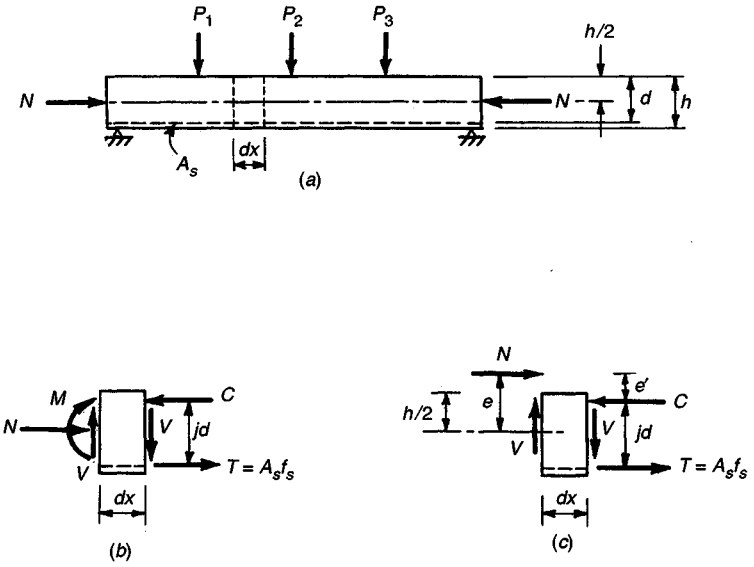


FIGURA 4.15
Vigas sometidas a compresión axial, más cargas de flexión y cortante.

equivalente N que actúa con una excentricidad $e = M/N$ desde la mitad de la altura como aparece en la figura 4.15*c*. El brazo de la fuerza excéntrica N con respecto a la resultante a compresión C es

$$e' = e + d - \frac{h}{2} - jd \qquad (d)$$

El esfuerzo en el acero f_s puede encontrarse ahora tomando momentos con respecto al punto de aplicación de C:

$$f_s = \frac{Ne'}{A_s jd}$$

a partir de lo cual

$$f_s = \frac{M + N(d - h/2 - jd)}{A_s jd}$$

Si se observa que j está muy cerca de $\frac{7}{8}$ para cargas hasta del valor de aquella que produce el agrietamiento diagonal, el término entre paréntesis en la última ecuación anterior puede escribirse como $(d - 4h)/8$. Entonces, con $f = K_0 f_s/n$ como antes, para el esfuerzo de tensión en el concreto en la parte superior de la grieta a flexión se obtiene:

$$f = K_0 \frac{M - N(4h - d)/8}{n\rho jbd^2} = K_2 \frac{M - N(4h - d)/8}{bd^2} \qquad (e)$$

Si se compara la ecuación (*e*) con las ecuaciones (*c*) y (*b*) resulta claro que la deducción anterior para tensión por flexión f sigue siendo válida en el presente caso cuando se incluyen cargas axiales, siempre y cuando se sustituya M por un momento modificado $M - N(4h - d)/8$. De ahí resulta que la ecuación (4.2*c*) puede utilizarse para calcular V_{cr}, siempre y cuando se haga la misma sustitución del momento real por el momento modificado.

El tratamiento del Código ACI se fundamenta en este desarrollo. La contribución del concreto a la resistencia a cortante V_c se toma igual a V_{cr} y está determinada por la ecuación (4.12*a*) como antes:

$$V_c = \left(1.9\sqrt{f'_c} + 2500\frac{\rho_w V_u d}{M_u}\right) b_w d \qquad (4.12a)$$

excepto que el momento modificado

$$M_m = M_u - N_u \frac{4h - d}{8} \qquad (4.16)$$

debe remplazar el valor de M_u y $V_u d/M_u$ no necesita limitarse al valor de 1.0 como antes. La fuerza axial N_u se debe tomar como positiva cuando es de compresión. Para vigas sometidas a compresión axial, el límite superior de $3.5\sqrt{f'_c} b_w d$ se remplaza por

$$V_c = 3.5\sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{1 + \frac{N_u}{500A_g}} \qquad (4.17)$$

donde A_g es el área bruta del concreto y N_u/A_g se expresa en unidades lb/pulg^2.

Como alternativa a la determinación un poco complicada de V_c con las ecuaciones (4.12*a*), (4.16) y (4.17), el Código ACI 11.3.1.2 permite el uso de una expresión simplificada alterna:

$$V_c = 2\left(1 + \frac{N_u}{2000A_g}\right)\sqrt{f'_c} b_w d \qquad (4.18)$$

La figura 4.16 presenta una comparación de V_c calculada mediante la expresión más compleja y la simplificada para vigas sometidas a cargas de compresión. La ecuación (4.18) parece ser por lo

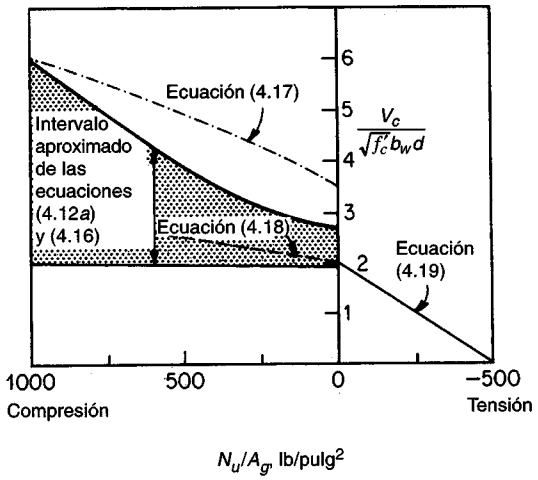


FIGURA 4.16
Comparación de las ecuaciones para V_c en elementos sometidos a cargas axiales.

general más conservadora, en particular para valores grandes de N_u/A_g. Sin embargo, debido a su sencillez, es la que se usa más a menudo en la práctica.

b. Tensión axial

La metodología precedente, desarrollada para vigas sometidas a compresión axial, no correlaciona bien con la evidencia experimental para vigas sometidas a tensión axial y predice con frecuencia resistencias V_c mayores que las realmente medidas. Por esta razón, el Código ACI exige que para elementos sometidos a una tensión axial significativa, al mismo tiempo que a flexión y a cortante, la contribución del concreto se tome como

$$V_c = 2\left(1 + \frac{N_u}{500A_g}\right)\sqrt{f'_c}b_w d \tag{4.19}$$

pero no menor de cero, donde N_u es negativa para tensión. Como una alternativa más sencilla para vigas sometidas a tensión axial, el Código sugiere que V_c se tome igual a cero y que se coloque suficiente refuerzo a cortante para resistir la totalidad del cortante. La variación de V_c con N_u/A_g para vigas a tensión aparece también en la figura 4.16.

Ejemplo 4.4. Efecto de las fuerzas axiales sobre V_c. Una viga con dimensiones $b = 12$ pulg, $d = 24$ pulg, y $h = 27$ pulg, con $f'_c = 4000$ lb/pulg², está sometida a una sola carga mayorada concentrada de 100 klb en el centro de la luz. Encuentre la resistencia a cortante máxima del concreto, V_c, en la primera sección crítica a cortante a una distancia d desde el apoyo: (*a*) si no existen fuerzas axiales, (*b*) si actúa una compresión axial de 60 klb, y (*c*) si actúa una tensión axial de 60 klb. Para cada caso, calcule V_c mediante las dos expresiones del Código ACI, la más compleja y la simplificada. Desprecie el peso propio de la viga. En la sección descrita, el refuerzo a tensión consta de tres barras No. 10 con un área total de 3.79 pulg².

Solución. En la sección crítica, $V_u = 50$ klb y $M_u = 50 \times 2 = 100$ klb-pie, mientras que $\rho = 3.79/12 \times 24 = 0.013$.
(*a*) Si $N_u = 0$, la ecuación (4.12*a*) estima

$$V_c = \left(1.9\sqrt{4000} + 2500\frac{0.013 \times 50 \times 2}{100}\right)12 \times \frac{24}{1000} = 44.0 \text{ klb}$$

que no debe exceder el valor de

$$V_c = 3.5\sqrt{4000} \times 12 \times \frac{24}{1000} = 63.8 \text{ klb}$$

Si se utiliza la expresión simplificada de la ecuación (4.12*b*),

$$V_c = 2\sqrt{4000} \times 12 \times \frac{24}{1000} = 36.4 \text{ klb}$$

que está aproximadamente un 17 por ciento por debajo del valor más exacto de la ecuación (4.12*a*).

(*b*) Si se introduce una compresión de 60 klb, el momento modificado se encuentra con la ecuación (4.16),

$$M_m = 100 - 60\frac{4 \times 27 - 24}{8 \times 12} = 47.5 \text{ klb-pie}$$

Con la introducción de este valor en la ecuación (4.12*a*) en lugar de M_u, la resistencia a cortante del concreto es

$$V_c = \left(1.9\sqrt{4000} + 2500\frac{0.013 \times 50 \times 2}{47.5}\right)12 \times \frac{24}{1000} = 54.3 \text{ klb}$$

y de acuerdo con la ecuación (4.17) no debe exceder

$$V_c = 63.8\sqrt{1 + \frac{60{,}000}{500 \times 12 \times 27}} = 74.6 \text{ klb}$$

Si se utiliza la expresión simplificada de la ecuación (4.18),

$$V_c = 2\left(1 + \frac{60{,}000}{2000 \times 12 \times 27}\right)\sqrt{4000} \times 12 \times \frac{24}{1000} = 39.8 \text{ klb}$$

Al comparar estos resultados con los cálculos más exactos para (*a*) y (*b*), se puede observar que la introducción de un esfuerzo de compresión axial de 60,000/12 × 27 = 185 lb/pulg^2, aumenta la resistencia a cortante en el concreto V_c aproximadamente un 25 por ciento.

(*c*) Cuando actúa una tensión axial de 60 klb, el valor reducido de V_c se encuentra con la ecuación (4.19) y es igual a

$$V_c = 2\left(1 - \frac{60{,}000}{500 \times 12 \times 27}\right)\sqrt{4000} \times 12 \times \frac{24}{1000} = 22.9 \text{ klb}$$

con una reducción de casi el 50 por ciento del valor para $N_u = 0$. Según el Código ACI, para este caso se establecería $V_c = 0$, como alternativa a la utilización de la ecuación (4.19).

En todos los casos anteriores, el coeficiente de reducción de resistencia $\phi = 0.85$ sería aplicado al valor de V_c para obtener la resistencia de diseño.

4.7 VIGAS CON ALTURA VARIABLE

Los elementos de concreto reforzado con altura variable se utilizan con frecuencia en forma de vigas acarteladas en puentes o pórticos simples según la figura 4.17*a*, como vigas de techo prefabricadas de acuerdo con la figura 4.17*b*, o como losas en voladizo. Por lo general, la altura aumenta en dirección del incremento del momento. Para vigas con altura variable, la inclinación de las resultantes de los esfuerzos internos de compresión y de tensión puede afectar significativamente el cortante para el cual debe diseñarse la viga. Además, la resistencia a cortante para estos elementos puede diferir de aquélla para vigas prismáticas.

La figura 4.17*c* presenta una viga en voladizo empotrada en el apoyo del extremo izquierdo y sometida a una sola carga concentrada P a la derecha. La altura aumenta de modo lineal en dirección del incremento del momento. En estos casos, la tensión interna en el acero y la resultante de los esfuerzos de compresión en el concreto están inclinadas e introducen componentes transversales al eje del elemento. Con referencia a la figura 4.17*d*, que muestra una pequeña longitud dx de la

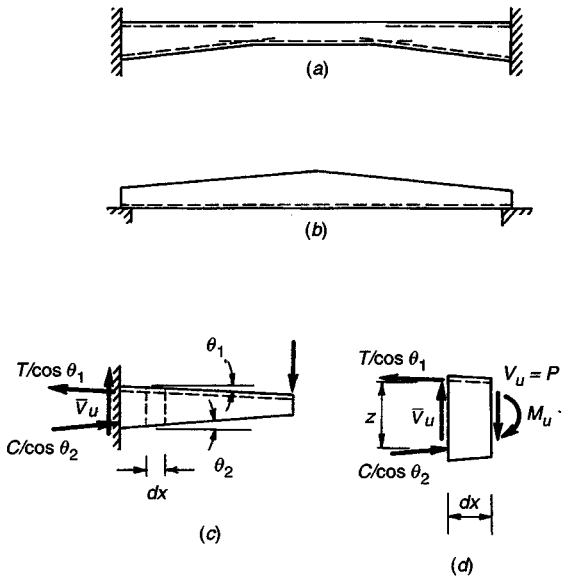


FIGURA 4.17
Efectos de la variación en altura de la viga sobre el cortante.

viga, si la pendiente de la superficie superior es θ_1 y la de la inferior es θ_2, la fuerza cortante neta $\overline{V}_u$ para la cual debe diseñarse la viga está muy cercana a

$$\overline{V}_u = V_u - T\tan\theta_1 - C\tan\theta_2$$

donde V_u es la fuerza cortante externa igual a la carga P para este caso, y $C = T = M_u/z$. El brazo de palanca interno es $z = (d - a/2)$, como de costumbre. Entonces, para un caso en donde la altura de la viga aumenta en dirección del incremento del momento, el cortante para el cual debe diseñarse el elemento es igual aproximadamente a:

$$\overline{V}_u = V_u - \frac{M_u}{z}(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) \qquad (4.20a)$$

Para la situación poco frecuente en que la altura del elemento disminuye en dirección del incremento del momento, se puede confirmar fácilmente que la ecuación correspondiente es

$$\overline{V}_u = V_u + \frac{M_u}{z}(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) \qquad (4.20b)$$

Estas ecuaciones son aproximadas puesto que la dirección supuesta para las fuerzas internas no es exacta; sin embargo, la ecuación puede utilizarse sin error significativo siempre y cuando los ángulos de las pendientes no sobrepasen cerca de los 30°.

Existe muy poca investigación referente a la resistencia a cortante de vigas con altura variable. Los resultados de los ensayos que se presentan en la referencia 4.13 para vigas de luces sencillas, acarteladas con pendientes de aproximadamente hasta 15°, y con espesores que aumentan o disminuyen en la dirección del incremento del momento, no indican un cambio apreciable en la carga de agrietamiento V_{cr} en comparación con la de los elementos prismáticos. Además, la resistencia de las vigas acarteladas, que incluían estribos verticales como refuerzo en el alma, no disminuía o aumentaba de manera significativa, sin importar la dirección de la disminución de la altura. Con base en esta información, parece seguro diseñar a cortante vigas con altura variable utilizando las ecuaciones para V_c y V_s desarrolladas para elementos prismáticos, siempre y cuando se utilice la altura real d de la sección que se analiza en los cálculos.

4.8 MODELOS ALTERNATIVOS PARA ANÁLISIS Y DISEÑO A CORTANTE

El método del Código ACI para diseño de vigas a cortante y a tensión diagonal expuesto en las secciones precedentes de este capítulo es, en esencia, empírico. Aunque por lo general conduce a diseños seguros, el enfoque "$V_c + V_s$" del Código ACI carece de un modelo físico apropiado para el comportamiento de vigas sometidas a cortante en combinación con flexión, y ahora se reconocen sus limitaciones. La "contribución del concreto" V_c se considera generalmente como una combinación de la fuerza transmitida por la acción de dovela del acero principal, del entrelazamiento de agregados a lo largo de la grieta diagonal, y del cortante en el concreto no fisurado por encima del final de la grieta. Los valores de cada contribución no están identificados. Se sigue una racionalización un poco incierta al adoptar la carga de agrietamiento diagonal para un elemento *sin* acero en el alma, como la contribución del concreto a la resistencia a cortante para una viga idéntica *con* acero en el alma (ver la sección 4.4). Además, ahora se sabe que la ecuación (4.12*a*), utilizada para predecir la carga de agrietamiento diagonal, sobrestima la resistencia a cortante del concreto para vigas con bajas cuantías de acero, y sobrestima además la ganancia en la resistencia a cortante que resulta de la utilización de concretos de alta resistencia (ver las referencias 4.9 a 4.11). También se ha demostrado que estima de manera incorrecta la influencia de $V_u d/M_u$ (ver la referencia 4.3). Investigación adicional comprueba que la resistencia a cortante disminuye con relación a la predicción de la ecuación (4.12*a*), a medida que aumenta el tamaño del elemento (ver la referencia 4.14).

El Código ACI incluye procedimientos *ad hoc* para ajustar algunas de estas deficiencias, pero se hace necesario incluir ecuaciones desarrolladas en su mayor parte en forma empírica para tipos específicos de elementos (por ejemplo, vigas de gran altura *versus* vigas normales, vigas preesforzadas con cargas axiales, *versus* no preesforzadas, etc.) con restricciones en el intervalo de aplicabilidad de estas ecuaciones. También es necesario incorporar disposiciones aparentemente arbitrarias para el esfuerzo cortante nominal máximo y para la prolongación del refuerzo en flexión más allá del punto teórico requerido. El resultado final es que el número de ecuaciones para diseño a cortante del Código ACI ha crecido desde cuatro antes de 1963, hasta 43 en 1995 (ver la referencia 4.14*a*).

Actualmente se está prestando mayor atención al desarrollo de metodologías de diseño que se basan en modelos de comportamiento racional, con aplicabilidad más general, que en modelos basados sólo en evidencia empírica.

El *modelo de armadura* fue planteado originalmente por Ritter (ver la referencia 4.15) y Morsch (ver la referencia 4.16) a finales del siglo pasado. Una versión simplificada de este modelo ha sido durante mucho tiempo la base para el diseño del acero a cortante del Código ACI. Las características esenciales del modelo de armadura pueden comprenderse observando la figura 4.18*a*, que presenta la mitad de la luz en una viga simplemente apoyada y cargada uniformemente. La acción combinada de flexión y cortante produce el patrón de agrietamiento mostrado. El refuerzo consta del acero principal a flexión cerca de la cara de tensión, y de los estribos verticales distribuidos a lo largo de la luz.

La acción estructural se puede representar mediante la armadura de la figura 4.18*b*, con el acero principal que suministra el cordón a tensión, el ala superior de concreto que actúa como el cordón a compresión, los estribos que proporcionan los elementos verticales a tensión en el alma y el concreto entre grietas inclinadas que actúa como diagonales a compresión a 45°. La armadura se conforma concentrando todos los estribos cortados por la sección *a-a* en un solo elemento vertical, y todos los puntales diagonales de concreto cortados por la sección *b-b* en una sola diagonal a compresión. La experiencia demuestra que para los casos comunes, los resultados del modelo descrito son algo conservadores, en particular para vigas con pocas cantidades de refuerzo en el alma. Como se anotó anteriormente, en el Código ACI la capacidad a cortante en exceso se toma igual al cortante al inicio del agrietamiento diagonal y se hace referencia a la *contribución del concreto* V_c.

En años recientes, el concepto de la armadura se ha desarrollado de manera importante con el trabajo de Schlaich, Thurlimann, Marti, Collins, MacGregor y otros (ver las referencias 4.17 a 4.22).

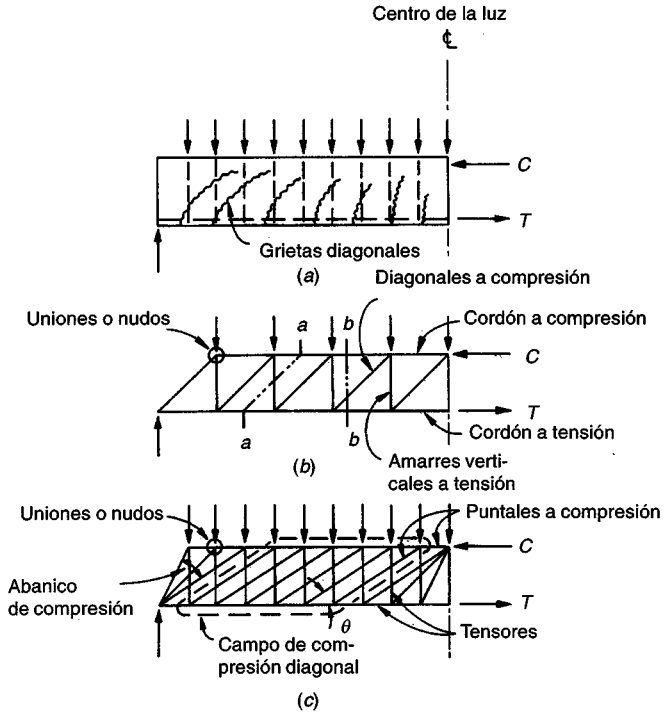


FIGURA 4.18
Modelo de armadura para vigas con refuerzo en el alma: (*a*) viga uniformemente cargada; (*b*) modelo de armadura simple; (*c*) modelo más realista.

Se ha encontrado que el ángulo de inclinación de los puntales de concreto no siempre es 45° sino que puede variar entre 25° y 65°, dependiendo principalmente de la distribución del refuerzo. Esto llevó a lo que se conoce como el *modelo de armadura de ángulo variable* que se presenta en la figura 4.18*c*, que ilustra los cinco componentes básicos del modelo mejorado: (*a*) puntales o elementos de concreto a compresión cargados uniaxialmente, (*b*) amarres o elementos de acero a tensión, (*c*) uniones en las intersecciones de los elementos de armadura que se suponen conectados con pasadores, (*d*) abanicos de compresión que se forman en las zonas "perturbadas", como en los apoyos o bajo cargas concentradas para transmitir las fuerzas hacia la viga, y (*e*) campos de compresión diagonal que se presentan donde los puntales paralelos a compresión transmiten la fuerza desde un estribo hasta el otro. Al igual que en el desarrollo del modelo de armadura del Código ACI, se supone que todos los estribos alcanzan el esfuerzo de fluencia en la falla. Por consiguiente, como se conoce la fuerza en todos los elementos verticales, que es igual a $A_v f_y$, la armadura de la figura 4.18*c* se convierte en estáticamente determinada. Para casos normales, el modelo de armadura puede ser la base para ecuaciones racionales de diseño, pero en casos especiales, el modelo también permite la solución numérica directa del refuerzo requerido. El modelo de armadura no incluye componentes del mecanismo de falla a cortante tales como interacción o fricción entre agregados, acción de dovela del acero longitudinal y cortante transmitido a través del concreto no fisurado. Además, en el formato propuesto originalmente, el modelo de armadura no tiene en cuenta los requerimientos de compatibilidad, es decir que está basado en la *teoría de plasticidad*.

El Canadian National Standard incluye un método de diseño a cortante para concreto reforzado (ver la referencia 4.23) que, en esencia, es el mismo que el expuesto actualmente por el Código ACI, pero que también agrega como alternativa el "método general" basado en el modelo de ángulo variable y en la *teoría del campo a compresión* (ver las referencias 4.14*a* y 4.20). En su versión completa, éste último incluye aspectos de equilibrio y requisitos de compatibilidad, y utiliza las características esfuerzo-deformación de ambos materiales. De esta manera, el modelo es capaz de predecir no sólo la carga de falla sino también la respuesta completa carga-deformación. Los elementos básicos de la teoría del campo a compresión, aplicada a elementos combinados que están a

flexión y cortante, son evidentes al observar la figura 4.19. La figura 4.19*a* muestra una viga de concreto simplemente apoyada, reforzada con barras longitudinales y estribos transversales, y sometida a una carga uniformemente distribuida a lo largo de la cara superior. Las líneas diagonales delgadas son una representación ideal del agrietamiento potencial a tensión en el concreto.

La figura 4.19*b* ilustra que el cortante neto V en una sección a una distancia x desde el apoyo, es resistido por el componente vertical de la fuerza diagonal de compresión en los puntales de concreto. El componente horizontal de la compresión en los puntales debe equilibrarse con la fuerza total a tensión ΔN en el acero longitudinal. Entonces, con referencia a las figuras 4.19*b* y 4.19*e*, la magnitud de la tensión longitudinal producida por el cortante es

$$\Delta N = \frac{V}{\tan\theta} \tag{4.21}$$

donde θ es el ángulo de inclinación de los puntales diagonales. Estas fuerzas deben superponerse a las fuerzas longitudinales producidas por la flexión, que no se incluyen en la figura 4.19*b*.

De acuerdo con este método, la altura efectiva para cálculos de cortante se toma como la distancia entre las resultantes de fuerzas longitudinales, d_v. Así que, a partir de la figura 4.19*c*, el esfuerzo diagonal de compresión en un alma con ancho b_v es

$$f_d = \frac{V}{b_v d_v \operatorname{sen}\theta \cos\theta} \tag{4.22}$$

La fuerza de tensión en los estribos verticales, cada uno con área A_v, y que se supone están en el esfuerzo de fluencia f_y, puede encontrarse a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 4.19*d*. Asumiendo que los estribos están espaciados uniformemente a una distancia s,

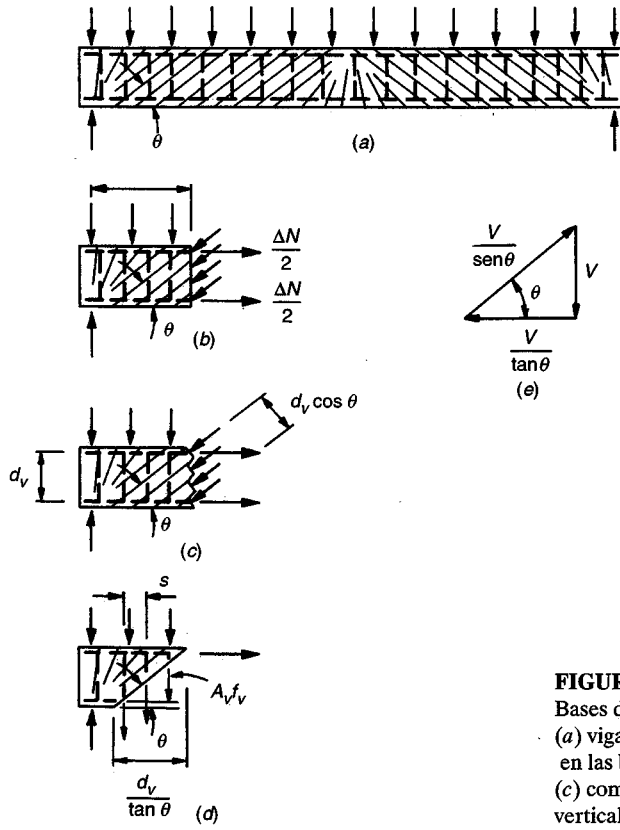


FIGURA 4.19
Bases de la teoría del campo a compresión para cortante: (*a*) viga con refuerzo a cortante y longitudinal; (*b*) tensión en las barras horizontales producida por el cortante; (*c*) compresión diagonal en el alma de la viga; (*d*) tensión vertical en los estribos; (*e*) diagrama de equilibrio de fuerzas ocasionadas por el cortante (*adaptada de la referencia 4.20*).

$$A_v f_y = \frac{V s \tan \theta}{d_v} \tag{4.23}$$

Con referencia al diagrama de cuerpo libre, se observa que el refuerzo transversal dentro de una longitud $d_v/\tan\theta$ puede diseñarse para resistir el menor cortante que ocurra dentro de esa longitud, es decir, el cortante en el extremo derecho.

En el método del Código ACI expuesto en la sección 4.4, se supone que el ángulo θ es de 45°. Con esta premisa, y si se sustituye el valor de d por d_v, la ecuación (4.23) resulta idéntica a la utilizada anteriormente para el diseño de estribos verticales. Sin embargo, se reconoce que el ángulo de inclinación de los puntales a compresión no necesariamente es de 45°, y conforme a la referencia 4.23, este ángulo puede ser seleccionado por el diseñador en un intervalo entre 15° y 75°, siempre y cuando se utilice el mismo valor de θ para satisfacer todos los requisitos de la sección. Resulta evidente a partir de las ecuaciones (4.21) y (4.23) que, si se selecciona un menor ángulo de la pendiente, se requerirá menos refuerzo vertical pero más refuerzo horizontal. Asimismo, se aumentará la compresión en las diagonales de concreto. En forma inversa, si se utiliza un ángulo de pendiente mayor se necesitará más acero vertical pero menos acero horizontal y la fuerza en la diagonal será menor. En general, resulta económico utilizar ángulos de pendiente θ un poco menores que 45°, con la limitación de que los puntales diagonales de concreto no deben sobresforzarse en compresión.

El modelo de armadura de ángulo variable, además de suministrar una base sólida para el diseño del refuerzo a cortante, genera información importante acerca de las necesidades del despiece. Por ejemplo, de lo anterior resulta claro que un incremento en el acero longitudinal a tensión como resultado de la compresión diagonal en los puntales, exige prolongar el acero de flexión más allá del punto en que teóricamente no se requiere para flexión, para tener en cuenta la fuerza a tensión horizontal mayor que resulta de la compresión en los puntales diagonales. Este hecho no se reconoce en forma explícita en el método de diseño de vigas del Código ACI (sin embargo, este Código incluye el requisito arbitrario de que el acero de flexión debe prolongarse una distancia d ó 12 diámetros de barra más allá del punto indicado por los requisitos de flexión). También resulta claro a partir del concepto básico del modelo de armadura, que los estribos deben ser capaces de generar toda su resistencia a tensión a lo largo de la altura completa del estribo. Para vigas anchas, la acción de armadura indica que debe darse especial atención a la distribución lateral del refuerzo en el alma. Es frecuente la práctica de utilizar estribos convencionales en forma de U, para vigas anchas, con la tensión vertical de los estribos concentrada alrededor de las barras longitudinales más exteriores. Como lo demuestra el desarrollo anterior, los puntales diagonales a compresión pueden transmitir fuerzas sólo en los nudos. La falta de ramas en los estribos en el interior del alma de la viga obligaría a la formación de nudos únicamente en las barras longitudinales exteriores, lo que concentraría la compresión diagonal en las caras externas de la viga y posiblemente daría como resultado una falla prematura. Es más conveniente formar un nudo de armadura en cada una de las barras longitudinales y, en consecuencia, en vigas anchas siempre deben utilizarse estribos de varias ramas (ver la figura 4.8*c*).

Una versión refinada del método descrito anteriormente es la *teoría del campo a compresión modificada*, en la cual el concreto fisurado se considera como un material nuevo con sus propias características esfuerzo-deformación. En ella se establecen ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y relaciones constitutivas en términos de esfuerzos y deformaciones unitarias promedio; se tienen en cuenta la variación en el ángulo de inclinación de los puntales a compresión y los efectos de ablandamiento por deformación en la respuesta del concreto; también se consideran las condiciones locales de esfuerzos en los puntos de agrietamiento. La teoría resultante es bastante compleja para ser utilizada en diseño rutinario de vigas simples o continuas, pero conforma una herramienta muy valiosa para el análisis de elementos con geometrías o distribuciones de carga poco usuales o complejas, tales como muros de corte, diafragmas y elementos membrana sometidos a cortantes en su plano y a cargas axiales. El método es capaz de estudiar de manera precisa la respuesta de estos elementos para todo el intervalo de cargas, desde cero hasta la carga de falla (ver las referencias 4.21 y 4.22).

4.9 VIGAS DE GRAN ALTURA

Algunos elementos de concreto tienen una altura mucho mayor que la normal con relación a la luz, mientras que el ancho en la dirección perpendicular es mucho menor que la luz o la altura. Las cargas principales y las reacciones actúan en el plano del elemento y los esfuerzos en el concreto se aproximan a un estado de *esfuerzos en un plano*. Los elementos de este tipo se llaman *vigas de gran altura*. Pueden definirse, con referencia a la figura 4.20, como vigas con relaciones de luz a altura, l_n/h, aproximadamente de 5 o menos, o vigas con una luz a cortante a menor que cerca del doble de la altura.

Ejemplos de elementos de este tipo se encuentran en vigas de transferencia utilizadas en edificios de varios pisos para permitir el desplazamiento de ejes de columnas, en muros de cimentación, en muros de tanques rectangulares y en silos, en diafragmas de pisos y en muros de cortante al igual que en las estructuras de cubierta del tipo placa plegada. El comportamiento de las vigas de gran altura es significativamente diferente del de las vigas de proporciones más normales, y requiere especial atención en análisis, en diseño y en despiece del refuerzo.

A menudo, las vigas de gran altura están cargadas a lo largo del borde superior, como en la figura 4.20*a*, con reacciones en la parte inferior. Sin embargo, en algunos casos, por ejemplo en los muros laterales de depósitos de almacenamiento, las cargas pueden aplicarse a lo largo del borde inferior como en la figura 4.20*b*. Las cargas también pueden aplicarse más o menos en forma uniforme a todo lo alto, como en la figura 4.20*c*, por otros elementos de gran altura que se unen en ángulo recto; las reacciones también se pueden distribuir a todo lo alto. Las vigas de gran altura pueden tener apoyos simples o ser continuas.

A causa de las proporciones de sus dimensiones, su resistencia tiende a ser controlada por cortante. Por otro lado, su resistencia a cortante tiende a ser significativamente mayor que la obtenida con las ecuaciones usuales. Algunos métodos especiales de diseño tienen en cuenta estas diferencias.

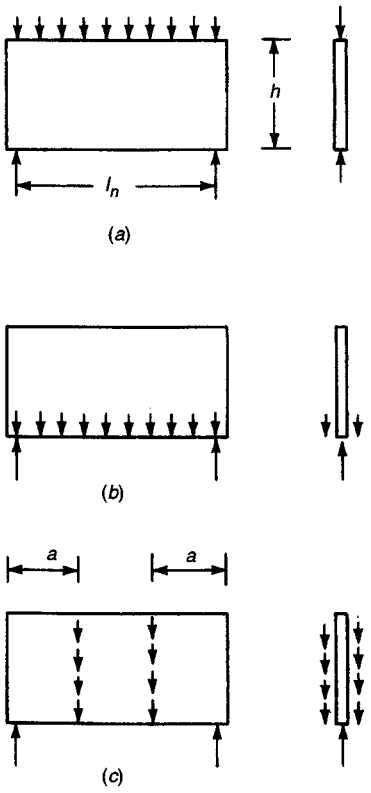


FIGURA 4.20
Colocación de las cargas en vigas de gran altura: (*a*) cargas aplicadas a lo largo del borde a compresión; (*b*) cargas suspendidas a lo largo del borde a tensión; (*c*) cargas distribuidas a lo largo de la altura.

a. Comportamiento

Los esfuerzos en vigas de gran altura antes del agrietamiento se pueden estudiar con los métodos de elasticidad bidimensional, fotoelasticidad o por análisis de elementos finitos. Estos estudios confirman que la hipótesis usual de que las secciones planas antes de la flexión permanecen iguales después de ésta, no se cumple para vigas de gran altura. Como consecuencia de los altos esfuerzos cortantes, se presenta un alabeo significativo de la sección transversal (ver las referencias 4.24 y 4.25). En consecuencia, los esfuerzos de flexión no se distribuyen linealmente ni siquiera en el intervalo elástico, y no pueden aplicarse los métodos usuales para calcular las propiedades de la sección y los esfuerzos.

Por otro lado, el análisis de esfuerzos elásticos es de interés limitado porque para estos elementos las deflexiones para cargas de servicio no tienden a causar problemas. El principal propósito del análisis elástico es predecir la localización y orientación de las grietas de flexión y de cortante.

De mucha mayor importancia resulta el análisis de resistencia para determinar la capacidad a carga última. La teoría, confirmada mediante ensayos, indica que la resistencia a flexión puede predecirse con suficiente precisión utilizando los mismos métodos empleados para vigas de dimensiones normales. El bloque rectangular de esfuerzos equivalentes y sus parámetros asociados pueden emplearse sin modificaciones. Por tanto, la altura del bloque de esfuerzos a se puede determinar a partir de la ecuación (3.31) y la resistencia nominal a flexión M_n, mediante la ecuación (3.30). El coeficiente usual $\phi = 0.90$ se aplica para determinar la resistencia de diseño a flexión. Aunque los ensayos indican que, a causa de la biaxialidad de los esfuerzos de compresión en la zona de compresión del concreto, pueden alcanzarse deformaciones últimas mucho mayores que la usual $\epsilon_u = 0.003$, lo cual afecta principalmente la cuantía balanceada de acero. Puesto que la posibilidad de utilizar un poco más que una pequeña fracción de la cuantía balanceada de acero en vigas de gran altura es muy baja, si se presenta, la mayor capacidad de deformación del concreto tiene poco efecto práctico.

La resistencia a cortante de vigas de gran altura puede ser hasta dos o tres veces mayor que la que se obtiene con las ecuaciones convencionales del Código ACI desarrolladas para elementos con dimensiones normales, es decir, las ecuaciones (4.12*a*) o (4.12*b*). En la sección 4.4 se explicó que la transferencia de cortante en las vigas agrietadas diagonalmente se supone que ocurre mediante cuatro mecanismos: (*a*) transferencia directa en la zona de compresión del concreto no fisurado, (*b*) entrelazamiento de los agregados, (*c*) acción de dovela del refuerzo principal a flexión, y (*d*) tensión directa del acero en el alma. Sin embargo, para vigas de gran altura una parte significativa de la carga se transfiere en forma directa desde el punto de aplicación a los apoyos a través de unos puntales diagonales a compresión como se ilustra en la figura 4.21*a*. Las grietas diagonales que se forman en dirección paralela a una línea desde la carga hasta el apoyo, aíslan el puntal a compresión que trabaja en forma conjunta con la compresión horizontal en el concreto y con la tensión en el refuerzo principal para equilibrar las cargas. La geometría de este mecanismo y la importancia relativa de cada contribución a la resistencia a cortante dependen obviamente de las proporciones del elemento al igual que de la colocación de las cargas y reacciones. El parámetro a/d, que indica la figura 4.21*a*, es importante. Para una viga de gran altura con carga distribuida a lo largo del borde superior, como en la figura 4.20*a*, el parámetro a/d puede remplazarse por el parámetro equivalente M/Vd. La equivalencia se puede demostrar fácilmente para una viga con cargas concentradas como la de la figura 4.21*a*.

El refuerzo de vigas de gran altura difiere del de vigas normales en aspectos que tienen que ver con las características especiales que se acaban de señalar. Como es usual, el acero principal a flexión se coloca cerca del borde de tensión, aunque como consecuencia de la mayor altura de la zona de tensión es recomendable distribuir este acero aproximadamente sobre el tercio inferior del elemento (ver la referencia 4.24). Puesto que la resistencia última de las vigas de gran altura depende de la acción entre *puntal y tensor*, en la cual el acero principal está completamente esforzado

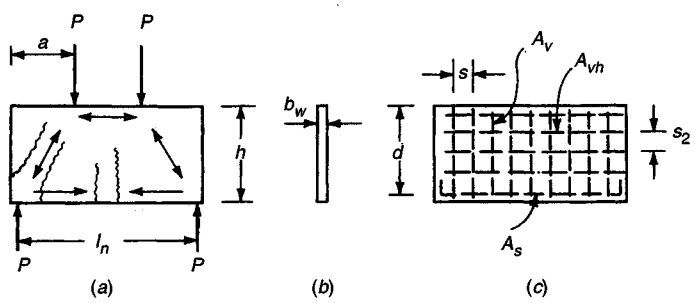


FIGURA 4.21
Viga de gran altura sometida a cargas concentradas: (*a*) cargas, reacciones y fuerzas internas; (*b*) sección transversal; (*c*) refuerzo.

en casi toda su longitud en lugar de estar únicamente para la sección de máximo momento, debe ponerse especial atención al anclaje de este acero. Normalmente se utilizan ganchos o dobleces aunque se especifiquen barras corrugadas.

A causa de la orientación de los esfuerzos principales en vigas de gran altura, el agrietamiento diagonal se presentará en la mayor parte de los casos con ángulos de pendientes mayores que los 45°. En consecuencia, aunque es importante incluir estribos verticales, éstos tienden a ser menos efectivos que el acero horizontal en el alma, colocado como aparece en la figura 4.21*c* (ver la referencia 4.26). Las barras horizontales son efectivas no sólo porque actúan más en dirección perpendicular a la de la grieta diagonal, aumentando así la transferencia de cortante por entrelazamiento de los agregados, sino también porque contribuyen a la transferencia de cortante por la acción de dovela. Los requisitos normales para anclaje del refuerzo en el alma se aplican para vigas de gran altura. Debe prestarse especial atención a la importancia de las barras de acero verticales en el alma, que funcionan como pendolones para resistir las cargas suspendidas cerca del borde inferior de algunas vigas de gran altura como las de las figuras 4.20*b* y 4.20*c*.

b. Disposiciones del Código ACI para el diseño de vigas de gran altura

De acuerdo con el Código ACI 11.8, deben aplicarse disposiciones especiales de cortante para las vigas en las cuales l_n/d es menor que cinco y que están cargadas en una cara y sostenidas en la cara opuesta de manera que puedan formarse puntales diagonales a compresión entre la carga y los apoyos. Las disposiciones de diseño para vigas comunes son válidas si las cargas se aplican a los lados o en la parte inferior del elemento. Las disposiciones especiales de cortante son aplicables a vigas de gran altura *simplemente apoyadas* pero no a vigas de gran altura *continuas;* en este último caso, el elemento debe diseñarse a cortante conforme a los procedimientos de diseño para vigas normales o, como alternativa, las vigas de gran altura continuas deben diseñarse según el concepto del modelo de armadura (ver la sección 4.9c). La naturaleza empírica de las disposiciones para vigas de gran altura, desarrolladas para luces sencillas, exigen esta exclusión.

Como es habitual, el principio básico de diseño es

$$V_u \leq \phi V_n \tag{4.10}$$

donde $\phi = 0.85$ para cortante y

$$V_n = V_c + V_s \tag{4.24}$$

Independientemente de la cantidad de refuerzo suministrado, la resistencia nominal V_n no debe tomarse mayor que la siguiente:

Para $l_n/d < 2$:
$$V_n = 8\sqrt{f'_c}\, b_w d \tag{4.25a}$$

Para $2 \leq l_n/d \leq 5$:
$$V_n = \frac{2}{3}\left(10 + \frac{l_n}{d}\right)\sqrt{f'_c}\, b_w d \tag{4.25b}$$

Las restricciones análogas del Código ACI para vigas normales establecen que $V_s \leq 8\sqrt{f'_c}b_w d$ si la contribución del concreto V_c se toma igual a $2\sqrt{f'_c}b_w d$, como es usual, se llega hasta un límite superior de $V_n = 10\sqrt{f'_c}b_w d$ para vigas con l_n/d mayor que 5. La variación del valor máximo permisible de V_n como función de l_n/d, se ilustra en la figura 4.22†.

La sección crítica para cortante debe tomarse a una distancia de $0.15l_n$, desde la cara del apoyo para cargas uniformemente distribuidas, y de $0.5a$ para vigas con cargas concentradas, pero sin exceder una distancia d desde la cara del apoyo en ninguno de los casos. El refuerzo a cortante que se obtiene con los cálculos o las disposiciones del Código ACI para la sección crítica debe utilizarse a lo largo de toda la luz.

Puesto que la resistencia para vigas de gran altura aumenta sustancialmente por la acción de puntal y tensor, las disposiciones del Código ACI permiten aumentar el valor usual de resistencia a cortante del concreto V_c, calculado con la ecuación (4.12*a*), mediante un multiplicador que depende de la relación $M_u/V_u d$. Para vigas de gran altura, la contribución del concreto a la resistencia a cortante puede calcularse a partir de

$$V_c = \left(3.5 - 2.5\frac{M_u}{V_u d}\right)\left(1.9\sqrt{f'_c} + 2500\rho_w\frac{V_u d}{M_u}\right)b_w d \qquad (4.26)$$

con las restricciones de que el multiplicador $(3.5 - 2.5M_u/V_u d)$ no debe exceder 2.5 y que V_c no debe tomarse mayor que $6\sqrt{f'_c}b_w d$. En la ecuación (4.26), M_u y V_u son el momento y la fuerza cortante para cargas mayoradas que ocurren de modo simultáneo en la sección crítica††. La figura 4.23 indica el valor del multiplicador en la ecuación (4.26) como una función del parámetro $M_u/V_u d$

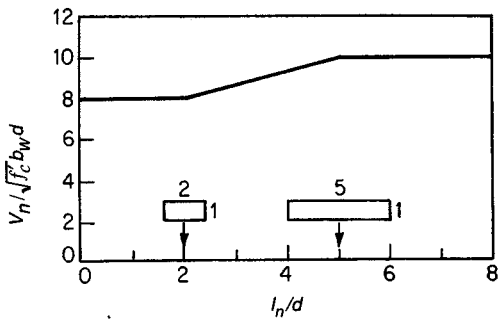


FIGURA 4.22
Limitaciones del Código ACI referentes a la resistencia a cortante nominal total V_n para vigas de gran altura.

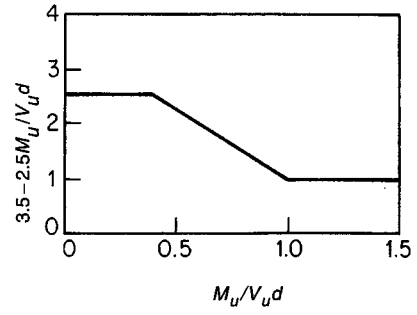


FIGURA 4.23
Multiplicador de la resistencia a cortante para vigas de gran altura.

† No es clara la justificación para la reducción relativamente menor, no mayor que el 20 por ciento del valor permisible de V_n para vigas de gran altura que de hecho son más fuertes a cortante que las vigas normales.

††De acuerdo con el Código ACI, la resistencia a cortante del concreto puede calcularse también mediante la ecuación aproximada $V_c = 2\sqrt{f'_c}b_w d$ aunque el uso de esta expresión alternativa sería muy conservador y poco económico.

e ilustra el aumento significativo de la resistencia en V_c para elementos de gran altura, en los que $M_u/V_u d$ es normalmente bajo para la sección crítica a cortante. Por ejemplo, una viga de gran altura con una relación luz-espesor de tres, cargada en los puntos tercios de la luz, tendrá un valor de $M_u/V_u d = 0.5$ en la sección crítica, permitiendo así un incremento en V_c de 2.25 veces el valor correspondiente para vigas normales.

Cuando la fuerza cortante V_u para las cargas mayoradas excede la resistencia de diseño a cortante del concreto ϕV_c, debe suministrarse refuerzo a cortante para resistir el cortante en exceso. La contribución del acero en el alma V_s se calcula a partir de

$$V_s = \left[\frac{A_v}{s}\left(\frac{1 + l_n/d}{12}\right) + \frac{A_{vh}}{s_2}\left(\frac{11 - l_n/d}{12}\right)\right] f_y d \tag{4.27}$$

donde A_v es el área de refuerzo a cortante perpendicular al acero principal a flexión dentro de una distancia s, y A_{vh} es el área del refuerzo a cortante paralelo al acero principal a flexión dentro de una distancia s_2 (ver la figura 4.21*c*).

Si se combinan las ecuaciones (4.10), (4.24) y (4.27), y se reorganizan los términos, se obtiene la siguiente expresión para el refuerzo requerido a cortante para vigas de gran altura

$$\frac{A_v}{s}\left(\frac{1 + l_n/d}{12}\right) + \frac{A_{vh}}{s_2}\left(\frac{11 - l_n/d}{12}\right) = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y d} \tag{4.28}$$

Las cantidades relativas de acero horizontal y vertical en el alma, que se utilizan con base en la ecuación (4.28), pueden variar dentro de las siguientes restricciones: el área A_v no debe ser menor que $0.0015\, b_w s$ y s no debe exceder $d/5$ o 18 pulg. El área A_{vh} no debe ser menor que $0.0025\, b_w s_2$ y s_2 no debe exceder $d/3$ o 18 pulg.

Para propósitos de diseño, resulta útil observar que los coeficientes entre paréntesis en la ecuación (4.28) son factores de ponderación para la efectividad relativa del acero en el alma vertical y horizontal. Los valores de estos factores se dibujan en la figura 4.24 en función del parámetro l_n/d. Se observa que para vigas de gran altura con valores pequeños de l_n/d, el acero horizontal A_{vh} domina efectivamente y la adición de acero en el alma vertical A_v tiene poco efecto en el aumento de la resistencia. A medida que la relación l_n/d aumenta, la efectividad del acero vertical tiende a aumentar hasta un valor de $l_n/d = 5$ (el límite para vigas de gran altura según la definición del Código ACI), en el cual el acero vertical y horizontal son igualmente efectivos. Por tanto, para vigas de gran altura es más eficaz adicionar acero en el alma en forma de barras horizontales, cuando se requiere, satisfaciendo al mismo tiempo los requisitos mínimos para el acero en la dirección vertical†.

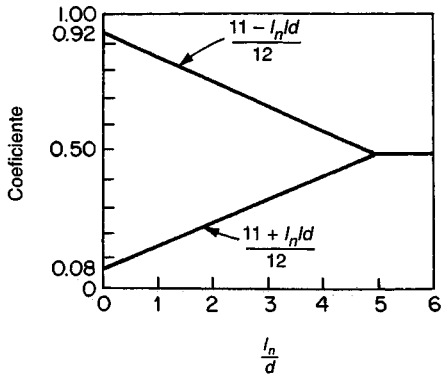


FIGURA 4.24
Coeficientes de efectividad para el refuerzo en el alma vertical y horizontal en vigas de gran altura.

† Las publicaciones que han sido producto del trabajo del Comité 426 del ACI, relacionadas con cortante y tensión diagonal, han llamado la atención sobre algunas inconsistencias en la utilización de la ecuación (4.27), particularmente para vigas en el intervalo de transición de proporciones altas a normales. Se espera que estas inconsistencias sean resueltas en futuras ediciones del Código (ver la referencia 4.27).

Ejemplo 4.5. Una viga de transferencia debe sostener dos columnas, cada una con cargas mayoradas de 1200 klb, localizadas en los tercios de su luz de 36 pies. Una carga mayorada y distribuida de 3.96 klb/pie se aplicará a lo largo de su borde superior. La distribución general se ilustra en la figura 4.25*a*. Según los requisitos geométricos se selecciona en forma tentativa una viga con ancho de 2 pies y una altura total de 12 pies. Diseñe la viga para las cargas determinadas, además de su propio peso, utilizando $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 4000$ lb/pulg^2.

Solución. Para las dimensiones tentativas de la viga, el peso propio es $2 \times 12 \times 150/1000 = 3.6$ klb-pie. Si se aplica el factor de carga común de 1.4 y se adiciona la carga sobreimpuesta, se llega a una carga total distribuida de $1.4 \times 3.6 + 3.96 = 9.0$ klb/pie adicional a las cargas de las columnas. Los diagramas de cortante y de momento que resultan aparecen en las figuras 4.25*b* y 4.25*c*.

Con la asignación de varias filas de barras gruesas como refuerzo principal a tensión, se puede tomar una altura efectiva 8 pulg menor que la altura total, o sea 136 pulg. Entonces, $l_n/d = (36 - 1.5) \times 12/136 = 3.04$, menor que el valor límite de 5, que confirma la aplicabilidad de las disposiciones para vigas de gran altura.

El refuerzo principal a flexión se diseña con las ecuaciones para vigas normales. Si se supone de manera tentativa una altura del bloque de esfuerzos $a = 20$ pulg, se obtiene

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y(d - a/2)} = \frac{15{,}858 \times 12}{0.9 \times 60(136 - 10)} = 27.96 \text{ pulg}^2$$

Si se verifican las premisas iniciales, se obtiene

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{27.96 \times 60}{0.85 \times 4 \times 24} = 20.6 \text{ pulg}$$

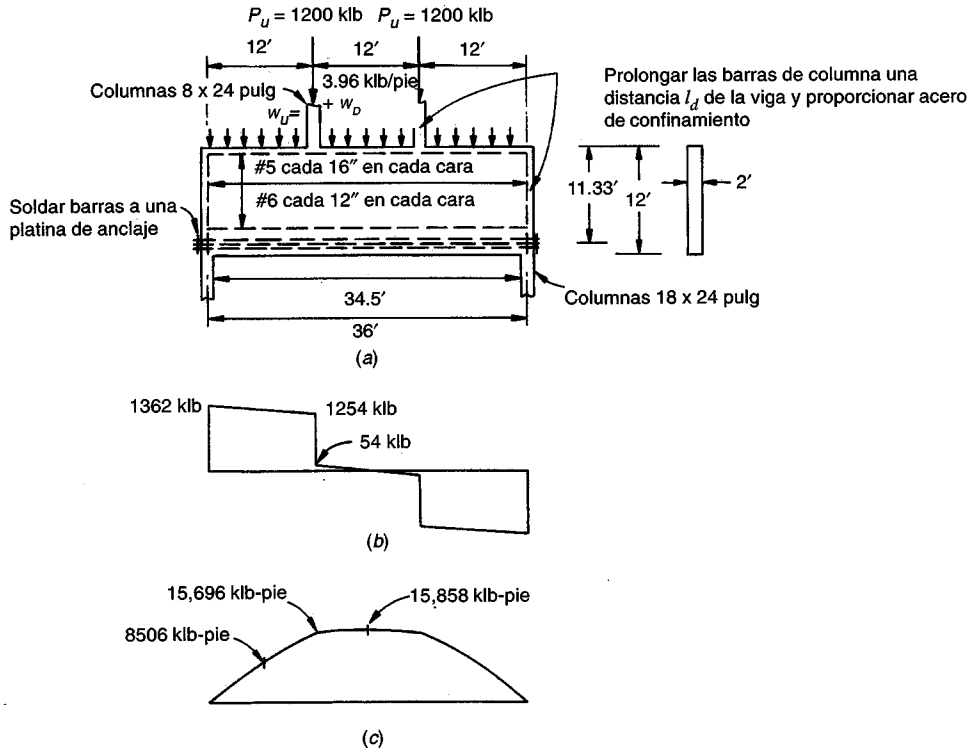


FIGURA 4.25
Ejemplo de viga de gran altura: (*a*) dimensiones y refuerzo de la viga; (*b*) diagrama de cortante; (*c*) diagrama de momento.

el cual está suficientemente cerca del valor supuesto al principio y no se requieren posteriores revisiones. Para los materiales utilizados, la cuantía balanceada de acero es

$$\rho_b = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{87}{87 + f_y} = 0.85 \times 0.85 \times \frac{4}{60} \times \frac{87}{147} = 0.0285 \text{ pulg}$$

y, conforme al Código ACI, la cuantía máxima de acero que se permite es $0.75 \times 0.0285 = 0.0214$. La cuantía real de acero es $27.96/(24 \times 136) = 0.0086$, que está muy por debajo del máximo permitido. Se utilizarán un total de 18 barras No. 11 para el refuerzo principal a flexión, en tres filas de seis barras cada una, que suministran un área de 28.08 pulg^2. Si se deja un espaciamiento de $1\frac{3}{8}$ pulg entre barras de este diámetro, más un recubrimiento del concreto de 3 pulg en la parte exterior de las barras principales para dar espacio al acero en el alma y garantizar la protección del concreto, se tiene un ancho mínimo de la viga de 21.1 pulg; las barras pueden acomodarse fácilmente en el ancho disponible de 24 pulg. La distancia supuesta de 8 pulg desde el centroide del acero hasta la cara inferior también es satisfactoria.

Para considerar el posible desplazamiento del diagrama de momento, el Código ACI requiere que el refuerzo a tensión se extienda a una distancia d más allá del punto para el cual ya no es necesario. Además, las barras deben extenderse por lo menos la longitud completa de desarrollo de 59 pulg más allá del punto para el cual están sometidas al esfuerzo completo. Obviamente, en este caso las barras principales no pueden cortarse y tienen que extenderse hasta los apoyos. Observe que en este caso no existe suficiente distancia libre para ganchos horizontales o para doblamientos. Se ha establecido que los ganchos verticales producen un plano de debilidad en el concreto que puede acarrear una falla prematura. En consecuencia, se suministra un anclaje especial que pase por todas las barras a través de una platina de acero de anclaje y soldándolas en la superficie exterior de ésta.

Según las disposiciones del Código ACI, la sección crítica para cortante está a una distancia de $0.5a = 0.50\ (12 - 0.75) = 5.63$ pies desde la cara de apoyo o 6.38 pies desde el centro de apoyo. El momento y cortante para las cargas mayoradas en la sección crítica son

$$M_u = 1362 \times 6.38 - 9 \times \frac{6.38^2}{2} = 8506 \text{ klb-pie}$$

$$V_u = 1362 - 9 \times 6.38 = 1305 \text{ klb}$$

Según las disposiciones del Código ACI, el límite superior para la resistencia nominal a cortante lo determina la ecuación (4.25*b*):

$$V_{n,\max} = \frac{2}{3}(10 + 3.04)\sqrt{4000} \times 24 \times \frac{136}{1000} = 1794 \text{ klb}$$

a partir de la cual $\phi V_{n,\max} = 0.85 \times 1794 = 1525$ klb, muy superior al valor real de cortante V_u. Enseguida se calcula la relación $M_u/V_u d$:

$$\frac{M_u}{V_u d} = \frac{8506 \times 12}{1305 \times 136} = 0.575$$

a partir de la cual

$$3.5 - 2.5\frac{M_u}{V_u d} = 3.5 - 2.5 \times 0.575 = 2.06$$

Se confirma que este valor está por debajo del límite superior de 2.5. La contribución del concreto a la resistencia a cortante puede encontrarse ahora con la ecuación (4.26):

$$V_c = 2.06\left(1.9\sqrt{4000} + 2500 \times \frac{0.0086}{0.575}\right) \times 24 \times \frac{136}{1000} = 1059 \text{ klb}$$

Este valor está por debajo del valor límite de $6\sqrt{4000} \times 24 \times 136 / 1000 = 1239$ klb; hasta este punto el diseño es satisfactorio.

Ahora, con la ecuación (4.28), se determina el refuerzo que se requiere en el alma:

$$\frac{A_v}{s}\left(\frac{1 + 3.04}{12}\right) + \frac{A_{vh}}{s_2}\left(\frac{11 - 3.04}{12}\right) = \frac{1305 - 0.85 \times 1059}{0.85 \times 60 \times 136}$$

$$0.337\frac{A_v}{s} + 0.663\frac{A_{vh}}{s_2} = 0.058$$

A partir de este último resultado es claro que el acero horizontal A_{vh} es más efectivo que las barras verticales A_v. En consecuencia, se suministra únicamente el área mínima requerida A_v. Para estas barras, el espaciamiento máximo no puede exceder

$$s_{\max} = \frac{136}{5} = 27 \text{ pulg}$$

o 18 pulg que controla en este caso. Si, a manera de prueba, se seleccionan barras No. 5 con área igual A_v, = 0.31 × 2 = 0.62 pulg², la separación que se necesita se basa en el requisito mínimo de $A_v = 0.0015 b_w s$:

$$s = \frac{0.62}{0.0015 \times 24} = 17.22 \text{ pulg}$$

Este valor está por debajo y muy cerca del espaciamiento máximo que se permite de 18 pulg. Se utilizarán barras verticales No. 5 separadas a 16 pulg en cada cara.
El espaciamiento de barras horizontales en el alma no debe exceder

$$s_{2,\max} = \frac{136}{3} = 45 \text{ pulg}$$

ni 18 pulg, valor que controla. El área requerida se encuentra con base en la ecuación (4.28):

$$0.663 \frac{A_{vh}}{s_2} = 0.058 - 0.337 \times \frac{0.62}{16} = 0.045$$

Con barras No. 6, cada cara suministra un área de $A_{vh} = 2 \times 0.44 = 0.88$ pulg², requiriéndose un espaciamiento de

$$s_2 = 0.663 \frac{0.88}{0.045} = 12.96 \text{ pulg}$$

Se utilizarán barras No. 6 colocadas horizontalmente y espaciadas a 12 pulg en cada cara.

La distribución del acero en el alma se resume en la figura 4.25*a*. Las barras verticales se detallarán en forma de estribos cerrados con anclaje provisto por doblamiento alrededor de las barras horizontales en la parte superior y en la inferior. En los extremos de las barras horizontales en el alma se utilizarán ganchos de 180°.

Con el fin de asegurar una transmisión apropiada de las cargas de las columnas y de las reacciones en los extremos hacia la viga de transferencia, se extenderán las barras verticales de las columnas dentro de la viga en una longitud completa de desarrollo. Para asegurarse contra una falla local en los puntos de altas concentraciones de carga, se proporcionarán flejes horizontales en la columna a todo lo largo de las barras extendidas.

c. Modelos de armadura para el diseño de vigas de gran altura

Al revisar el método del Código ACI para el diseño de vigas de gran altura, se encuentran una serie de arbitrariedades, deficiencias e inconsistencias. Aunque las vigas diseñadas conforme a las disposiciones del Código ACI han demostrado en general un comportamiento satisfactorio, se producen estas dificultades cuando se intenta adaptar el enfoque empírico "$V_c + V_s$" (con su "contribución del concreto" a partir de la acción de dovela, del entrelazamiento de agregados y de la transferencia directa de cortante en el concreto) a elementos para los cuales el mecanismo dominante para la transferencia de fuerza desde la carga hasta la reacción es directamente el puntal de compresión. Una metodología alterna para el diseño de vigas de gran altura se fundamenta en el *modelo de armadura* expuesto en la sección 4.8 para el diseño a cortante de vigas normales. Éste resulta particularmente adecuado para el diseño de vigas de gran altura (ver las referencias 4.19 y 4.28), es completo en general y puede aplicarse con facilidad a vigas de cualquier relación luz-altura, tanto continuas como de una sola luz, y a vigas de gran altura con cargas y reacciones aplicadas en casi cualquier configuración.

El Código ACI 11.8.3 permite la utilización de "cualquier método que satisfaga el equilibrio y los requisitos de resistencia" como alternativa al uso de las ecuaciones resumidas en la sección 4.9b, y los comentarios del ACI R11.8.3 confirman este enunciado con el enfoque del modelo de armadura mediante dos referencias básicas. De esta manera, el Código ACI respalda una metodología más racional para el diseño de vigas de gran altura, aunque no establece una guía específica.

Los conceptos básicos para el análisis de vigas de gran altura con base en el modelo de armadura se ilustran mediante la viga de una sola luz cargada en el centro, la cual se ilustra en la figura 4.26. El análisis elástico del elemento no fisurado indica la dirección de los esfuerzos principales, con líneas punteadas para las trayectorias de compresión y líneas sólidas para las de tensión. A medida que la carga se incrementa es predecible la formación de grietas en dirección perpendicular a las trayectorias de tensión (es decir, localmente paralelas a las líneas punteadas). Los mayores esfuerzos de tensión actúan a lo largo del borde inferior de la viga, mientras que los esfuerzos máximos de compresión se ejercen más o menos paralelos a las líneas desde la carga hasta los apoyos.

La figura 4.26*b* es una representación simplificada del flujo interno de fuerzas, donde las trayectorias de compresión, ahora representadas mediante puntales a compresión, se muestran como líneas punteadas y las trayectorias de tensión, ahora simplificadas como tensores, aparecen como líneas sólidas. El tensor principal está a lo largo de la parte inferior de la viga entre los apoyos, pero por la divergencia de las líneas de efectos axiales bajo la carga, se requieren tensores secundarios perpendiculares a las líneas diagonales entre los puntos de carga y de apoyo. La representación del flujo de fuerzas puede simplificarse aún más mediante el modelo de armadura que ilustra la figura 4.26*c*, aunque éste no explica la ocurrencia del agrietamiento diagonal inclinado.

Los cinco aspectos básicos del modelo de armadura completo, expuestos en la sección 4.8, incluyen: (*a*) puntales a compresión, (*b*) tensores, (*c*) uniones o nudos, (*d*) abanicos de compresión y (*e*) campos diagonales a compresión. La utilización de éstos en la configuración de modelos de armadura para vigas de gran altura se ilustrará para las vigas cargadas en los tercios, explicadas en las figuras 4.27*a* y 4.27*b*.

Para la viga sin estribos de la figura 4.27*a*, las cargas concentradas están sostenidas por dos puntales a compresión, que aparecen en forma sombreada y que están limitados por líneas entre los puntos de carga y las reacciones. El empuje hacia afuera en la parte inferior de los puntales está

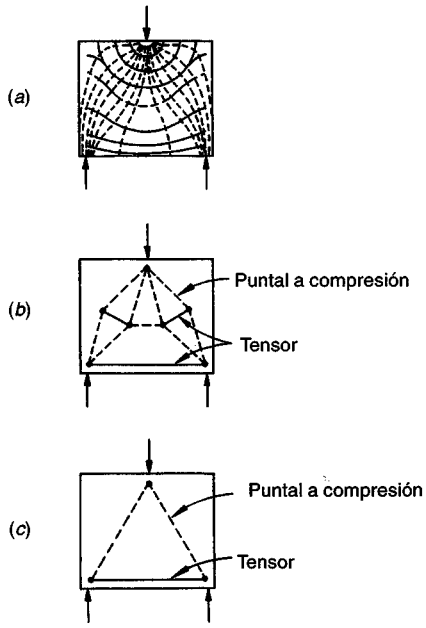


FIGURA 4.26
Viga de gran altura cargada en el centro: (*a*) trayectorias de esfuerzos; (*b*) modelo de armadura; (*c*) modelo de armadura simplificado (*adaptada de la referencia 4.19*).

equilibrado por un tensor apropiadamente anclado. Un puntal a compresión horizontal entre las cargas equilibra el empuje hacia adentro en la parte superior de los puntales diagonales.

Las uniones o nudos se presentan en la intersección de las líneas de acción de los puntales, tensores y cargas como indican las áreas sombreadas más oscuras. Estas zonas están cargadas en compresión biaxial, por lo general igual en las dos direcciones principales. La configuración geométrica del modelo de armadura debe ser cuidadosa, de manera que los centroides de los elementos y las líneas de acción de las fuerzas y reacciones se encuentren en un punto determinado.

El modelo de armadura de la figura 4.27*a* puede fallar: (*a*) por fluencia del tensor, (*b*) por aplastamiento de alguno de los puntales o (*c*) por aplastamiento en una región nodal. Los tres tipos de fallas se observaron en ensayos. Si se va a presentar la falla, es preferible la falla dúctil a tensión, así que la viga debe dimensionarse de manera que la resistencia en el tensor controle el diseño.

El aumento de estribos modifica el flujo interno de fuerzas en el modelo de armadura. Esto se ilustra con la viga de gran altura de la figura 4.27*b*, idéntica a la de la figura 4.27*a*, pero con estribos verticales igualmente espaciados entre las cargas y reacciones; se puede observar que el modelo es la suma de dos armaduras. El flujo de fuerza principal ocurre a través de una gran diagonal a compresión entre la carga y el apoyo. La segunda armadura utiliza los estribos como elementos verticales a tensión, que equilibran los empujes de los puntales secundarios en abanicos de compresión sobre el apoyo y bajo la carga. Aunque éste parece ser un modelo considerablemente más complejo que el de la armadura de la figura 4.27*a*, la armadura resulta estáticamente determinada al suponer que cada estribo está en fluencia, entonces es posible determinar la distribución de carga entre el puntal mayor a compresión y los puntales menores. Observe que a partir del equilibrio de nudos en todo el cordón inferior de la armadura, la fuerza de tensión en el tensor se reduce de manera escalonada entre cada estribo, en contraste con la fuerza constante en el tensor para la viga de la figura 4.27*a*. De modo análogo, el empuje a compresión horizontal a lo largo de la parte superior de la viga disminuye escalonadamente en la luz desde el valor máximo en el centro de ésta.

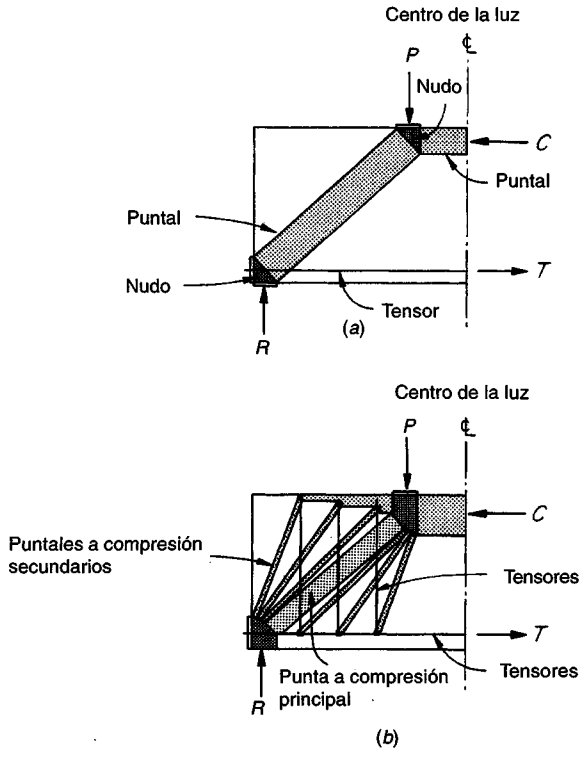


FIGURA 4.27
Modelos de armadura para vigas de gran altura: (*a*) viga sin estribos; (*b*) viga con estribos.

Quizás el aspecto de mayor dificultad en el análisis, según este modelo, es la esquematización de la armadura misma. La referencia 4.18 sugiere el siguiente procedimiento: (*a*) dibuje un modelo de armadura a escala, (*b*) visualice el flujo de fuerzas utilizando principios consistentes de equilibrio, y (*c*) mediante un despiece cuidadoso, asegúrese de que las fuerzas en los elementos de la armadura pueden desarrollarse y transmitirse en los nudos. El diseñador debe tener en cuenta las dimensiones necesarias para los puntales de concreto y la posible localización y despiece del refuerzo. Por lo general se requiere un procedimiento iterativo. Con base en una armadura supuesta inicial, el diseñador puede determinar las fuerzas y los anchos necesarios para los puntales, modificar luego la geometría de la armadura y repetir este procedimiento hasta obtener una solución satisfactoria.

El tamaño de los puntales a compresión se selecciona de manera que la capacidad del concreto en los puntales y en los nudos no se exceda en la carga última. La resistencia efectiva del concreto f_{ce} es menor que la resistencia a compresión uniaxial f'_c, debido principalmente a la presencia del esfuerzo lateral de tensión (ver la sección 2.9 y la figura 2.8 del capítulo 2) o del agrietamiento a lo largo de las trayectorias de esfuerzos de compresión, y por las condiciones de deformación no uniformes en el concreto. La referencia 4.19 sugiere los valores de f_{ce} estipulados en la tabla 4.2. La referencia 4.18 sugiere la utilización de un valor promedio igual a $0.6\,f'_c$.

Información adicional relacionada con el desarrollo de modelos de armadura y su uso en el diseño de vigas de gran altura se puede encontrar en las referencias 4.18, 4.19 y 4.28.

TABLA 4.2
Resistencia efectiva del concreto a la compresión

Elemento estructural	f_{ce}
Nudo de armadura	
Nudos unidos por puntales a compresión y áreas de contacto	$0.85f'_c$
Nudos que anclan un solo tensor	$0.65f'_c$
Nudos que anclan tensores en más de una dirección	$0.50f'_c$
Puntales a compresión aislados en vigas de gran altura o en regiones perturbadas	$0.50f'_c$
Almas de vigas esbeltas severamente agrietadas	$0.25f'_c$ a $0.45f'_c$

Fuente: De la referencia 4.19.

4.10 MÉTODO DE DISEÑO DE CORTANTE POR FRICCIÓN

Por lo general, en el diseño de concreto reforzado, el cortante se utiliza simplemente como una medida conveniente de la tensión diagonal, que es de sumo interés. En contraste, existen circunstancias en que el cortante directo puede causar la falla de elementos de concreto reforzado. Estas situaciones se presentan con frecuencia en estructuras de concreto prefabricado, en particular en la vecindad de las conexiones, al igual que en la construcción compuesta donde se combinan elementos de concreto vaciados en el sitio con elementos de concreto prefabricado o de acero estructural. Para estos casos se pueden establecer planos potenciales de falla en los cuales los esfuerzos de cortante directo son grandes y, si no se provee el refuerzo adecuado a través de estos planos, pueden generarse resultados desastrosos.

El refuerzo necesario puede determinarse con el método de diseño de *cortante por fricción* (ver las referencias 4.29 a 4.33). El enfoque básico consiste en suponer que el concreto puede agrietarse de manera desfavorable o que puede presentarse un deslizamiento a lo largo de un plano predeterminado de debilidad. Con el fin de prevenir una falla a cortante directo debe suministrarse refuerzo a través de la grieta potencial o real, o del plano de corte.

La teoría de cortante por fricción es muy sencilla y su comportamiento se puede visualizar fácilmente. La figura 4.28*a* ilustra un bloque de concreto agrietado, donde la grieta se encuentra atravesada por el refuerzo. Una fuerza cortante V_n actúa en forma paralela a la grieta, y la tenden-

cia del bloque superior a deslizarse con relación al inferior es resistida principalmente por la fricción en la interfase de concreto en la grieta. Puesto que la superficie de la grieta es por naturaleza rugosa e irregular, el coeficiente efectivo de fricción puede ser muy alto. Además, la superficie irregular producirá una ligera separación entre los dos bloques de concreto como se indica en la figura 4.28*b*.

Si existe refuerzo perpendicular a la grieta, el deslizamiento y la separación posterior del concreto producirán esfuerzos de tensión en el acero. Diversos ensayos confirman que el acero bien anclado alcanzará su resistencia a la fluencia cuando se llega a la falla por cortante (referencia 4.31).

La fuerza de tensión resultante produce una presión igual pero opuesta entre las caras de concreto a cada lado de la grieta. En el diagrama de cuerpo libre de la figura 4.28*c*, es evidente que el valor máximo de esta presión en la interfase es $A_{vf}f_y$, donde A_{vf} es el área total de acero que atraviesa la grieta y f_y es su resistencia a la fluencia.

La resistencia del concreto al deslizamiento puede expresarse en términos de la fuerza normal multiplicada por un coeficiente de fricción μ. La suma de fuerzas horizontales debe ser igual a cero

$$V_n = \mu A_{vf} f_y \tag{4.29}$$

Si se define la cuantía de acero $\rho = A_{vf}/A_c$, donde A_c en este caso es el área de la superficie fisurada, se puede volver a formular la ecuación (4.29) en términos del esfuerzo nominal a cortante v_n:

$$v_n = \mu \rho f_y \tag{4.30}$$

El movimiento relativo del concreto en los lados opuestos de la grieta también somete las barras individuales de refuerzo a una acción de cortante y la resistencia de dovela sometida a esta acción contribuye con la resistencia al cortante. Sin embargo, es común no tener en cuenta el efecto de dovela por simplicidad en el diseño y, para compensar esto, se utiliza un valor del coeficiente de fricción artificialmente alto.

Con base en ensayos recientes, μ puede tomarse igual a 1.4 para grietas en concreto monolítico, pero V_n no debe suponerse mayor que $0.2 f'_c A_c$ o $800 A_c$ libras (referencia 4.29).

En la figura 4.29 se compara la resistencia por transferencia de cortante determinada por la ecuación (4.30) con valores experimentales de ensayos más recientes llevados a cabo en la Univer-

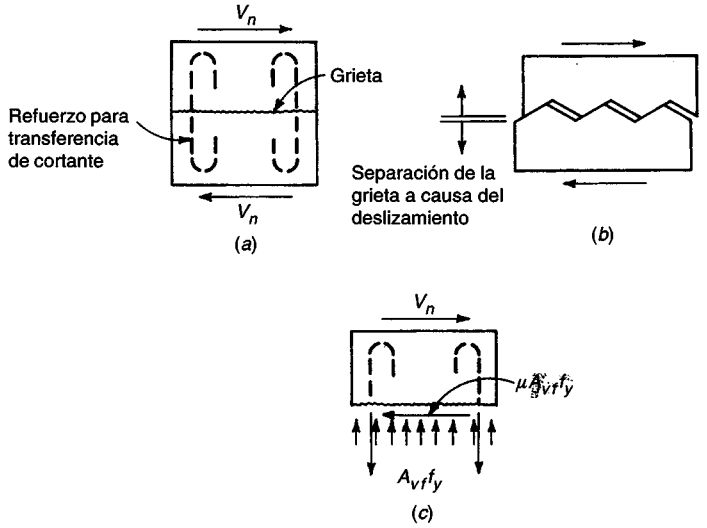


FIGURA 4.28
Bases del método de diseño de cortante por fricción: (*a*) cortante aplicado; (*b*) representación aumentada de la superficie de la grieta; (*c*) diagrama de cuerpo libre del concreto por encima de la grieta.

sidad de Washington (referencia 4.31). Es evidente que la ecuación (4.30) ofrece un estimativo conservador de la resistencia al cortante. También es claro que puede desarrollarse una resistencia considerablemente mayor al límite superior de 800 lb/pulg² si se provee el refuerzo adecuado. Se ha propuesto (ver la referencia 4.31) la adopción de una forma modificada de la ecuación (4.30) cuando ρf_y excede las 600 lb/pulg², como sigue:

$$v_n = \mu \rho f_y \left(\frac{300}{\rho f_y} + 0.5 \right) \tag{4.31}$$

Las resistencias estimadas en la ecuación (4.31) (indicadas por la línea punteada en la figura 4.29) parecen tener una correlación satisfactoria con los resultados experimentales para concretos con resistencias mayores a 2500 lb/pulg². Mientras se dispone de mayor información, se recomienda imponer un límite superior de V_n = 1300 lb/pulg² para la ecuación (4.31).

Las disposiciones del Código ACI 11.7 se fundamentan en la ecuación (4.29). La resistencia de diseño debe tomarse igual a ϕV_n, donde $\phi = 0.85$ para diseño de cortante por fricción y V_n no debe exceder al menor entre $0.2 f'_c A_c$ y $800 A_c$ lb. Las recomendaciones para el coeficiente de fricción m son las siguientes:

Concreto vaciado monolíticamente	1.4λ
Concreto vaciado contra concreto endurecido con superficie de rugosidad intencional	1.0λ
Concreto vaciado contra concreto endurecido sin rugosidad intencional	0.6λ
Concreto anclado a acero estructural laminado mediante pernos con cabeza o barras de refuerzo	0.7λ

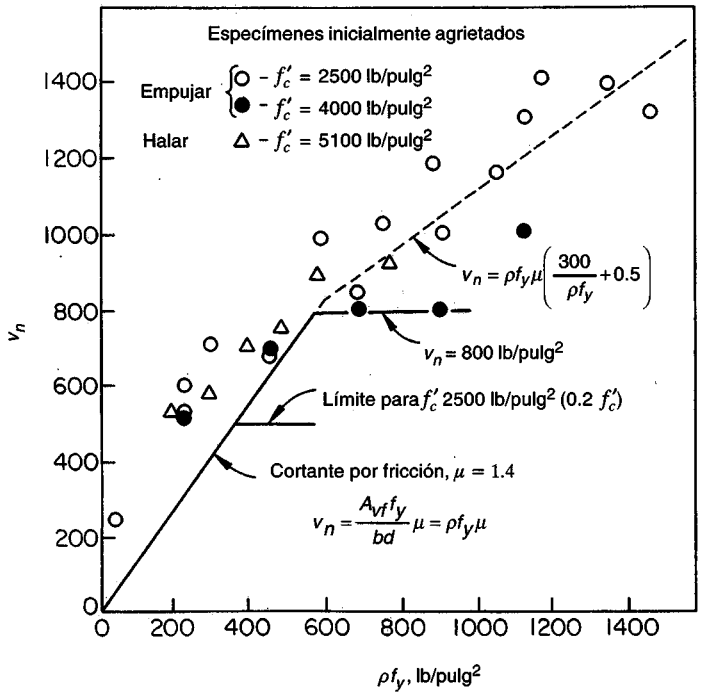


FIGURA 4.29
Resistencias de transferencia por cortante calculadas *versus* experimentales para especímenes inicialmente agrietados (*de la referencia 4.31*).

donde $\lambda = 1.0$ para concreto de peso normal, 0.85 para concreto con "arenas de peso ligero", y 0.75 para concretos "de peso ligero". La resistencia a la fluencia del refuerzo no debe exceder 60,000 lb/pulg^2. Si se presenta tensión directa a través del plano de cortante, ésta debe tomarse mediante refuerzo adicional. Para el caso de la compresión neta permanente a través del plano de cortante, es posible tomar esta fuerza como adicional a la fuerza en el refuerzo de cortante por fricción $A_{vf}f_y$ cuando se desea calcular el área requerida A_{vf}.

Cuando el cortante se transfiere entre concreto nuevo vaciado contra concreto endurecido, la rugosidad de la superficie es una variable importante; una superficie con rugosidad intencional se define como aquella que tiene una amplitud máxima aproximada de $\frac{1}{4}$ pulg. En cualquier caso, la superficie vieja debe estar limpia y libre de impurezas. Según el Código ACI 11. 7, cuando el cortante se tenga que transferir entre acero laminado y concreto, el acero debe estar limpio y sin pintura.

Si V_u es la fuerza cortante que se debe resistir para las cargas mayoradas, entonces con $V_u = \phi V_n$ puede encontrarse el área de acero requerida mediante transposición de la ecuación (4.29):

$$A_{vf} = \frac{V_u}{\phi \mu f_y} \tag{4.32}$$

En algunos casos, es posible que el refuerzo de cortante por fricción no atraviese el plano de cortante a 90° como se describió en los anteriores párrafos. Si el refuerzo de cortante por fricción está inclinado con respecto al plano de cortante, de manera que la fuerza cortante se aplique en la dirección en que se aumenta la tensión en el acero, como en la figura 4.30*a*, entonces la componente de esta tensión paralela al plano de cortante, ilustrada en la figura 4.30*b*, contribuye a la resistencia al deslizamiento. En este caso, la resistencia a cortante puede calcularse con

$$V_n = A_{vf}f_y(\mu \operatorname{sen}\alpha_f + \cos\alpha_f) \tag{4.33}$$

en lugar de hacerlo con la ecuación (4.29). Aquí αf es el ángulo entre el refuerzo de cortante por fricción y el plano de cortante. Si αf es mayor que 90°, es decir, si la inclinación del acero es tal que la tensión en las barras tiende a reducirse debido a la aplicación de la fuerza cortante, entonces el supuesto de que el esfuerzo en el acero es igual a f_y no es válido y debe realizarse una mejor distribución de las barras.

Es fundamental observar algunas precauciones en cuanto a la aplicación del método de diseño de cortante por fricción. El refuerzo, cualquiera que sea su tipo, debe estar bien anclado para desarrollar su resistencia a la fluencia, ya sea mediante longitud de desarrollo, por ganchos o doblamientos en el caso de barras de refuerzo, o mediante cabezas y soldadura adecuados para el caso en que la unión entre el concreto y el acero estructural se haga con espigos. El concreto debe estar muy bien confinado y se recomienda la utilización amplia de aros (ver la referencia 4.29).

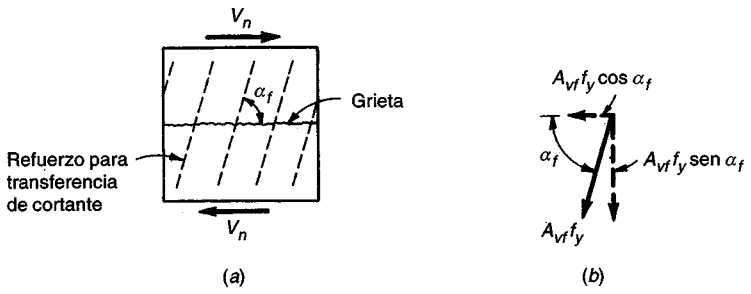


FIGURA 4.30
Refuerzo de cortante por fricción inclinado con respecto a la cara de la grieta.

Debe tenerse un interés particular en cuanto al estudio de todos los planos posibles de falla y al suministro de suficiente acero bien anclado a través de estos planos.

Ejemplo 4.6. Diseño del detalle de un apoyo en una viga. Una viga prefabricada debe diseñarse para resistir una reacción en el apoyo para cargas mayoradas de $V_u = 125$ klb, aplicada a un ángulo de acero de 3 × 3, como se indica en la figura 4.31. En lugar de un valor calculado, se supondrá una fuerza horizontal T_u como resultado de restricciones por cambios de volumen igual al 20 por ciento de la reacción vertical, o sea, 25 klb. Determine el refuerzo auxiliar necesario, utilizando acero con resistencia a la fluencia $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. La resistencia de diseño del concreto es $f'_c = 5000$ lb/pulg^2.

Solución. Se supone una grieta potencial a 20°, que se inicia a partir de un punto a 4 pulg desde el extremo de la viga, como se ilustra en la figura 4.31*a*. El área total de acero necesaria A_{vf} es la suma de la que se requiere para resistir los efectos de V_u y T_u. De acuerdo con esto, se modifica la ecuación (4.32):

$$A_{vf} = \frac{V_u \cos 20° + T_u \operatorname{sen} 20°}{\phi \mu f_y}$$

$$= \frac{125 \times 0.940 + 25 \times 0.340}{0.85 \times 1.4 \times 60}$$

$$= 1.76 \text{ pulg}^2$$

La compresión neta perpendicular a la grieta potencial no debe ser menor que V_u sen 20 – T_u cos 20 = 19 klb. Conforme al Código ACI, esta fuerza puede tenerse en cuenta para reducir el acero requerido de cortante por fricción, pero en este caso se ignorará en forma conservadora. Se utilizarán cuatro barras No. 6 que proveen un área de 1.77 pulg^2. Éstas se soldarán al ángulo de 3 × 3 y se extenderán dentro de la viga en una distancia suficiente para desarrollar la resistencia a la fluencia de las barras. Según el Código ACI, la longitud de desarrollo para una barra No. 6 es 18 pulg. Sin embargo, si se tiene en cuenta la incertidumbre en la localización exacta de la grieta, las barras se extenderán 24 pulg

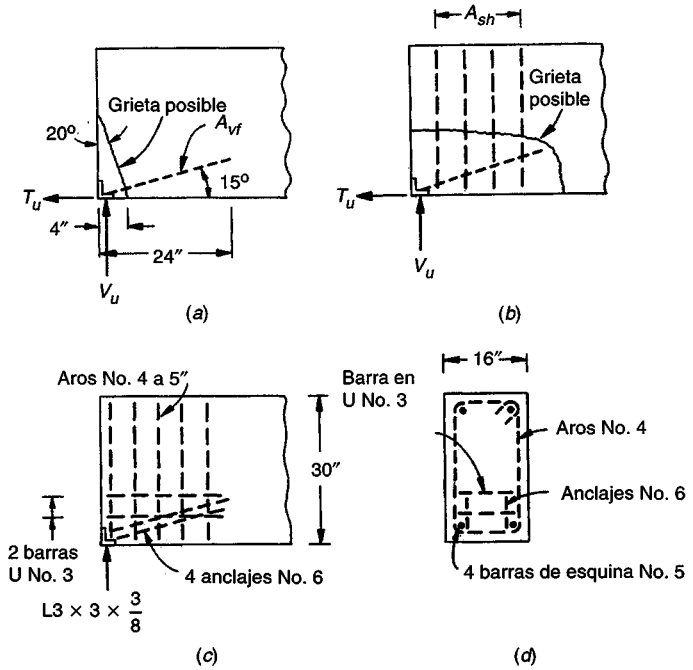


FIGURA 4.31
Diseño del apoyo de una viga: (*a*) grieta diagonal; (*b*) grieta horizontal; (*c*) refuerzo; (*d*) sección transversal.

dentro de la viga, como aparece en la figura 4.31*a*. Las barras se colocarán a un ángulo de 15° con la cara inferior del elemento.

$$A_c = 16\left(\frac{4}{\text{sen}\,20°}\right) = 187\,\text{pulg}^2$$

Así, de acuerdo con el Código ACI, la resistencia a cortante máxima nominal en la superficie no debe exceder $V_n = 0.2\,f'_c A_c = 187$ klb o $V_n = 800A_c = 150$ klb. La máxima resistencia de diseño que se puede utilizar es $\phi V_n = 0.85 \times 150 = 128$ klb. El cortante aplicado en la interfase para las cargas mayoradas es

$$V_n = 125 \cos 20° + 25 \text{ sen } 20° = 126 \text{ klb}$$

de manera que el diseño puede juzgarse satisfactorio hasta este punto.

Puede adoptarse una segunda alternativa para la formación de la grieta como aparece en la figura 4.31*b*, que sería el resultado de la tendencia del anclaje completo por salir horizontalmente de la viga.

El área de acero requerida A_{sh} y los esfuerzos cortantes en el concreto se calculan con base en el desarrollo de la tensión de fluencia completa en las barras A_{vf}. (Observe que el coeficiente ϕ ya no es necesario porque se introdujo en el cálculo de A_{vf}).

$$\begin{aligned} A_{sh} &= \frac{A_{vf} f_y \cos 15°}{\mu f_y} \\ &= \frac{1.76 \times 0.966}{1.4} \\ &= 1.21\,\text{pulg}^2 \end{aligned}$$

Se utilizarán cuatro aros No. 4 que proporcionan un área de 1.57 pulg^2.

La fuerza cortante máxima que puede transferirse, según los límites del Código ACI, se basará conservadoramente en un plano horizontal de 24 pulg de longitud. No es necesario incluir un coeficiente de reducción de resistencia en los cálculos de este valor máximo, puesto que ya se introdujo en la determinación del área de acero A_{vf} a través de la cual se aplica la fuerza cortante. De acuerdo con esto,

$$V_n \leq 800 \times 16 \times 24 = 308 \text{ klb}$$

La máxima fuerza cortante que pudiera aplicarse en este caso es

$$V_n = 1.76 \times 60 \cos 15° = 102 \text{ klb}$$

muy por debajo del máximo especificado.

La referencia 4.33 recomienda acero de confinamiento adicional en una cantidad $V_u/8f_y$, que debe colocarse en forma de aros o barras con ganchos confinando el concreto cerca de las caras inferior y extrema en el punto de reacción de una viga prefabricada. En este caso,

$$\begin{aligned} A_{cv} = A_{ch} &= \frac{125}{8 \times 60} \\ &= 0.26 \\ &= 0.26\,\text{pulg}^2 \end{aligned}$$

Se colocará un aro adicional No. 4 tan cerca como sea posible de la cara extrema y se adicionarán dos barras No. 3 en forma de U, paralelas a la cara inferior de la viga como se muestra en las figuras 4.31*c* y *d*. En la figura 4.31*d* también aparecen cuatro barras de esquina No. 5, que suministrarán anclaje para los aros de acero.

REFERENCIAS

4.1. "Shear and Diagonal Tension", pt. 2, ACI-ASCE Committee 326, *J. ACI*, vol. 59, no. 2, 1962, pp. 277-333.

4.2. B.Bresler and J. G. MacGregor, "Review of Concrete Beams Failing in Shear", *Proc. ASCE*, vol. 93, no. ST1, 1967, pp. 343-372.

4.3. "The Shear Strength of Reinforced Concrete Members, ASCE-ACI Task Committee 426, *Proc. ASCE*, vol. 99, no. ST6, 1973, pp. 1091-1187 (con amplia bibliografía).
4.4. "The Shear Strength of Reinforced Concrete Members–Slabs", ASCE-ACI Task Committee 426, *Proc. ASCE*, vol. 100, no. ST8, 1974, pp. 1543-1591.
4.5. *Shear in Reinforced Concrete*. Vols. 1 and 2, Special Publication SP-42, American Concrete Institute, Detroit, 1974.
4.6. A. H. Nilson (ed.), *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete*, American Society of Civil Engineers, New York, 1982.
4.7. M. P. Collins, "Toward a Rational Theory for RC Members in Shear", *J. Structural Division*, ASCE, vol. 104, no. ST4, April 1978, pp. 649-666.
4.8. T. T. C. Hsu, *Unified Theory of Reinforced Concrete*, CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida, 1993.
4.9. A. H. Elzanaty, A. H. Nilson, and F. O. Slate, "Shear Capacity of Reinforced Concrete Beams Using High-Strength Concrete", *J. ACI*, vol. 83, no. 2, 1986, pp. 290-296.
4.10. J. J. Roller and H. G. Russell, "Shear Strength of High-Strength Concrete Beams with Web Reinforcement", *ACI Struct. J.*, vol. 87, no. 2, 1990, pp. 191-198.
4.11. S. H. Ahmad, A. R. Khaloo, and A. Proveda, "Shear Capacity of Reinforced High-Strength Concrete Beams", *J. ACI*, vol. 83, no. 2, 1986, pp. 297-305.
4.12. S. Martinez, A. H. Nilson, and F. O. Slate, "Short-Term Mechanical Properties of High-Strength Lightweight Concrete", *Research Report No. 82-9*, Department of Structural Engineering, Cornell University, August 1982.
4.13. S. Y. Debaiky and E. I. Elmiema, "Behavior and Strength of Reinforced Concrete Haunched Beams in Shear", *J. ACI*, vol. 79, no. 3, 1982, pp. 184-194.
4.14. G. N. J. Kani, "How Safe Are Our Large Reinforced Concrete Beams?" *J. ACI*, vol. 64, no. 3, 1967, pp. 128-141.
4.14a. M. P. Collins, D. Mitchell, P. Adebar, and F. J. Vecchio, "A General Shear Design Method", *ACI Struct, J.*, vol. 93, no. 1, 1996, pp. 36-45.
4.15. W. Ritter, "Die Bauweise Hennebique" (The Hennebique System), *Schweizerische Bauzeitung*, XXXIII, no. 7, 1899.
4.16. E. Morsh, *Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung* (Reinforced Concrete Theory and Application), Verlag Konrad Wittner, Stuttgart, 1912.
4.17. J. Schlaich, K. Shafer, and M. Jennewein, "Toward a Consistent Design of Structural Concrete", *J. Prestressed Concr. Inst.*, vol. 32, no. 3, 1987, pp. 74-150.
4.18. P. Marti, "Truss Models in Detailing", *Conc. Int.*, vol. 7, no. 12, 1985, pp. 66-73. (Ver también P. Marti, "Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design", *J. ACI*, vol. 82, no. 1, 1985, pp. 46-56).
4.19. J. G. MacGregor, *Reinforced Concrete*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
4.20. M. P. Collins and D. Mitchell, *Prestressed Concrete Structures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
4.21. F. J. Vecchio and M. P. Collins, "Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear", *J. ACI*, vol. 83, no. 2, 1986, pp. 219-231.
4.22. F. J. Vecchio and M. P. Collins, "Prediciting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using the Modified Compression Field Theory", *J. ACI*, vol. 85, no. 3, 1988, pp. 258-268.
4.23. CSA Committee A23.3, *Design of Concrete Structures*, Canadian Standards Association, Etobicoke, Ontario, 1994, 199 pp.
4.24. L. Chow, H. D. Conway, and G. Winter, "Stress in Deep Beams", *Trans ASCE*, vol. 118, 1953, p. 686.
4.25. H. A. P. dePaiva and C. P. Siess, "Strength and Behavior of Deep Beams in Shear", *J. Struct. Div. ASCE*, vol. 91, no. ST5, 1965, p. 19.
4.26. R. A. Crist, "Shear Behavior of Deep Reinforced Concrete Beams", *Proc. Symp Effects Repeated Loading Mat. Structural Elements, Mexico City*, vol. 4, 1966, RILEM, Paris.
4.27. J. G. MacGregor and N. M. Hawkins, "Suggested Revisions to ACI Building Code Clauses Dealing With Shear Friction and Shear in Deep Beams and Corbels", *J. ACI*, vol. 74, no. 11, 1977, pp. 537-545.
4.28. D. M. Rogowsky and J. G. MacGregor, "Design of Reinforced Concrete Deep Beams", Concrete International, vol. 8, no. 8, 1986, pp. 49-58.
4.29. P. W. Birkeland and H. W. Birkeland, "Connections in Precast Concrete Construction", *J. ACI*, vol. 63, no. 3, 1966, pp. 345-368.
4.30. R. F. Mast, "Auxiliary Reinforcement in Precast Concrete Connections", *J. Structural Division, ASCE*, vol. 94, no. ST6, June 1968, pp. 1485-1504.
4.31. A. H. Mattock and N. M. Hawkins, "Shear Transfer in Reinforced Concrete—Recent Research", *J. Prestressed Concr. Inst.*, vol. 17, no. 2, 1972, pp. 55-75.
4.32. A. H. Mattock, "Shear Transfer in Concrete Having Reinforcement at an Angle to the Shear Plane", Special Publication SP-42, American Concrete Institute, Detroit, 1974.
4.33. *PCI Design Handbook*, 3rd ed., Prestressed Concrete Institute, Chicago, 1985.

PROBLEMAS

4.1. Debe diseñarse una viga para cargas mayoradas que causan un cortante máximo de 50.0 klb, utilizando concreto con $f'_c = 4000$ lb/pulg^2. Con base en el supuesto de que las dimensiones del concreto están controladas por tensión diagonal, seleccione el ancho y la altura efectiva apropiados: (*a*) para una viga en la cual no se utilizará refuerzo en el alma, (*b*) para una viga en donde se suministrará únicamente el refuerzo mínimo en el alma, determinado por la ecuación (4.13), y (*c*) para una viga donde el refuerzo

en el alma proporciona una resistencia a cortante $V_s = 2V_c$. Siga los requisitos del Código ACI y utilice $d = 2b$ en cada caso. Los cálculos pueden basarse en el valor más aproximado de V_c dado por la ecuación (4.12*b*).

4.2. Una viga rectangular con $b = 12$ pulg y $d = 22$ pulg tiene una luz de 20 pies cara a cara entre apoyos simples. Está reforzada a flexión con tres barras No.11 que continúan sin interrupción hasta los extremos de la luz. La viga debe sostener una carga muerta de servicio $D = 1.63$ klb/pie (que incluye su propio peso) y una carga viva de servicio $L = 3.26$ klb/pie, ambas uniformemente distribuidas a lo largo de la luz. Diseñe el refuerzo a cortante con estribos verticales No. 3 en forma de U. Puede emplear la ecuación más aproximada (4.12*b*) para determinar el valor de V_c. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

4.3. Rediseñe el refuerzo a cortante de la viga del problema 4.2, con base en el valor de V_c determinado en forma más precisa con la ecuación (4.12*a*). Explique sus resultados con respecto al tiempo de diseño y a la posible diferencia en costos de construcción.

4.4. Una viga con un ancho de 11 pulg y una altura efectiva de 16 pulg sostiene una carga mayorada y uniformemente distribuida de 6.0 klb/pie, incluyendo su propio peso, además de una carga concentrada central y mayorada de 14 klb. Tiene una luz de 18 pies y está restringida en los extremos con momentos para las cargas mayoradas máximas de 155 klb-pie en cada apoyo. Está reforzada con tres barras No. 9 tanto para flexión positiva como negativa. Si $f'_c = 4000$ lb/pulg^2, ¿en qué parte de la viga se requiere teóricamente refuerzo en el alma: (*a*) si se utiliza la ecuación (4.12*b*), (*b*) si se emplea la ecuación (4.12*a*)? Explique sus resultados.

4.5. ¿Qué efectos tendría un momento adicional en el sentido de las manecillas del reloj de 200 klb-pie aplicado en el apoyo derecho, sobre el requerimiento para refuerzo a cortante determinado en la parte (*a*) del problema 4.4?

4.6. Diseñe el refuerzo en el alma para la viga del problema 4.4 según el valor de V_c determinando con la ecuación más aproximada, estipulada por el Código ACI, empleando estribos verticales No. 3 con $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

4.7. Diseñe el refuerzo en el alma para la viga del problema 4.5 con el valor de V_c determinado mediante la ecuación más aproximada, estipulada por el Código ACI, empleando estribos verticales No. 3 con $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

4.8. La viga del problema 4.2 estará sometida a una carga de compresión axial mayorada de 150 klb en su sección transversal bruta de 12 × 25 pulg, además de las cargas descritas anteriormente. ¿Cuál es el efecto en la resistencia a cortante del concreto V_c: (*a*) con la ecuación más precisa del ACI y (*b*) con la ecuación más aproximada del ACI?

4.9. La viga del problema 4.2 estará sometida a una carga de tensión axial mayorada de 75 klb en su sección transversal bruta de 12 × 25 pulg, además de las cargas descritas anteriormente. ¿Cuál es el efecto en la resistencia a cortante del concreto V_c: (*a*) con la ecuación más precisa del ACI y (*b*) con la metodología más conservadora del ACI?

4.10. Para una viga de gran altura con una relación luz-altura de 3, con cargas concentradas en los tercios en su parte superior y apoyada en sus esquinas inferiores: (*a*) delinee las trayectorias de esfuerzos indicando las direcciones del esfuerzo principal para la viga no fisurada, y con base en ellas señale el probable patrón de agrietamiento; (*b*) identifique y explique los mecanismos mediante los cuales la viga resiste el cortante después del agrietamiento; (*c*) explique en qué difiere el refuerzo en el alma de esta viga con respecto al de una viga de proporciones normales; (*d*) haga una lista de los posibles modos de falla en caso de que la viga se sobrecargue.

4.11. Una viga de transferencia de gran altura tendrá una altura total de 11 pies y una luz de 22 pies entre columnas de apoyo. Además de su propio peso, ésta tomará una carga mayorada y uniformemente distribuida de 3.8 klb/pie aplicada a lo largo de su borde superior desde un piso adyacente y sostendrá una columna que está sometida a una carga concentrada mayorada de 1000 klb proveniente de los pisos superiores, aplicada en el centro de la luz. El ancho de la viga no debe ser mayor de 16 pulg pero puede ser menor. Diseñe la viga para las cargas determinadas y encuentre el valor del ancho b y los refuerzos A_s, A_y y A_{vh} que se requieren, con base en las disposiciones del Código ACI. Comente sobre la necesidad de un despiece especial del refuerzo y haga un esquema de sus recomendaciones. Las resistencias especificadas de los materiales son $f'_c = 5000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/ pulg^2.

4.12. Una viga de concreto prefabricado con dimensiones de la sección transversal $b = 10$ pulg y $h = 24$ pulg debe diseñarse para actuar en forma compuesta con una losa superior fundida en el sitio con altura $h_f = 5$ pulg y ancho 48 pulg. Para las cargas mayoradas, el esfuerzo de compresión máximo en el ala en el centro de la luz es 2400 lb/pulg^2; en los apoyos de la luz simple de 28 pies, la fuerza en el ala debe ser cero. Los estribos verticales en forma de U suministrados para tomar el cortante por flexión se extenderán dentro de la losa y se anclarán en forma adecuada para proporcionar también una transferencia

de la fuerza del ala por cortante y fricción. Encuentre la cantidad mínima de estribos No. 4 que deben proveerse con base en los requisitos de cortante y fricción. El concreto tanto para las partes prefabricadas como para las vaciadas en el sitio tendrá una resistencia de $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y para el acero $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. La superficie superior del alma prefabricada se hará intencionalmente rugosa para que cumpla con la definición del Código ACI.

4.13. Rediseñe el refuerzo en el extremo de la viga del ejemplo 4.6 teniendo en cuenta que se utilizará un apoyo con rodillo de manera tal que $T_u = 0$.

CAPÍTULO

5 ADHERENCIA, ANCLAJE Y LONGITUD DE DESARROLLO

5.1 FUNDAMENTOS DE LA ADHERENCIA A FLEXIÓN

Si se utilizaran barras de refuerzo circulares lisas para la construcción de la viga de concreto reforzado de la figura 5.1*a*, y si estas mismas se engrasaran o lubricaran de alguna otra manera antes del vaciado del concreto, la viga sería apenas un poco más fuerte que si se construyera utilizando concreto simple, es decir, sin refuerzo. Si se aplicara una carga como en la figura 5.1*b*, las barras mantendrían su longitud original a medida que la viga se deflecta. Las barras se deslizarían longitudinalmente con respecto al concreto adyacente, que estaría sometido a deformaciones de tensión a causa de la flexión presente. En este caso no sería valida la propuesta No. 2 de la sección 1.8 relativa a la premisa de que la deformación en la barra embebida de refuerzo es la misma que la del concreto circundante. Para que el concreto reforzado se comporte como se pretende es esencial que se desarrollen *fuerzas de adherencia* en la interfase entre el concreto y el acero, de manera que se evite un deslizamiento significativo en ella.

La figura 5.1*c* ilustra las fuerzas de adherencia que actúan en la interfase del concreto como resultado de la flexión, mientras que la figura 5.1*d* presenta las fuerzas de adherencia, iguales y opuestas, que se ejercen sobre el refuerzo. Es mediante la acción de estas fuerzas de adherencia en la interfase que se impide el deslizamiento indicado en la figura 5.1*b*.

Hace algunos años, cuando se utilizaban barras lisas, es decir, sin deformaciones en la superficie, la resistencia de adherencia inicial era provista únicamente por la unión química y por la fricción mecánica, relativamente débiles, entre el acero y el concreto. Una vez que se sobrepasaban las fuerzas de adhesión y la fricción estática para cargas superiores, pequeñas cantidades de deslizamiento llevaban al entrelazamiento de las rugosidades naturales de la barra con el concreto. Sin embargo, esta resistencia de adherencia natural es tan baja que la unión entre el acero y el concreto se rompía con frecuencia en vigas reforzadas con barras lisas. En estos casos, la viga entraba en colapso a medida que la barra se deslizaba a través del concreto. Para evitar esto, se proporcionaba anclaje en los bordes, principalmente en forma de ganchos como aparece en la figura 5.2. Si el anclaje es adecuado, la viga no presentará colapso aunque la adherencia se rompa en toda la longitud entre los anclajes. Esto se explica porque el elemento actúa como un arco atirantado como se ilustra en la figura 5.2, donde el concreto no fisurado que aparece en forma sombreada representa el arco, y las barras de anclaje, el tensor. En este caso, los esfuerzos de adherencia son cero a lo largo de la longitud en donde ya no existe adherencia. Esto significa que a todo lo largo de la longitud no adherida, la fuerza en el acero es constante e igual a $T = M_{max}/z$. En consecuencia, la elongación total del acero en estas vigas es mayor que en aquéllas donde se mantiene la adherencia, lo cual a su vez genera deflexiones más grandes y mayores anchos en las grietas.

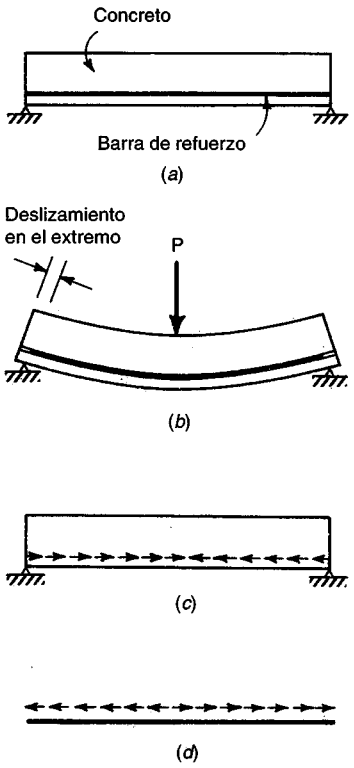


FIGURA 5.1
Esfuerzos de adherencia ocasionados por flexión: (*a*) viga antes de ser cargada; (*b*) deslizamiento libre entre concreto y acero; (*c*) fuerzas de adherencia que actúan sobre el concreto; (*d*) fuerzas de adherencia que actúan sobre el acero.

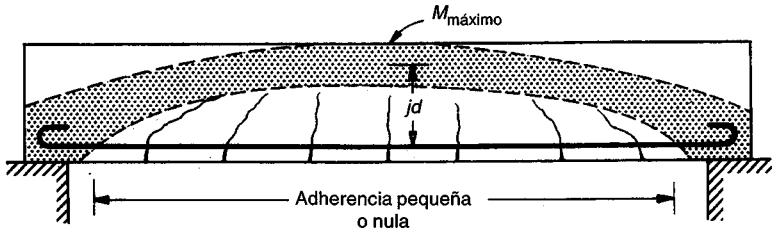


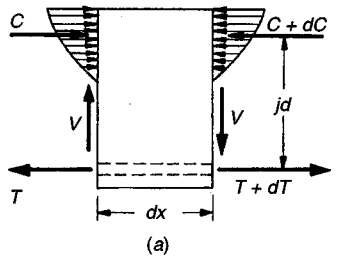
FIGURA 5.2
Acción de arco atirantado en una viga con adherencia pequeña o nula.

Para mejorar esta situación, ahora se utilizan comúnmente barras corrugadas, tanto en los Estados Unidos como en muchos otros países (ver la sección 2.12). En estas barras, los resaltes sobresalientes se apoyan en el concreto circundante lo que produce un incremento importante de la resistencia de adherencia. Resulta posible, entonces, en la mayor parte de los casos, eliminar aditamentos especiales de anclaje como los ganchos. Además, los anchos de las grietas se reducen al igual que las deflexiones.

a. Esfuerzo de adherencia basado en el análisis simple de sección fisurada

Para el tramo corto de una viga con longitud dx, como el que se ilustra en la figura 5.3*a*, el momento a un lado por lo general difiere de aquél al otro lado en una pequeña cantidad dM. Si esta pieza se aísla y se supone que después del agrietamiento el concreto no resiste esfuerzos de tensión, las fuerzas internas son las que se indican en la figura 5.3*a*. El cambio en el momento flector dM produce un cambio en la fuerza de la barra

$$dT = \frac{dM}{jd} \qquad (a)$$



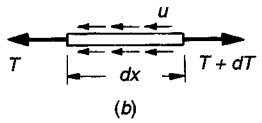


FIGURA 5.3
Fuerzas y esfuerzos que actúan en una longitud diferencial de viga: (*a*) diagrama de cuerpo libre del elemento de concreto reforzado; (*b*) diagrama de cuerpo libre del elemento de acero.

donde *jd* es el brazo de palanca interno entre la resultante de fuerzas de tensión y de compresión. Puesto que la barra o barras deben estar en equilibrio, este cambio en la fuerza de la barra es resistido en la superficie de contacto entre el acero y el concreto mediante una fuerza igual y opuesta que produce la adherencia, como se indica en la figura 5.3*b*.

Si u es la magnitud del esfuerzo de adherencia promedio local por unidad de área superficial de la barra, entonces sumando fuerzas horizontales

$$u\Sigma_0 dx = dT \qquad (b)$$

donde Σ_0 es la suma de los perímetros de todas las barras. Entonces

$$u = \frac{dT}{\Sigma_0 dx} \qquad (5.1)$$

que indica que el esfuerzo de adherencia local es proporcional a la tasa de cambio de la fuerza en la barra a lo largo de la luz. Como alternativa, se sustituye la ecuación (*a*) en la ecuación (5.1) y el esfuerzo de adherencia unitario puede formularse como

$$u = \frac{dM}{\Sigma_0 jddx} \qquad (b)$$

a partir de la cual

$$u = \frac{V}{\Sigma_0 jd} \qquad (5.2)$$

La ecuación (5.2) es la "ecuación de una sección elástica fisurada" para los esfuerzos de adherencia a flexión e indica que el esfuerzo de adherencia unitario es proporcional al cortante en la sección particular, es decir, a la tasa de cambio del momento flector.

Observe que la ecuación (5.2) es aplicable a las barras sometidas a *tensión* en una zona de concreto que se supone totalmente fisurada y en donde el concreto no resiste ninguna tensión. En consecuencia, ésta se aplica a las barras sometidas a tensión en luces simples o para el caso de luces continuas, tanto para las barras inferiores en las regiones de flexión positiva entre los puntos de inflexión, como para las barras superiores en las regiones de flexión negativa entre los puntos de inflexión y los apoyos. Sin embargo, no se aplica al refuerzo sometido a compresión, para el cual puede demostrarse que los esfuerzos de adherencia a flexión son muy bajos.

b. Distribución real de los esfuerzos de adherencia a flexión

La distribución real de los esfuerzos de adherencia a lo largo de las barras de refuerzo corrugadas es bastante más compleja que la que se representa mediante la ecuación (5.2), y la ecuación (5.1) proporciona mejores bases para comprender el comportamiento de las vigas. La figura 5.4 ilustra un segmento de viga sometido a flexión pura. El concreto deja de resistir esfuerzos de tensión únicamente donde queda ubicada la grieta en realidad; allí la tensión en el acero es máxima y tiene el valor estimado por la teoría simple: $T = M/jd$. Entre las grietas, el concreto *sí resiste* cantidades moderadas de tensión, transmitidas mediante esfuerzos de adherencia que se ejercen a lo largo de la interfase en la dirección señalada en la figura 5.4*a*. Esto reduce la fuerza de tensión en el acero, como lo ilustra la figura 5.4*c*. A partir de la ecuación (5.1) es obvio que el esfuerzo de adherencia u es proporcional a la tasa de cambio de la fuerza en la barra y varía, entonces, como aparece en la figura 5.4*d*; los esfuerzos de adherencia son máximos donde la pendiente de la curva de la fuerza en el acero es mayor y son nulos donde la pendiente es cero. En ensayos llevados a cabo en la Universidad de Cornell (ver las referencias 5.1 y 5.2) se midieron esfuerzos locales de adherencia muy grandes en los lugares adyacentes a las grietas. Éstos son tan grandes, que inevitablemente ocurre algún deslizamiento entre el concreto y el acero en las inmediaciones de cada grieta.

En raras ocasiones las vigas se encuentran sometidas a momentos de flexión pura; generalmente, éstas soportan cargas transversales produciendo cortante y momento que varían a lo largo de la luz. La figura 5.5*a* ilustra una viga sometida a una carga distribuida. El agrietamiento indicado es el típico. La fuerza en el acero T calculada mediante un análisis simple de sección fisurada es proporcional al diagrama de momento y se presenta con la línea punteada de la figura 5.5*b*. Sin embargo, el valor real de T es menor que el que predice el análisis simple para todos los puntos excepto en las ubicaciones reales de las grietas. La variación real de T se indica con la línea sólida de la figura 5.5*b*. En la figura 5.5*c* se muestran en línea punteada los esfuerzos de adherencia que predice la teoría simplificada y en línea continua la variación real. Observe que el valor de u es

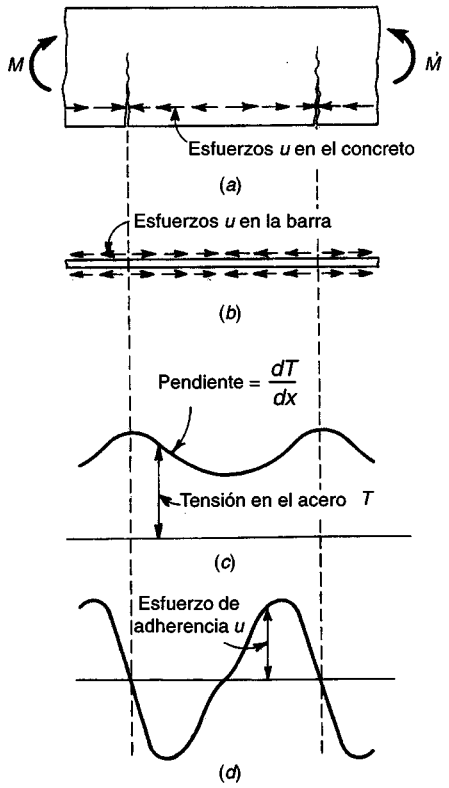


FIGURA 5.4
Variación de la fuerza en el acero y del esfuerzo de adherencia en un elemento de concreto reforzado sometido a flexión pura: (*a*) segmento de concreto fisurado; (*b*) esfuerzos de adherencia que actúan sobre las barras de refuerzo; (*c*) variación de la fuerza de tensión en el acero; (*d*) variación del esfuerzo de adherencia a lo largo del acero.

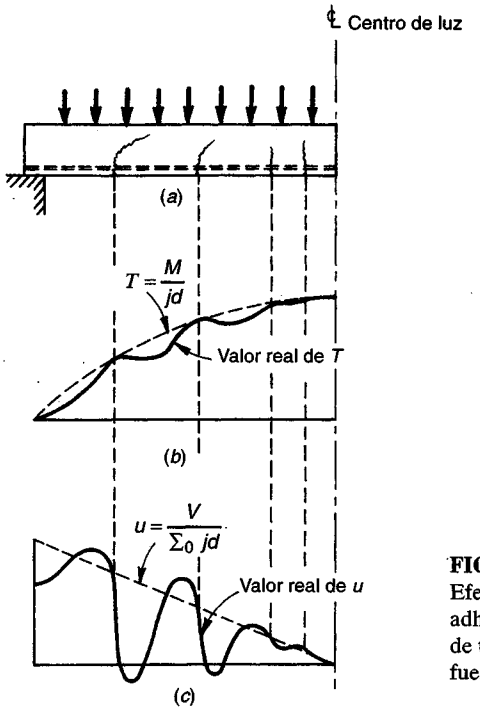


FIGURA 5.5
Efectos de las grietas de flexión de una viga sobre los esfuerzos de adherencia: (*a*) viga agrietada por flexión; (*b*) variación de la fuerza de tensión T en el acero a lo largo de la luz; (*c*) variación del esfuerzo de adherencia u a lo largo de la luz.

igual al determinado por la ecuación (5.2) únicamente en aquellos sitios donde la pendiente del diagrama de fuerza del acero es igual a la de la teoría simple; en todos los demás puntos, si la pendiente es mayor que la supuesta, el esfuerzo de adherencia es mayor; si la pendiente es menor, el esfuerzo de adherencia es menor. Para este ejemplo, exactamente a la izquierda de las grietas los esfuerzos de adherencia son mucho mayores que los estipulados por la ecuación (5.2), lo cual producirá casi con seguridad fallas de adherencia locales. Justo a la derecha de las grietas, los esfuerzos de adherencia son mucho menores que los calculados y, de hecho, en general son negativos muy cerca de la grieta; es decir, las fuerzas de adherencia actúan en dirección opuesta.

Es evidente que, en las vigas, los esfuerzos reales de adherencia mantienen muy poca relación con los estimados mediante la ecuación (5.2), excepto en el sentido general de que éstos son máximos en las regiones de máximo cortante.

5.2 RESISTENCIA ÚLTIMA DE ADHERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO

Para las barras de refuerzo a tensión se han observado dos tipos de falla última por adherencia. La primera es *desprendimiento directo* de la barra, lo cual ocurre cuando existe un buen confinamiento proporcionado por el concreto circundante. Este tipo de falla puede esperarse cuando se utilizan barras de diámetro relativamente pequeño con distancias del recubrimiento de concreto y espaciamientos entre las barras suficientemente largos. El segundo tipo de falla es *fracturamiento* del concreto a lo largo de la barra cuando el recubrimiento, el confinamiento o el espaciamiento entre barras es insuficiente para resistir la tensión lateral en el concreto que resulta de la acción de cuña producida por las deformaciones de la barra. Los métodos de diseño actuales exigen tener en cuenta los dos posibles modos de falla.

a. Resistencia última de adherencia

Si la barra está suficientemente confinada por una masa de concreto circundante, entonces, a medida que se aumenta la fuerza de tensión en la barra, se sobrepasan las fuerzas de adherencia de

fricción, y el concreto se fractura eventualmente en el frente de la barra con el consecuente desprendimiento de la misma. El concreto circundante permanece intacto excepto por el fracturamiento que ocurre al frente de los resaltes, en la zona inmediatamente adyacente a la interfase de la barra. Para las modernas barras corrugadas, la adhesión y la fricción son mucho menos importantes que la interacción mecánica de los resaltes con el concreto circundante.

La falla por adherencia que resulta del fracturamiento del concreto es más común en vigas que la falla por desprendimiento directo. Este fracturamiento ocurre principalmente en la acción de cuña cuando los resaltes de las barras corrugadas se apoyan contra el concreto (ver las referencias 5.3 y 5.4). Éste puede ocurrir bien sea en un plano vertical como en la figura 5.6*a* u horizontalmente en el plano de las barras como lo indica la figura 5.6*b*. El tipo de fracturamiento horizontal de la figura 5.6*b* se inicia con frecuencia en una grieta diagonal. En este caso, como se analizó en relación a la figura 4.7*b* y según la figura 4.1, la acción de espigo aumenta la tendencia al fracturamiento. Esto indica que por lo general las fallas a cortante y de adherencia están interrelacionadas intrincadamente.

Cuando se sobrepasa la resistencia de adherencia o cuando el fracturamiento se extiende a todo lo largo hasta el extremo de una barra no anclada, se presenta una falla completa de adherencia. El deslizamiento del acero con relación al concreto conduce al colapso inmediato de la viga.

Si se tienen en cuenta las grandes variaciones locales en los esfuerzos de adherencia causados por las grietas a flexión y las grietas diagonales (ver las figuras 5.4 y 5.5), es evidente que las fallas locales de adherencia, inmediatamente adyacentes a las grietas, se presentarán a menudo a cargas considerablemente inferiores que la carga de falla de la viga. Estas fallas locales conducen a la presencia de pequeños deslizamientos locales, a un poco de ensanchamiento de las grietas y al aumento en las deflexiones, pero no será peligroso, siempre y cuando la falla no se extienda a todo lo largo de la barra, resultando esto en un deslizamiento total. De hecho, como se analizó en relación con la figura 5.2, cuando los anclajes en los extremos son confiables, pueden presentarse fallas de adherencia a lo largo de toda la longitud de la barra, incluyendo los anclajes, sin que la capacidad de carga de la viga se afecte. El anclaje en los extremos puede proporcionarse mediante ganchos, como lo sugiere la figura 5.2, o de manera más corriente, mediante la prolongación de las barras rectas una distancia suficiente más halla del punto de máximo esfuerzo.

Mediante muchos ensayos experimentales (ver las referencias 5.5 a 5.11), que incluyen tanto de extracción directa como de vigas, se han establecido los valores límites para la resistencia de adherencia, expresada en términos del esfuerzo de adherencia promedio cuando se llega a la falla por adherencia. Estos ensayos conforman las bases de los requisitos de diseño actuales.

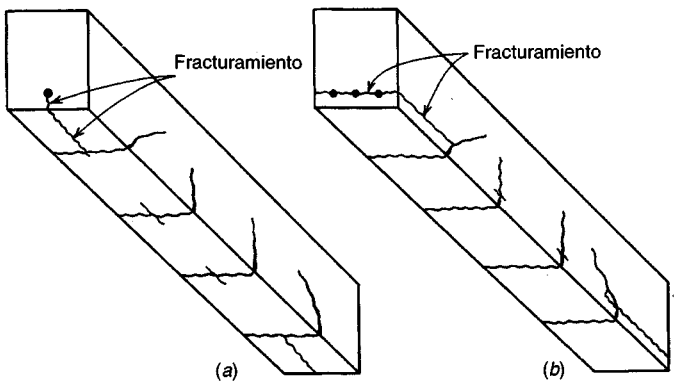


FIGURA 5.6
Fracturamiento del concreto a lo largo del refuerzo.

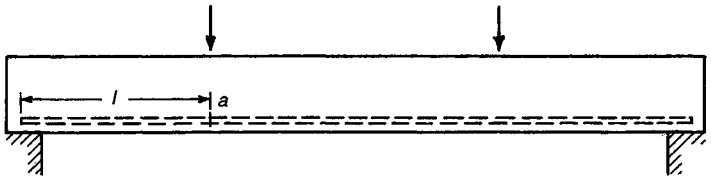


FIGURA 5.7
Longitud de desarrollo.

b. Longitud de desarrollo

La presentación anterior sugiere el concepto de *longitud de desarrollo* de una barra de refuerzo, que se define como la longitud de empotramiento necesaria para desarrollar toda la resistencia a la tensión de la barra, controlada bien sea por adherencia o por agrietamiento. Con referencia a la figura 5.7, el momento y en consecuencia el esfuerzo en el acero evidentemente son máximos en el punto *a* (despreciando el peso de la viga) y nulo en los apoyos. Si se designa el esfuerzo del acero en el punto *a* como f_s, la fuerza total de tensión $A_b f_s$ debe transferirse de la barra hasta el concreto a lo largo de la distancia l mediante esfuerzos de adherencia en la superficie. Para desarrollar en su totalidad la resistencia de la barra, $A_b f_y$ la distancia l debe ser al menos igual a la longitud del desarrollo de la barra, determinada mediante ensayos. Para la viga de la figura 5.7 no habrá falla prematura por adherencia si la longitud real l es mayor o igual a la longitud de desarrollo l_d. Es decir, la viga fallará a flexión o a cortante en vez de hacerlo por adherencia. Esto seguirá siendo válido aun si en las zonas adyacentes a las grietas ocurren deslizamientos locales sobre pequeñas zonas a lo largo de la viga.

Con base en este análisis se puede apreciar que el principal requisito para asegurarse contra la falla por adherencia es el siguiente: la longitud de la barra medida desde cualquier punto con determinado esfuerzo de acero (f_s o a lo sumo f_y) hasta su borde libre más cercano, debe ser por lo menos igual a su longitud de desarrollo. Si se satisface este requisito, la magnitud del esfuerzo de adherencia modular a flexión a lo largo de la viga, determinada por la ecuación 5.2 es sólo de importancia secundaria puesto que la integridad del elemento se asegura aun con la presencia de posibles fallas menores de adherencia que se presenten localmente. Sin embargo, si la longitud disponible real no es adecuada para el desarrollo completo, deben proveerse anclajes especiales, por ejemplo ganchos, para asegurar una resistencia apropiada.

c. Factores que afectan la longitud de desarrollo

Investigaciones experimentales han identificado los factores que afectan la longitud de desarrollo y los análisis de los datos de los ensayos han permitido obtener ecuaciones empíricas que se utilizan en la práctica actual del diseño. Los factores más importante resultan evidentes a partir de la revisión del parágrafo anterior e incluyen la resistencia a la tensión del concreto, la distancia de recubrimiento, el espaciamiento de las barras de refuerzo y la presencia de acero de refuerzo transversal.

Es claro que la *resistencia a la tensión* del concreto es importante debido a que el tipo de falla por adherencia más común en vigas es el tipo de fracturamiento como el indicado en la figura 5.6. Aunque la resistencia a tensión no aparece en forma explícita en las ecuaciones desarrolladas experimentalmente para la longitud de desarrollo (ver la sección 5.3), el término $\sqrt{f'_c}$ aparece en el

denominador de estas ecuaciones y refleja la influencia de la resistencia a la tensión del concreto. Para concreto liviano, la resistencia a la tensión es por lo general menor que para concreto de densidad normal con la misma resistencia a la compresión; de acuerdo con esto, si se utiliza concreto liviano, las longitudes de desarrollo deben aumentarse. Como alternativa, si se conoce o se especifica la resistencia medida a partir del ensayo de tensión indirecta del cilindro para concreto liviano, ésta puede incorporarse en las ecuaciones de longitud de desarrollo de la manera siguiente: para concreto de peso normal, la resistencia a la tensión indirecta del cilindro f_{ct} puede tomarse en general como $f_{ct} = 6.7\sqrt{f'_c}$. Si la resistencia a tensión indirecta en el cilindro f_{ct} se conoce para un concreto liviano particular, entonces el término $\sqrt{f'_c}$ puede remplazarse por $f_{ct}/6.7$ en las ecuaciones para calcular la longitud de desarrollo.

La *distancia de recubrimiento* medida convencionalmente a partir del centro de la barra hasta la cara de concreto más cercana, y medida bien sea en el plano de las barras o en dirección perpendicular en este plano, también afecta en el fracturamiento. Así, si se incrementa el recubrimiento vertical u horizontal, existe más concreto disponible para resistir la tensión que resulta del efecto de cuña de las barras corrugadas, se mejora la resistencia de fracturamiento y la longitud de desarrollo requerida es menor.

De manera similar, la figura 5.6*b* ilustra que si se incrementa el *espaciamiento entre barras* (por ejemplo, si se utilizan únicamente dos barras en lugar de tres), habrá más concreto disponible para cada barra para resistir el fracturamiento horizontal (ver la referencia 5.12). En vigas, las barras están espaciadas únicamente alrededor de uno o dos diámetros de barra entre sí. Por otro lado, en losas, zapatas y algunos otros tipos de elementos los espaciamientos entre barras son típicamente mucho mayores y, por tanto, la longitud de desarrollo requerida se reduce.

El *refuerzo transversal*, tal como el proporcionado por los estribos de los tipos mostrados en la figura 4.8, mejora la resistencia a la falla por fracturamiento vertical u horizontal de las barras sometidas a tensión debido a que la fuerza de tensión en el acero lateral tiende a evitar el ensanchamiento de la grieta real o potencial. La efectividad de este refuerzo transversal depende de su esfuerzo de fluencia al igual que del área de su sección transversal y del espaciamiento a lo largo de la longitud de desarrollo.

Además de estos factores básicos, se han identificado otros que pueden afectar la longitud de desarrollo, por ejemplo, *la ubicación vertical de la barra* (ver la referencia 5.13). Durante la construcción se presenta una tendencia del agua en exceso (utilizada frecuentemente para mejorar la trabajalidad de la mezcla) y del aire atrapado a subir a la parte superior del concreto durante el proceso de vibrado. El aire y el agua tienden a acumularse en la parte inferior de las barras que tienen un espesor sustancial de concreto debajo de ellas. Ensayos experimentales han demostrado una pérdida significativa en la resistencia a la adherencia para barras que tengan más de 12 pulgadas de concreto fresco fundido por debajo de ellas, y de acuerdo con esto la longitud de desarrollo debe aumentarse.

Las *barras de refuerzo recubiertas con epóxico* se utilizan cada vez más en proyectos donde la estructura va a estar sometida a unas condiciones ambientales corrosivas o a químicos para el deshielo, como es el caso de tableros en puentes de autopistas o garajes de estacionamiento. Los estudios han demostrado que la resistencia a la adherencia se reduce debido a que el recubrimiento epóxico disminuye la adhesión entre el concreto y la barra, por lo cual la longitud de desarrollo requerida debe aumentarse sustancialmente. Sin embargo, si el recubrimiento y el espaciamiento son grandes, el efecto del recubrimiento epóxico no es tan pronunciado y puede justificarse un incremento menor. Además, debido a que la resistencia de adherencia de las barras recubiertas por epóxico ya se ha reducido a causa de la falta de adherencia, se ha establecido un límites superior para el producto de los factores que afectan a la longitud de desarrollo, relacionados con la ubicación vertical de la barra y con el recubrimiento epóxico.

No resulta extraño proporcionar refuerzo a tensión por encima del requerido mediante cálculo, por ejemplo, como resultado de un redondeo hacia arriba en el valor A_s cuando se están

seleccionando las barras o cuando el diseño está gobernado por requisitos de acero mínimo. Obviamente, en este caso, la longitud de desarrollo requerida puede reducirse en proporción a la relación del acero requerida y al área de acero realmente proporcionado. Este factor de modificación para considerar en *el refuerzo en exceso* debe aplicarse únicamente cuando no se requiere anclaje o desarrollo de la resistencia de fluencia de la barra.

Finalmente, se ha encontrado que las *barras de diámetros menores* requieren longitudes de desarrollo algo menores que las estimadas mediante las ecuaciones empíricas que se aplican a barras mayores, por lo cual las longitudes de desarrollo requeridas para barras de diámetro pequeño se reducen.

El código ACI de 1995 tiene en cuenta todos los anteriores efectos en las ecuaciones básicas para calcular la longitud de desarrollo. El código define explícitamente todos los factores de modificación a la longitud de desarrollo, con las restricciones correspondientes. En la siguiente sección se establecen los detalles correspondientes.

5.3 DISPOSICIONES DEL CÓDIGO ACI PARA EL DESARROLLO DEL REFUERZO A TENSIÓN

El método para considerar la adherencia a flexión incorporada en el código ACI de 1995 es consistente con los principios establecidos en la sección 5.2. El requisito fundamental es que la fuerza calculada en el refuerzo para cada sección de un elemento de concreto reforzado debe desarrollarse a cada lado de la sección mediante una longitud adecuadamente embebida, ganchos, anclaje mecánico, o una combinación de éstos para evitar el desprendimiento. Esfuerzos locales altos de adherencia, como los que se sabe se presentan adyacentes a las grietas, no se consideran significativos. Por lo general, la fuerza que debe generarse se calcula con base en el esfuerzo de fluencia del refuerzo, es decir, la resistencia de la barra debe desarrollarse en su totalidad.

De acuerdo con el código ACI de 1995, las longitudes de desarrollo requeridas para barras corrugadas a tensión se calculan como un múltiplo del diámetro de la barra; es decir, el cálculo resulta en l_d/d_b, donde l_d es la longitud de desarrollo requerida y d_b es el diámetro de la barra. El código ACI establece entonces una ecuación básica que incluye *todos* los factores discutidos en la sección 5.2.

La ecuación básica parece altamente compleja debido a la gran cantidad de factores que involucra. Sin embargo, permite al diseñador analizar los efectos de todas las variables que controlan y permite cálculos más rigurosos de la longitud de desarrollo requerida cuando éste es un factor crítico. El código ACI también incluye ecuaciones simplificadas que pueden usarse en la mayoría de los casos del diseño corriente, siempre y cuando se cumplan ciertas restricciones relacionadas con el espaciamiento de las barras, los valores del recubrimiento y el refuerzo transversal mínimo. Estas ecuaciones alternas pueden simplificarse aún más para concretos de densidad normal y barras no recubiertas†.

En la presentación que sigue para el cálculo de la longitud de desarrollo, primero se define la ecuación básica del ACI y se discuten y definen su términos. Posteriormente, se presentan las ecuaciones alternas que también hacen parte del código ACI de 1995. Observe que en ningún caso la longitud de desarrollo l_d debe ser menor que 12 pulgadas (30 cm).

† Este enfoque para el cálculo de la longitud de desarrollo corresponde exactamente al tratamiento dado por el código ACI para el cálculo de V_c, la contribución del concreto en los cálculos de cortante. Los cálculos más exactos con la ecuación 4.12*a* resultan útiles para el diseño computarizado o en investigación pero son tediosos para cálculos manuales debido a la necesidad de recalcular las variables de control a intervalos muy cercanos a lo largo de la luz. Para el diseño corriente, reconociendo que la economía global se ve muy poco afectada, se utiliza la ecuación 4.12*b*, más simple pero menos precisa y más conservadora.

a. Ecuación básica para el desarrollo de barras a tensión

De acuerdo con el código ACI 12.2.3, para barras o alambres corrugados,

$$\frac{l_d}{d_b} = \frac{3}{40}\frac{f_y}{\sqrt{f'_c}}\frac{\alpha\beta\gamma\lambda}{\left(\frac{c + K_{tr}}{d_b}\right)} \tag{5.3}$$

en la cual el término $(c + K_{tr})/d_b$ no debe tomarse mayor que 2.5. En la ecuación (5.3), los términos se definen y los valores se establecen de la manera siguiente:

α = factor de ubicación del refuerzo
- Refuerzo horizontal colocado de manera que más de 12 pulgadas de concreto fresco se funden en el elemento por debajo de la longitud de desarrollo o del empalme: 1.3
- Otro refuerzo: 1.0

β = factor de recubrimiento
- Barras o alambres recubiertos con epóxico, con recubrimiento de concreto menor que $3d_b$ o espaciamiento libre menor que $6d_b$: 1.5
- Todas las otras barras o alambres recubiertos con epóxico o: 1.2
- Refuerzo no recubierto: 1.0
- Sin embargo, el producto de $\alpha\beta$ no es necesario que sea mayor que 1.7.

γ = tamaño del factor de refuerzo.
- Barras No. 6 o menores y alambres corrugados: 0.8
- Barra No. 7 y mayores: 1.0

λ = factor para concreto con agregado liviano
- Cuando se utiliza concreto con agregado liviano: 1.3
- Sin embargo, cuando se especifica f_{ct}, se permite tomar el valor del λ, como $6.7\sqrt{f'_c}/f_{ct}$ pero no menor que 1.0.
- Cuando se utiliza concreto de peso normal: 1.0

c = dimensión del espaciamiento o del recubrimiento, pulgadas.
- Utilizar la menor entre la distancia desde el centro de la barra hasta la superficie de concreto más cercano o la mitad del espaciamiento centro a centro entre las barras que se desarrollan.

K_{tr} = índice de refuerzo transversal: $(A_{tr}f_{yt})/1500_{sn}$

donde A_{tr} = área total de la sección transversal de todo refuerzo transversal que está dentro del espaciamiento s y que atraviesa el plano potencial de fracturamiento a través del refuerzo en desarrollo, pulg^2

f_{yt} = resistencia de la fluencia especificada para el refuerzo transversal, lb/pulg^2

s = máximo espaciamiento de refuerzo transversal dentro de la longitud l_d medida centro a centro, pulg

n = número de barras o alambres que se desarrollan a lo largo del plano de fracturamiento.

Se permite la utilización de $k_{tr} = 0$ como una simplificación de diseño aun si el refuerzo transversal está presente.

Se impone un límite de 2.5 al valor de $(c + K_{tr})/d_b$ con el fin de evitar la falla por desprendimiento. Tomando este término igual al valor del límite establecido de 2.5, la evaluación de la ecuación (5.3) resulta en $l_d = 0.03d_bf_y/\sqrt{f'_c}$, que coincide con el límite desarrollado experimentalmente y establecido en ediciones previas en el código ACI cuando controla la falla por desprendimiento. Observe que en la ecuación (5.3) y en todas las otras del código ACI relacionadas con la longitud de desarrollo y empalmes del refuerzo, *los valores de* $\sqrt{f'_c}$ *no deben tomarse mayores que 100 lb/pulg*^{2} debido a la falta de evidencia experimental en resistencia de adherencia para concretos con resistencias a la compresión por encima de los 10,000 lb/pulg^2.

b. Ecuaciones simplificadas para la longitud de desarrollo

El cálculo de la longitud de desarrollo requerida (en términos de diámetro de la barra) mediante la ecuación 5.3 exige calcular el término $(c + K_{tr})/d_b$ para cada combinación particular de recubrimiento, espaciamiento y refuerzo transversal. Como alternativa, de acuerdo con el código puede utilizarse una forma simplificada de la ecuación 5.3 en la cual $(c + K_{tr})/d_b$ se toma = 1.5, siempre y cuando se cumplan ciertas restricciones relacionadas con el recubrimiento, el espaciamiento y el refuerzo transversal. Dos casos de importancia práctica son los siguientes:

(*a*) Recubrimiento libre mínimo de 1.0 d_b, espaciamiento libre mínimo de 1.0 d_b y al menos estribos mínimos de acuerdo con el código o flejes (ver la sección 4.5*b*) a lo largo de l_d.

(*b*) Recubrimiento libre mínimo de 1.0 d_b y espaciamiento libre mínimo de $2d_b$.

En cualquiera de estos casos comunes, puede confirmarse fácilmente a partir de la ecuación (5.3), que para barras No. 7 y mayores:

$$\frac{l_d}{d_b} = \frac{f_y \alpha \beta \lambda}{20\sqrt{f'_c}} \tag{5.4a}$$

y para barras No. 6 y menores (con $\gamma = 0.8$):

$$\frac{l_d}{d_b} = \frac{f_y \alpha \beta \lambda}{25\sqrt{f'_c}} \tag{5.4b}$$

Si no se cumplen estas restricciones en el espaciamiento, entonces, considerando que se cumpla los requisitos de espaciamiento mínimo impuestos por el código (ver la sección 3.6c), el término $(c + K_{tr})/d_b$ tendrá un valor no menor que 1.0 (en lugar de 1.5 de antes) utilizando o no acero transversal. Los valores dados por las ecuaciones (5.4*a*) y (5.4 *b*) se multiplican entonces por el factor 1.5/1.0.

De esta manera, si el diseñador acepta ciertas restricciones en el recubrimiento de las barras, el espaciamiento y el refuerzo transversal, pueden utilizarse cálculos simplificados de los requerimientos de desarrollo. Las ecuaciones simplificadas se resumen en la tabla 5.1.

Para las situaciones más comunes de concreto de densidad normal y refuerzo sin recubrimiento son posibles simplificaciones adicionales. En este caso λ y β de la tabla 5.1 toman el valor 1.0, y las longitudes de desarrollo en términos de los diámetros de las barras son simplemente una función de f_y, f'_c y el factor de ubicación de la barra α. Las longitudes de desarrollo pueden tabularse

TABLA 5.1
Ecuación simplificada para la longitud de desarrollo a tensión en diámetros de barra de acuerdo con el Código ACI 1995

	Barra No. 6 y menores y alambres corrugados	Barra No. 7 y mayores
Espaciamiento libre de barras que se desarrolla o empalman $\geq d_b$, recubrimiento libre $\geq d_b$, y estribos o flejes a lo largo de l_d cumpliendo el mínimo especificado por el Código.	$\frac{l_d}{d_b} = \frac{f_y \alpha \beta \lambda}{25\sqrt{f'_c}}$	$\frac{l_d}{d_b} = \frac{f_y \alpha \beta \lambda}{20\sqrt{f'_c}}$
Espaciamiento libre de barras que se desarrollan o empalman $\geq 2d_b$ y recubrimiento libre d_b.	Igual que arriba	Igual que arriba
Otros casos	$\frac{l_d}{d_b} = \frac{3 f_y \alpha \beta \lambda}{50\sqrt{f'_c}}$	$\frac{l_d}{d_b} = \frac{3 f_y \alpha \beta \lambda}{40\sqrt{f'_c}}$

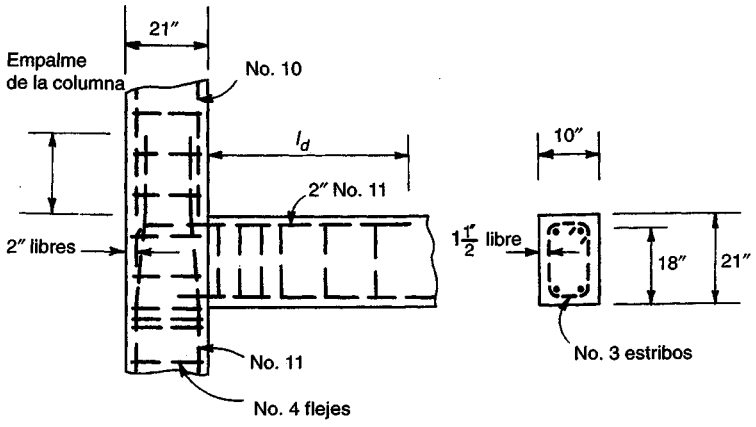


FIGURA 5.8
Despiece de las barras en una unión viga-columna, para los ejemplos de longitud de desarrollo de las barras.

fácilmente para las combinaciones usuales de resistencia de materiales, barras inferiores o superiores y para las restricciones en espaciamiento de las barras, recubrimientos y acero transversal definido†. Los resultados se dan en la tabla A.11 del apéndice A.

Independientemente de si la longitud de desarrollo se calcula utilizando la ecuación básica (5.3) o las ecuaciones aproximadas (5.4*a*) y (5.4*b*), la longitud de desarrollo puede reducirse cuando el refuerzo de un elemento a flexión es superior al requerido por análisis, excepto cuando se requiere específicamente anclaje o desarrollo para f_y o cuando el refuerzo se diseña en una zona de alta amenaza sísmica. Según el Código ACI, la reducción se realiza de acuerdo con la relación (A_s requerida/A_s, suministrada).

Ejemplo 5.1. Longitud de desarrollo a tensión. La figura 5.8 presenta una unión viga-columna en un pórtico continuo de un edificio. Con base en el análisis de pórtico, el acero negativo requerido en el extremo de la viga es 2.90 pulg^2; se utilizan dos barras No 11, que proporcionan un A_s = 3.12 pulg^2. Las dimensiones de la viga son b = 10 pulgadas, d = 18 pulgadas y h = 21 pulgadas. El diseño incluirá estribos No. 3 espaciados de 4 a 3 pulgadas, seguidos por un espaciamiento constante de 5 pulgadas en la zona de apoyo, con un recubrimiento libre de 1.5 pulgadas. Se utilizará concreto de densidad normal con f'_c = 4000 lb/pulg^2 y refuerzo con f_y = 60,000 lb/pulg^2. Determine la distancia mínima l_d para la cual las barras negativas pueden interrumpirse, con base en el desarrollo del área de acero requerida en la cara de la columna (*a*) utilizando las ecuaciones simplificadas de la tabla 5.1; (*b*) utilizando la tabla A.11, del apéndice A, y (*c*) utilizando la ecuación básica (5.3).

Solución Al revisar el espaciamiento lateral de las barras No. 11 se encuentra que la distancia libre entre barras es 10 – 2(1.50 + 0.38 +1.41) = 3.42 pulgadas o 2.43 veces el diámetro de la barra d_b. El recubrimiento libre de las barras No. 11 hasta la cara lateral de la viga es 1.50 + 0.38 = 1.88 pulg, o 1.33 diámetros de barra, y aquélla hasta la parte superior de la viga es 3.00 – 1.41/2 = 2.30 pulgadas, o 1.63 diámetros de barra. Las ecuaciones cumplen las restricciones establecidas en la segunda fila de la tabla 5.1. Entonces, para las barras superiores no recubiertas y utilizando concreto de densidad normal, se tienen los valores de α = 1.3, β = 1.0 y λ = 1.0, a partir de la tabla 5.1:

$$\frac{l_d}{d_b} = \frac{60{,}000 \times 1.3 \times 1.0 \times 1.0}{20\sqrt{4000}} = 62$$

y la longitud de desarrollo es l_d = 62 × 1.41 = 87 pulgadas. Este valor puede reducirse por la relación del acero requerido a aquél suministrado, de manera que la longitud de desarrollo final es 87 × 2.90/3.12 = 81 pulgadas.

† Observe que por conveniencia se utiliza el término de barra superior para cualquier barra de refuerzo horizontal colocada con más de 12 pulgadas de concreto fresco fundido por debajo de la longitud de desarrollo o empalme. Esta definición puede exigir que barras relativamente cercanas a la parte inferior de elementos altos deben tratarse como barras superiores.

Alternativamente, a partir de la parte inferior de la tabla A11, $l_d/d_b = 62$. La longitud requerida hasta el punto de corte es $62 \times 1.41 \times 2.90/3.12 = 81$ pulg como antes.

Se utilizará ahora la ecuación más precisa (5.3). El desplazamiento de centro a centro dentro de las barras No. 11 es $10 - 2(1.50 + 0.38 + 1.41/2) = 4.83$, la mitad de lo cual es 2.42 pulgadas. El recubrimiento lateral hasta el centro de la barra es $1.50 + 0.38 + 1.41/2 = 2.59$ pulgadas y el recubrimiento superior es 3.00 pulgadas. La más pequeña de estas tres controla, y $c = 2.42$ pulgadas. El fracturamiento potencial ocurriría en el plano horizontal de las barras y en el cálculo de A_{tr} se utiliza dos veces el área de la barra de los estribos†. Con base en los estribos No. 3 espaciados a 5 pulgadas:

$$K_{tr} = \frac{0.11 \times 2 \times 60{,}000}{1500 \times 5 \times 2} = 0.88 \qquad \text{y} \qquad \frac{c + K_{tr}}{d_b} = \frac{2.42 + 0.88}{1.41} = 2.34$$

Este valor es menor que el valor límite de 2.5. Entonces, a partir de la ecuación (5.3):

$$\frac{l_d}{d_b} = \frac{3 \times 60{,}000 \times 1.3}{40\sqrt{4000} \times 2.34} = 40$$

y la longitud de desarrollo requerida es $40 \times 1.41 \times 2.90/3.12 = 52$ pulgadas en lugar del valor de 81 pulgadas ya determinado. Claramente la utilización de la ecuación más precisa 5.3 permite una reducción considerable de la longitud de desarrollo. Aunque su uso exige mucho más tiempo y esfuerzo, ésta queda justificada si el diseño se repite muchas veces en la estructura.

5.4 ANCLAJE DE BARRAS SOMETIDAS A TENSIÓN MEDIANTE GANCHOS

a. Dimensiones estándar

Para el caso en que el esfuerzo de tensión deseado en la barra no pueda desarrollarse únicamente por adherencia, es necesario suministrar anclaje especial en los extremos de la barra, a menudo con ganchos a 90° o a 180°. Las dimensiones y radios de doblamiento para estos ganchos se han estandarizado en el Código ACI 7.1, como sigue (ver la figura 5.9):

1. Un doblez a 180° más una extensión mínima de longitud igual a 4 diámetros de barra, pero no menor que $2\frac{1}{2}$ pulg en el extremo libre de la barra, o
2. Un doblez a 90° más una extensión mínima de longitud igual a 12 diámetros de barra en el extremo libre de la barra, o
3. Para el anclaje de estribos y flejes solamente:
   (*a*) Para barras No. 5 y menores, un doblez a 90° más una extensión mínima de longitud igual a 6 diámetros de barra en el extremo libre de la barra, o
   (*b*) Para barras Nos. 6, 7 y 8, un doblez a 90° más una extensión mínima de longitud igual a 12 diámetros de barra en el extremo libre de la barra, o
   (*c*) Para barras No. 8 y menores, un doblez a 135° más una extensión mínima de longitud igual a 6 diámetros de barra en el extremo libre de la barra.

El diámetro mínimo de doblamiento medido en la parte interior de la barra para ganchos estándar diferentes de los de estribos o flejes de tamaño No. 3 hasta el No. 5, no debe ser menor que los valores dados en la tabla 5.2. Para ganchos de estribos y flejes con barras No. 5 y menores, el diámetro interior de doblamiento no debe ser menor que 4 diámetros de barra, según el Código ACI.

Cuando se utilizan mallas electrosoldadas de alambre (con alambre liso o corrugado) para estribos o flejes, el diámetro interior de doblamiento no debe ser menor que 4 diámetros de

† Si hubiese controlado el recubrimiento superior, el plano de fracturamiento potencial sería vertical y se hubiese utilizado una vez el área de la barra del estribo en el cálculo de A_{tr}.

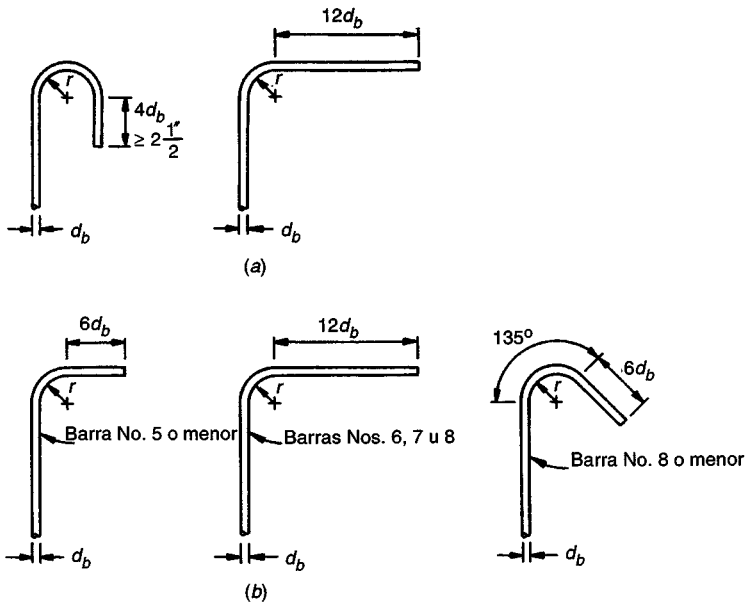


FIGURA 5.9
Ganchos estándar para barras: (*a*) refuerzo principal; (*b*) estribos y flejes.

TABLA 5.2
Diámetros mínimos de doblamiento para ganchos estándar

Denominación de la barra	Diámetro mínimo
Nos. 3 a 8	6 diámetros de barra
Nos. 9, 10 y 11	8 diámetros de barra
Nos. 14 y 18	10 diámetros de barra

alambre si éste es corrugado y de diámetro mayor al calibre D6, y que 2 diámetros de alambre para todos los demás. Dobleces con diámetros interiores menores que 8 diámetros de alambre no deben estar a distancias menores que 4 diámetros de alambre desde la intersección soldada más cercana.

b. Longitud de desarrollo y factores de modificación para barras con ganchos

Las barras con ganchos se resisten a ser extraídas del concreto mediante la acción combinada de la adherencia a lo largo de la longitud recta de la barra que llega hasta el gancho y de anclaje directo provisto por el mismo. Los ensayos indican que la principal causa de falla de las barras con ganchos sometidos a tensión es el fracturamiento del concreto en el plano del gancho. Este fracturamiento se produce por los esfuerzos muy altos en el concreto dentro del gancho; estos esfuerzos están influidos en especial por el diámetro de la barra d_b para determinada fuerza de tensión y por el radio de la barra doblada. Se ha encontrado que la resistencia al fracturamiento depende del recubrimiento de concreto para la barra con gancho, medida lateralmente desde el borde del elemento hasta la barra, en dirección perpendicular al plano del gancho, y medida desde el punto donde éste empieza hasta la parte superior (o inferior) del elemento, en dirección paralela al plano del gancho. Si se requiere que estas distancias sean pequeñas, la resistencia del anclaje puede aumentarse sustancialmente proporcionando acero de confinamiento mediante estribos cerrados o flejes.

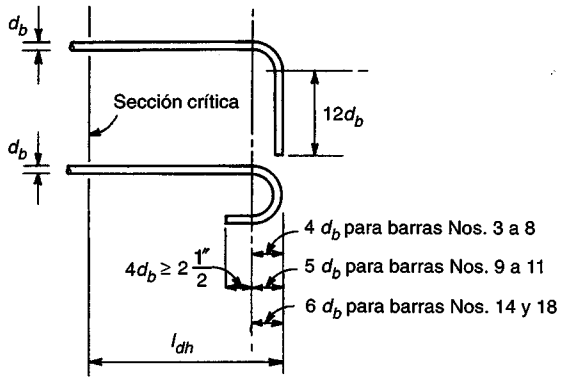


FIGURA 5.10
Detalles del refuerzo para el desarrollo de ganchos estándar.

Las disposiciones del Código ACI 12.5 para barras con ganchos sometidas a tensión se fundamentan en las investigaciones descritas en las referencias 5.8 y 5.9. Los requisitos del Código tienen en cuenta la contribución combinada de la adherencia a lo largo de la parte recta de la barra que llega hasta el gancho, más el anclaje que suministra el gancho. Se define una longitud de desarrollo total l_{dh} como se ilustra en la figura 5.10, que se mide desde la sección crítica hasta el punto más lejano de la barra, en dirección paralela a la parte recta de la barra. Según la figura 5.9, la longitud básica de desarrollo para barras con ganchos estándar de f_y = 60,000 lb/pulg^2 es

$$l_{hb} = \frac{1200 d_b}{\sqrt{f'_c}} \tag{5.5}$$

La longitud de desarrollo básica debe multiplicarse por el factor o los factores de modificación aplicables que se resumen en la tabla 5.3 para determinar la longitud de desarrollo l_{dh}, que debe utilizarse en el diseño. Estos factores se combinan según su aplicabilidad; es decir, si se proporciona un recubrimiento lateral de por lo menos de $2\frac{1}{2}$ pulg para ganchos de 180°, y si además se colocan flejes, la longitud básica de desarrollo se multiplica por el producto de 0.7 y 0.8. En cualquier caso, la longitud l_{dh} no debe ser menor que 8 diámetros de barra ni menor que 6 pulg.

El acero de confinamiento transversal es esencial cuando se desea desarrollar la resistencia completa de la barra en situaciones en que haya un confinamiento mínimo de concreto, por ejemplo, cuando se requieren ganchos en los extremos de una viga simplemente apoyada (ver la figura 5.11) o cuando una viga de una estructura continua empata con una columna de borde y no continúa más allá de ésta (ver la referencia 5.11). Conforme al Código ACI 12.5.4, para barras con ganchos en los extremos discontinuos de elementos con recubrimientos, tanto lateral como superior e inferior, menores que $2\frac{1}{2}$ pulg, como se ilustra en la figura 5.11, los ganchos *deben* encerrarse con estribos cerrados o flejes a lo largo de toda la longitud de desarrollo. El espaciamiento del acero de confinamiento no debe exceder tres veces el diámetro de la barra con gancho. En estos casos no puede aplicarse el factor 0.8 de la tabla 5.3.

c. Anclajes mecánicos

En algunos casos especiales, por ejemplo en los extremos del refuerzo a flexión principal en vigas de gran altura, no hay espacio suficiente para los ganchos o para el acero necesario de confinamiento y deben utilizarse dispositivos especiales de anclaje mecánico. Éstos pueden ser platinas soldadas o dispositivos fabricados que deben someterse a ensayos para determinar si son adecua-

TABLA 5.3
Longitudes de desarrollo para barras corrugadas a tensión que terminan en ganchos

A.	Longitud de desarrollo básica l_{hb} para barras con ganchos con f_y = 60,000 lb/pulg²	$\frac{1200 d_b}{\sqrt{f'_c}}$
B.	Factores de modificación que deben aplicarse a l_{hb}	
	Barras con f_y diferente de 60,000 lb/pulg²	$\frac{f_y}{60{,}000}$
	Para barras No. 11 y menores, con recubrimiento lateral no menor que $2\frac{1}{2}$ y para ganchos a 90° con recubrimiento en la extensión después del gancho no menor que 2 pulg.	0.7
	Para barras No. 11 y menores, cuando el gancho está rodeado vertical y horizontalmente por flejes o estribos a todo lo largo de la longitud de desarrollo l_{dh}, con un espaciamiento no mayor que $3d_b$	0.8
	Refuerzo en exceso con respecto al requerido por análisis	$\frac{A_s \text{ requerido}}{A_s \text{ suministrado}}$
	Concreto con agregados livianos	1.3
	Ganchos en barras con recubrimiento epóxico	1.2

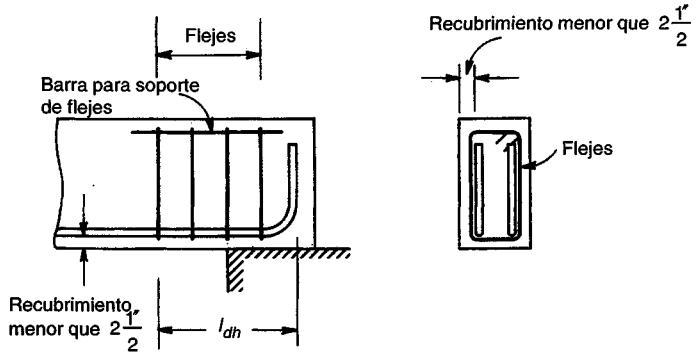


FIGURA 5.11
Requisitos de refuerzo transversal en extremos discontinuos de elementos con recubrimientos pequeños.

dos. Cuando se utilizan estos dispositivos, el desarrollo del refuerzo puede obtenerse combinando la contribución de la adherencia a lo largo de la longitud de la barra que llega hasta la sección crítica con la dada por el anclaje mecánico; es decir, la resistencia total es la suma de las dos partes.

Ejemplo 5.2. Desarrollo de barras con ganchos sometidas a tensión. Con referencia a la unión viga-columna ilustrada en la figura 5.8, las barras negativas No.11 deben extenderse dentro de la columna y terminar en un gancho estándar a 90°, manteniendo una distancia libre de 2 pulg hasta la cara externa de la columna. El ancho de la columna en dirección del ancho de la viga es 16 pulg. Determine la longitud mínima que debe empotrarse el gancho desde la cara de la columna y especifique los detalles del gancho.

Solución. La longitud de desarrollo básica para las barras con gancho, medida a lo largo de la barra desde la sección crítica hasta la cara más alejada del gancho vertical, está determinada por la ecuación (5.5):

$$l_{hb} = \frac{1200 \times 1.41}{\sqrt{4000}} = 27 \text{ pulg}$$

En este caso, el recubrimiento lateral para las barras No.11 sobrepasa las 2.5 pulg y el recubrimiento más allá de la barra doblada es adecuado, de manera que puede aplicarse un factor de modificación de 0.7. El único factor adicional aplicable es el correspondiente a refuerzo en exceso que resulta igual a 0.93, lo mismo que en el ejemplo 5.1. De acuerdo con esto, la longitud de desarrollo mínima para las barras con gancho es:

$$L_{dh} = 27 \times 0.7 \times 0.93 = 18 \text{ pulg}$$

Con una distancia disponible de 21 – 2 = 19 pulg, la longitud requerida está dentro de la columna. El gancho debe doblarse con un diámetro mínimo de 8 × 1.41 = 11.28 pulg; se especifica entonces un radio de doblamiento de 6 pulg. La barra continuará en la dirección vertical con una longitud de 12 diámetros de barra, o sea, 17 pulg más allá del final del doblez.

5.5 REQUISITOS DE ANCLAJE PARA REFUERZO EN EL ALMA

Los estribos deben llevarse tan cerca como sea posible de las caras a compresión y a tensión de la viga y debe darse especial atención a un anclaje apropiado. El modelo de armadura (ver la sección 4.8 y la figura 4.18) para el diseño del refuerzo a cortante sugiere el desarrollo de puntales a compresión en diagonal, cuyas fuerzas se equilibran cerca de las partes superior e inferior de la viga con las fuerzas de los elementos en el alma que están sometidos a tensión (es decir, los estribos). Así que, para el estado de cargas mayoradas, los estribos deben generar su resistencia a la tensión para casi toda su altura. Es evidente que esto resulta imposible de lograr con la longitud de desarrollo, razón por la cual normalmente se colocan ganchos a 90° o 135° en el extremo superior de los estribos (ver la figura 5.9*b* para los detalles del gancho estándar) y en la parte inferior se doblan a 90° para pasar alrededor del refuerzo longitudinal. Para luces simples o en la zona de flexión positiva de luces continuas, donde no se requieren barras superiores para los efectos de la flexión, tienen que utilizarse barras de apoyo para los estribos. Éstas son con frecuencia de los mismos diámetros que los estribos y no sólo mejoran el anclaje de los ganchos, sino que también facilitan la fabricación del cajón de refuerzo manteniendo los estribos en su posición durante el vaciado del concreto.

El Código ACI 12.13 incluye disposiciones especiales para el anclaje del refuerzo en el alma. Los extremos de los estribos de una sola rama, con forma simple en U o estribos múltiples en U deben anclarse mediante alguno de los siguientes métodos:

1. Para barras No. 5 y menores y para barras Nos. 6, 7 y 8 con f_y de 40,000 lb/pulg^2 o menos, un gancho estándar alrededor del refuerzo longitudinal, como se ilustra en la figura 5.12*a*.
2. Para estribos Nos. 6, 7 y 8 con f_y mayor que 40,000 lb/pulg^2, un gancho estándar alrededor de la barra longitudinal más un empotramiento entre la mitad de la altura del elemento y el extremo externo del gancho igual o mayor que $0.014 d_b f_y/\sqrt{f'_c}$ pulg, como se muestra en la figura 5.12*b*.

El Código ACI 12.13 especifica, además, que entre los extremos anclados, cada doblez en el tramo continuo de un estribo en forma de U simple o múltiple, debe encerrar una barra longitudinal como se indica en la figura 5.12*c*. Las barras longitudinales dobladas para actuar como refuerzo a cortante, si se extienden dentro de una región sometida a tensión, deben ser continuas con el refuerzo longitudinal y, si se extienden dentro de una región sometida a compresión, deben anclarse cuando pasen de la mitad de la altura $d/2$ como se especifica para la longitud de desarrollo. Parejas de estribos en U o de flejes, colocadas de manera que formen una unidad cerrada, pueden considerarse como adecuadamente empalmadas cuando se deje una longitud de traslapo de $1.3l_d$, como se ilustra en la figura 5.12*d*.

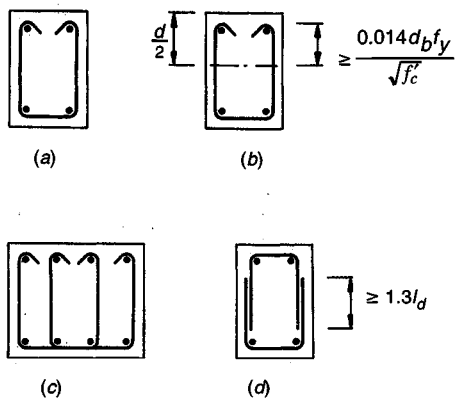


FIGURA 5.12
Requisitos del ACI para anclaje de estribos: (*a*) estribos No. 5 y menores y estribos Nos. 6, 7 y 8 con f_y mayor que 40,000 lb/pulg^2; (*b*) estribos Nos. 6, 7 y 8 con esfuerzo de fluencia mayor que 40,000 lb/pulg^2; (*c*) viga ancha con estribos en U de ramas múltiples; (*d*) pares de estribos en U formando una unidad cerrada. Ver la figura 5.9 para los detalles opcionales del gancho estándar.

El Código ACI incluye otras disposiciones relacionadas con la utilización de mallas electrosoldadas de alambre que se utilizan en algunos casos para refuerzo en el alma de vigas de concreto prefabricadas y preesforzadas.

5.6 MALLAS ELECTROSOLDADAS DE ALAMBRE

Las mallas electrosoldadas de alambre corrugado o liso se utilizan comúnmente como refuerzo a tensión para losas en una o dos direcciones y para otros tipos de elementos (ver la sección 2.14). Para mallas de alambre *corrugado*, una parte del anclaje se asigna a los alambres soldados que se cruzan y otra parte a la longitud de desarrollo del alambre corrugado. Según el Código ACI 12.7, la longitud de desarrollo básica para mallas de alambre corrugado, medida desde la sección crítica hasta el extremo del alambre, se calcula como el producto de la longitud de desarrollo l_d de la tabla 5.1, o a partir de la ecuación (5.3) que resulta más precisa, y de los factores de modificación apropiados relacionados con esta ecuación, excepto que para el factor de recubrimiento con epóxico β debe tomarse un valor de 1.0 y la longitud de desarrollo no debe ser menor que 8 pulg. Adicionalmente, para mallas electrosoldadas de alambre corrugado con al menos un alambre transversal dentro de la longitud de desarrollo y a no menos de 2 pulgadas desde el punto de la sección crítica, puede aplicarse en *factor de malla de alambre* igual al mayor entre

$$\frac{f_y - 35{,}000}{f_y} \tag{5.6a}$$

o

$$\frac{5d_b}{s_w} \tag{5.6b}$$

donde s_w es el espaciamiento lateral de los alambres que deben anclarse; este factor no necesita ser mayor que 1.0. Para mallas electrosoldadas de alambre corrugado sin alambres transversales dentro de la longitud de desarrollo o con un solo alambre transversal a menos de 2 pulgadas del punto de la sección crítica, el factor de malla de alambre debe tomarse igual a 1.0 y la longitud de desarrollo debe determinarse como aquélla correspondiente al alambre corrugado.

Para mallas de alambre *liso* se considera que dos alambres transversales, con el alambre más cercano a no menos de 2 pulgadas de la sección crítica, proporcionan el anclaje necesario para el

desarrollo. Sin embargo la longitud de desarrollo medida desde la sección crítica hasta el alambre transversal más externo, no debe ser menor que

$$l_d = 0.27\frac{A_w f_y}{s_w\sqrt{f'_c}} \tag{5.7}$$

conforme al Código ACI 12.8, donde A_w es el área de la sección transversal de un alambre individual que debe desarrollarse o empalmarse. Pueden aplicarse los factores de modificación relacionados con refuerzo en exceso y con concretos livianos, pero l_d no debe ser menor que 6 pulg para las mallas de alambre liso.

5.7 DESARROLLO DE BARRAS A COMPRESIÓN

En varias circunstancias puede ser necesario que el refuerzo desarrolle su resistencia a la compresión por empotramiento; por ejemplo, cuando las barras de las columnas transfieren su parte de la carga a la zapata de apoyo o cuando se hacen empalmes traslapados con barras a compresión en columnas (ver la sección 5.11). Para el caso de barras a compresión, una parte de la fuerza total se transfiere por adherencia a lo largo de la longitud de desarrollo y otra parte se transfiere por apoyo de los extremos de las barras sobre el concreto. Puesto que el concreto circundante está relativamente libre de grietas, y gracias al efecto benéfico del apoyo del extremo, se permiten longitudes básicas de desarrollo menores para barras a compresión que para barras a tensión. Si existe acero de confinamiento transversal, como refuerzo en espiral en columnas o acero en espiral especial alrededor de barras individuales, puede reducirse más la longitud de desarrollo para las barras a compresión con respecto a las de tensión. Ganchos como los que aparecen en la figura 5.9 *no son* efectivos para transferir las fuerzas de compresión de las barras al concreto y, si están presentes por alguna otra razón, no deben tenerse en cuenta cuando se determine la longitud requerida de empotramiento.

La ecuación para la longitud de desarrollo básica de barras en compresión (Código ACI 12.3) es

$$l_{db} = \frac{0.02 d_b f_y}{\sqrt{f'_c}} \tag{5.8}$$

pero no menor que $0.0003\, d_b f_y$. Los factores de modificación que se resumen en la parte B de la tabla 5.4 se aplican, según corresponda, a la longitud de desarrollo básica de barras a compresión para obtener la longitud de desarrollo l_d que debe utilizarse en el diseño. Según el Código ACI, en ningún caso l_d debe ser menor que 8 pulg. Las longitudes de desarrollo básicas y modificadas para barras a compresión están determinadas en la tabla A. 12 del apéndice A.

TABLA 5.4
Longitudes de desarrollo para barras corrugadas a compresión

A.	Longitud de desarrollo básica l_{db}	$\frac{0.02 d_b f_y}{\sqrt{f'_c}}$ pero $\geq 0.0003 d_b f_y$
B.	Factores de modificación que deben aplicarse a l_{db}	
	Refuerzo en exceso con respecto al requerido por análisis	$\frac{A_s \text{ requerido}}{A_s \text{ suministrado}}$
	Refuerzo encerrado con refuerzo en espiral, con diámetro no menor que 1/4 de pulg y con un paso no mayor que 4 pulg o encerrado por flejes No. 4 espaciados no más que 4 pulg entre centros	0.75

5.8 BARRAS EN PAQUETE

Como se indicó en la sección 3.6c, resulta ventajoso en algunos casos "empaquetar" el refuerzo a tensión de vigas grandes en dos, tres o cuatro barras en contacto, con el fin de mejorar el vaciado del concreto alrededor y entre los paquetes de barras. Los paquetes de barras comunes tienen formas triangulares o de L cuando son de tres barras, y cuadradas cuando se utilizan cuatro. Cuando se cortan barras de un paquete de éstas, los puntos de corte de las barras individuales deben escalonarse a distancias por lo menos de 40 diámetros. La longitud de desarrollo de las barras individuales dentro de un paquete, tanto para tensión como para compresión, es la de la barra individual aumentada en un 20 por ciento para paquetes de tres barras y en 33 por ciento para paquetes de cuatro barras, con el fin de tener en cuenta la posible deficiencia de la adherencia en el interior del grupo de barras.

5.9 PUNTOS DE CORTE Y DOBLAMIENTO DE BARRAS EN VIGAS

En el capítulo 3 se analizaron los momentos, los esfuerzos de flexión, las dimensiones de la sección de concreto y las áreas de las barras longitudinales en las secciones críticas a momento de vigas. Estas secciones críticas a momento están ubicadas, por lo general, en la cara de los apoyos (flexión negativa) y cerca del centro de la luz (flexión positiva). Ocasionalmente se utilizan elementos acartelados con altura o ancho variables, de manera que la capacidad a flexión del concreto coincida mejor con la variación del momento flector a lo largo de la luz o de la serie de luces. Sin embargo, a menudo, se usan vigas prismáticas con dimensiones constantes de la sección transversal de concreto para simplificar el trabajo de formaletería y reducir así los costos.

Por otro lado, las necesidades de acero pueden variarse fácilmente de acuerdo con los requisitos para flexión, y es práctica común, bien sea cortar las barras donde no se requieran más para resistir los esfuerzos o, en algunos casos de vigas continuas, doblar hacia arriba el acero inferior (usualmente a 45°) de modo que éste sirva como refuerzo a tensión en la parte superior de la viga en los puntos de apoyo.

a. Puntos teóricos de corte o doblamiento

La fuerza de tensión que debe resistir el refuerzo en cualquier sección transversal es

$$T = A_s f_s = \frac{M}{z}$$

donde M es el valor del momento flector en esa sección y z es el brazo de palanca interno del momento resistente. El brazo de palanca z varía apenas dentro de límites muy estrechos y nunca es menor que el valor en la sección de máximo momento. En consecuencia, la fuerza de tensión puede suponerse con buena precisión como directamente proporcional al momento flector. Puesto que es conveniente diseñar de manera que el acero a lo largo de toda la viga esté lo más esforzado posible, se puede concluir que el área necesaria de acero es casi proporcional al momento flector.

Para ilustrar lo anterior se puede utilizar el diagrama de momentos para la viga de una sola luz cargada uniformemente que se presenta en la figura 5.13*a*, como un diagrama de requisito del acero. Para la sección de máximo momento se necesita el cien por ciento del acero a tensión (se puede descontinuar o doblar el cero por ciento) mientras que en los apoyos, se requiere teóricamente el cero por ciento del acero (el cien por ciento puede descontinuarse o doblarse). El porcentaje de barras que pueden descontinuarse en otros puntos a lo largo de la luz se obtiene en forma directa a partir del diagrama de momento delineado a escala. Para facilitar la determinación de los puntos de corte o doblamiento para luces simples se ha preparado el gráfico A.2 del apéndice A. Éste representa la mitad del diagrama de momentos para una luz simple cargada de modo uniforme.

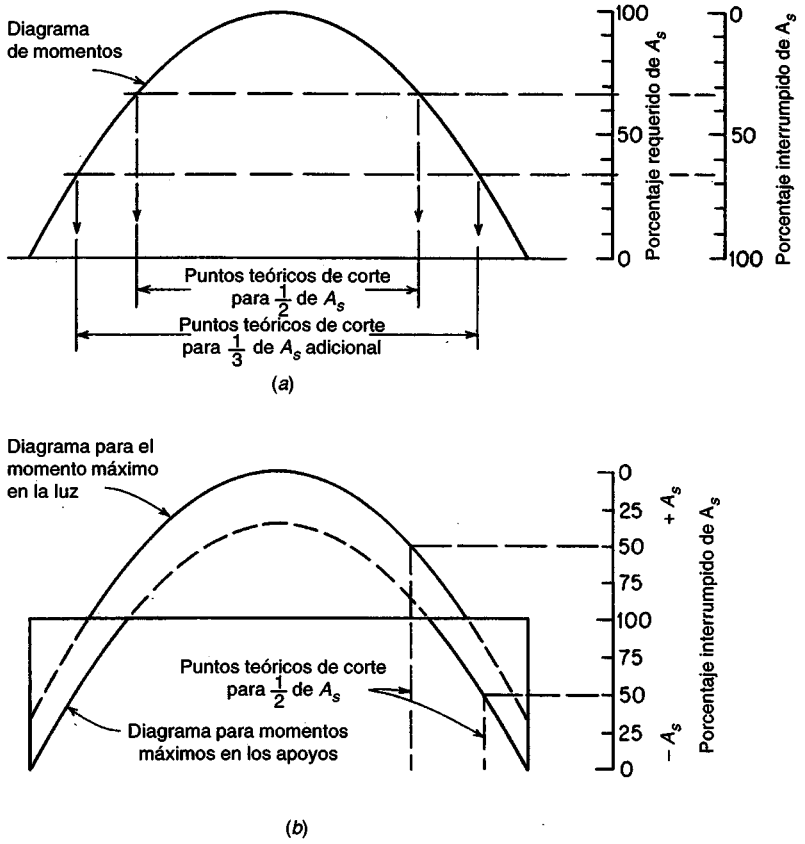


FIGURA 5.13
Puntos de corte de barras a partir de los diagramas de momento.

Para determinar los puntos de corte y doblamiento para vigas continuas, se esquematizan los diagramas de momento resultantes de las distribuciones de carga que producen máximos momentos en la luz y en el apoyo. Lo anterior produce una envolvente de momentos que define el intervalo de valores de momento en cualquier sección. Los puntos de corte o doblamiento pueden determinarse a partir de la curva apropiada de momento como en el caso de luces simples. La figura 5.13*b* ilustra, por ejemplo, una viga continua con una envolvente de momentos producto de la aplicación de cargas alternas para producir los momentos máximos en la luz y en los apoyos. En la figura se indica la localización de los puntos para los cuales, en teoría, puede descontinuarse el 50 por ciento del acero superior e inferior.

De acuerdo con el Código ACI 8.3, las vigas continuas de concreto reforzado, uniformemente cargadas y con luces casi uniformes, pueden diseñarse utilizando coeficientes de momento (ver la tabla 11.1). Estos coeficientes, análogos a las constantes numéricas en la expresión $\frac{1}{8}wL^2$ para el máximo momento flector en vigas simples, dan una aproximación conservadora de los momentos en la luz y en los apoyos para vigas continuas. Cuando se utilizan estos coeficientes en el diseño, los puntos de doblamiento pueden determinarse en forma conveniente a partir del gráfico A.3 del apéndice A. Las curvas de momento, correspondientes a los diferentes coeficientes de momento en la luz y en los apoyos, están determinadas en la parte superior e inferior de la gráfica, respectivamente.

De otra parte, si los momentos se determinan mediante un análisis de pórtico, en vez de utilizar los coeficientes de momento del Código ACI, la localización a lo largo de la luz donde el momento flector se reduce a cualquier valor particular (por ejemplo, en el caso en que se recortan barras de un grupo) o el valor cero, se calcula fácilmente mediante estática.

b. Aspectos prácticos y requisitos del Código ACI

En realidad, en ningún caso el acero de tensión debe descontinuarse en el punto teórico descrito. Como se expone en la sección 4.4 y en la figura 4.9, cuando se forman grietas de tensión diagonal se presenta una redistribución interna de las fuerzas en la viga. Antes del agrietamiento, la fuerza de tensión en el acero en cualquier punto es proporcional al momento en la sección vertical que pasa por este punto. Sin embargo, una vez que se forma la grieta, la fuerza de tensión en el acero en la grieta es controlada por el momento en una sección más cercana al centro de la luz, que puede ser mucho mayor. Además, el diagrama de momento real puede diferir del utilizado como base del diseño, por la aproximación en las cargas reales, por las aproximaciones analíticas, o por el efecto superpuesto de asentamientos o cargas laterales. Según esto, el Código ACI 12. 10 exige que todas las barras deben extenderse una distancia por lo menos igual a la altura efectiva de la viga o a 12 diámetros de la barra (la mayor) más allá del punto en el cual, en teoría, ya no se requiere para resistir esfuerzos.

Asimismo, es necesario que el esfuerzo calculado en el acero en cada sección pueda desarrollarse mediante una longitud adecuada de empotramiento o un anclaje en el extremo, o una combinación de los dos. Para el caso frecuente en que no se utiliza anclaje especial en el extremo de la barra, debe dejarse la longitud completa de desarrollo l_d más allá de las secciones críticas que presentan esfuerzos picos en las barras. Estas secciones críticas están localizadas en los puntos de momento máximo y en aquéllos donde el refuerzo adyacente interrumpido no se requiere más para resistir la flexión†.

Además de cubrir la posibilidad de un cambio en la ubicación del esfuerzo pico, el Código ACI 12.11 exige que por lo menos un tercio del acero para momento positivo (un cuarto para luces continuas) debe continuarse sin interrupción a lo largo de la misma cara de la viga y debe penetrar en el apoyo una distancia por lo menos igual a 6 pulg. Cuando un elemento a flexión es parte de un sistema principal de resistencia a cargas laterales, se requiere que el refuerzo para momento positivo se extienda dentro del apoyo y quede anclado en forma que permita desarrollar la resistencia a la fluencia de las barras en la cara del apoyo, para tener en cuenta así la posibilidad de la inversión de los momentos en los apoyos. Según el Código ACI 12.12, por lo menos un tercio del refuerzo total suministrado para momento negativo en el apoyo debe extenderse una distancia por lo menos igual a un dieciseisavo de la luz libre, o d, o $12d_b$, la mayor, más allá de la posición extrema del punto de inflexión.

Los requisitos para la localización de puntos de corte de barras o de doblamiento se resumen en la figura 5.14. Si se van a cortar las barras negativas L, éstas deben extenderse una longitud completa de desarrollo l_d más allá de la cara del apoyo. Asimismo, deben prolongarse una distancia d o $12d_b$ más allá del punto teórico de corte definido con el diagrama de momento. Las barras negativas restantes M (por lo menos un tercio del área negativa total) deben extenderse por lo menos l_d más allá del punto teórico de corte de las barras L y también deben prolongarse una distancia d, $12d_b$ o $l_n/16$ (la que sea mayor) más allá del punto de inflexión del diagrama de momento negativo.

Si se van a cortar las barras positivas N, éstas deben proyectarse una longitud l_d más allá del punto de máximo momento teórico, al igual que d o $12d_b$ más allá del punto de corte determinado a partir del diagrama de momento positivo. Las restantes barras positivas O deben extenderse una longitud l_d más allá del punto teórico de corte de las barras N y entrar por lo menos 6 pulg desde la cara del apoyo.

† El Código ACI es ambiguo con referencia a si la longitud de extensión d o $12d_b$ debe sumarse a la longitud requerida de desarrollo l_d. El comentario del Código presenta un punto de vista según el cual estos requisitos no tienen que superponerse y la figura 5.14 se ha preparado con base en éste. Sin embargo, la argumentación presentada anteriormente, relacionada con el posible desplazamiento de las curvas de momento o de las curvas de distribución del refuerzo del acero, lleva a la conclusión de que estos requisitos deben superponerse. En estos casos, cada barra se debe continuar una distancia l_d más la mayor entre d y 12 d_b, más allá del punto de máximo esfuerzo.

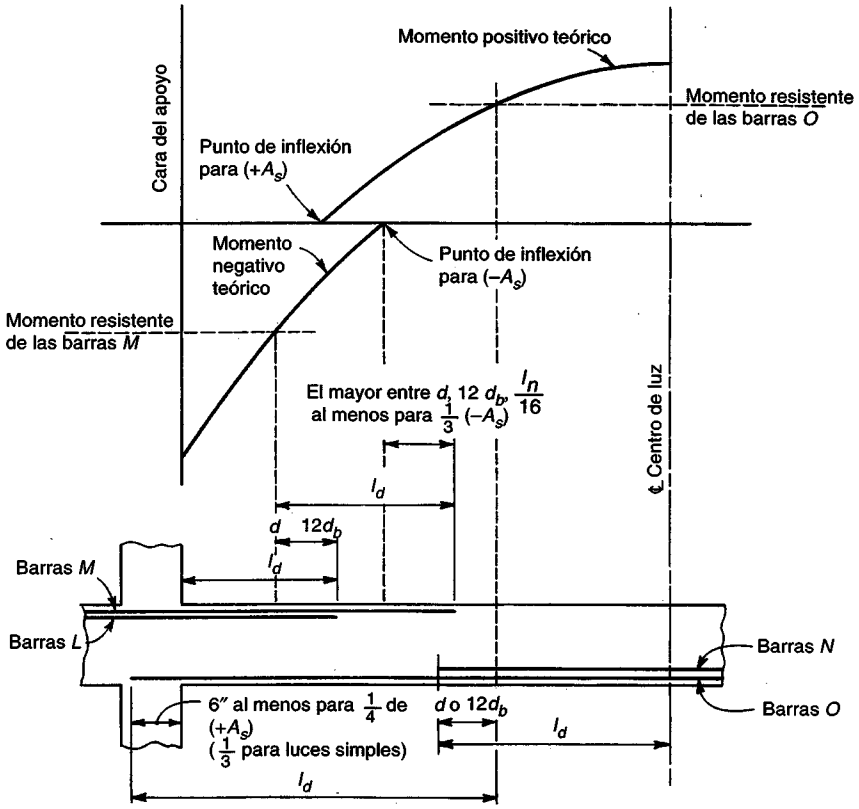


FIGURA 5.14
Requisitos del Código ACI para el corte de barras.

Cuando se recortan barras en zonas a tensión, existe una tendencia hacia la formación de grietas prematuras de flexión y de tensión diagonal en la vecindad del extremo cortado. Esto puede generar una reducción de la capacidad a cortante y una pérdida de la ductilidad global de la viga. El Código ACI 12.10 exige algunas precauciones especiales, que especifican que ninguna barra de flexión puede terminarse en una zona a tensión *a menos que* se satisfaga una de las siguientes condiciones:

1. El cortante no está por encima de los dos tercios del que se permite normalmente, incluyendo la participación del refuerzo a cortante si existe.
2. Se colocan estribos en exceso con respecto a los que por lo general se exigen, a lo largo de una distancia igual a $\frac{3}{4}d$ más allá de cada barra interrumpida y medida desde el punto de corte. Estos estribos "de unión" deben suministrar un área A_v tal que $A_v f_y / b_w s$ no sea menor que 60 lb/pulg^2. Asimismo, el espaciamiento de los estribos no debe exceder $d/8\beta_b$, donde β_b es la relación entre el área de las barras cortadas y el área total de las barras en la sección.
3. Las barras que continúan, si son No. 11 o menores, suministran el doble del área requerida a flexión en ese punto y el cortante no excede tres cuartos del valor permitido.

Como alternativa al corte del acero, las barras de tensión pueden anclarse doblándolas a través del alma y haciéndolas continuas con el refuerzo en la cara opuesta. Aunque esto acarrea dificultades en el despiece y en la colocación del acero, que además incrementa los costos de construcción, algunos ingenieros prefieren esta distribución por la seguridad adicional que se logra contra la propagación de grietas de tensión diagonal. En algunos casos, en particular para vigas de

relativa gran altura, en las cuales un alto porcentaje del acero total en la parte inferior debe doblarse, puede ser imposible localizar el punto de doblamiento para las barras inferiores lo suficientemente lejos del apoyo como para que las mismas barras cumplan los requisitos del acero superior. Los puntos teóricos de doblamiento deben revisarse de manera cuidadosa, tanto para el acero inferior como para el superior.

Puesto que la determinación de los puntos de corte o doblamiento puede ser ostensiblemente tediosa, en particular para pórticos analizados mediante métodos elásticos en vez de hacerlo con los coeficientes de momento, muchos diseñadores especifican los puntos de corte o doblamiento de las barras en puntos definidos más o menos de manera arbitraria que por experiencia han demostrado su seguridad. Para luces aproximadamente iguales y cargadas de modo uniforme en las cuales no se corta o dobla más de la mitad del acero a tensión, resultan satisfactorios los puntos de corte ilustrados en la figura 5.15. Observe en esta figura que la viga en el apoyo exterior a la izquierda se indica como simplemente apoyada. Si la viga es monolítica con la columna exterior o con un muro de concreto en un extremo, los detalles para una luz interior típica pueden utilizarse de igual manera para la luz extrema.

c. Requisitos especiales cerca del punto de momento cero

Aunque el requisito básico para el refuerzo a tensión por flexión es que se suministre una longitud completa de desarrollo l_d más allá del punto donde se supone que la barra está sometida al esfuerzo f_y, este requisito puede *no* ser suficiente para mantener la seguridad contra falla de adherencia. La figura 5.16 muestra los diagramas representativos de momento y cortante de una viga continua cargada uniformemente. Las barras positivas colocadas para resistir el máximo momento positivo

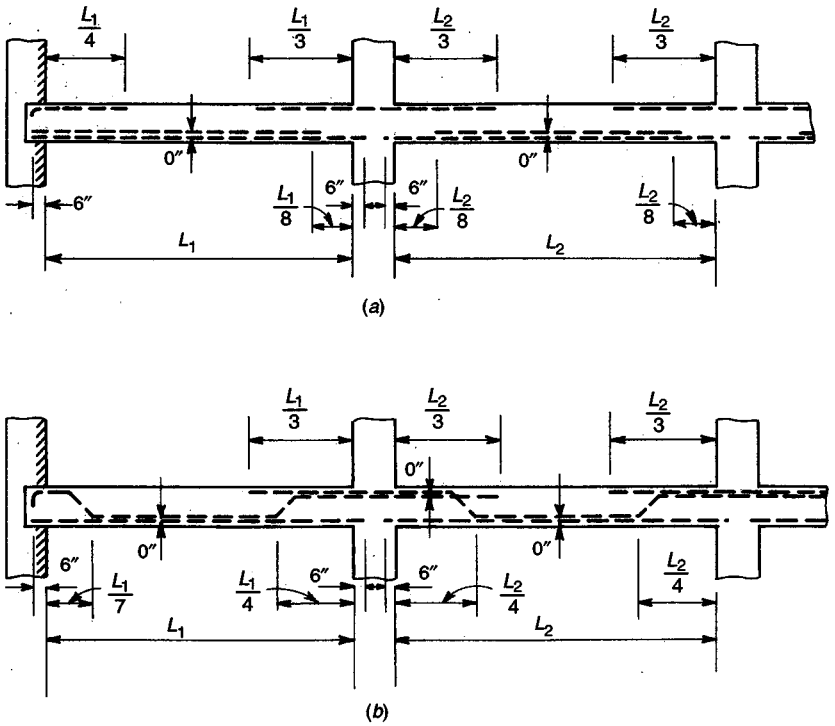


FIGURA 5.15
Puntos estándar de corte y doblamiento para barras en luces aproximadamente iguales con cargas distribuidas de manera uniforme.

en c deben tener una longitud completa de desarrollo más allá del punto c, medida en dirección de la disminución del momento. Entonces, en el caso límite, l_d podrá ser exactamente la distancia desde el punto c hasta el de inflexión. Sin embargo, si se cumpliera con este requisito, en el punto b localizado a media distancia entre c y el de inflexión, estas barras tendrán disponible sólo la mitad de su longitud de desarrollo, mientras que el momento estará a tres cuartos de aquél del punto c y, por tanto, faltaría por desarrollar tres cuartos de la fuerza de la barra. Esta situación se presenta siempre que los momentos, a lo largo de la longitud de desarrollo, sean mayores que aquéllos correspondientes a una reducción lineal hasta cero. Por esta razón, el problema es inquietante en la región de momento positivo de luces continuas cargadas en forma uniforme, pero no en la región de momento negativo.

La fuerza de adherencia U por unidad de longitud a lo largo del refuerzo a tensión en una viga es $U = dT/dx$, donde dT es el cambio en la tensión de la barra en la longitud dx. Puesto que $dT = dM/z$, esto puede formularse

$$U = \frac{dM}{z\,dx} \qquad (a)$$

es decir, la fuerza de adherencia por unidad de longitud de la barra, generada por flexión, es proporcional a la pendiente del diagrama de momento. Con respecto a la figura 5.16*a*, la máxima fuerza de adherencia U en la región de momento positivo estará entonces localizada en el punto de inflexión y U disminuirá en forma gradual a lo largo de la viga hacia el punto c. Obviamente, un enfoque conservador para evaluar si la adherencia de las barras que continúan hasta el punto de inflexión es suficiente (no necesariamente toda el área A_s, suministrada para M_u en el punto c), consistiría en exigir que la resistencia al desprendimiento, la cual se supone que aumenta linealmente a lo largo de la barra desde su extremo, estuviera controlada por la máxima tasa de aumento en el momento, es decir, la pendiente máxima dM/dx del diagrama de momento, que para flexión positiva ocurre en el punto de inflexión.

A partir de la mecánica elemental, se sabe que la pendiente del diagrama de momento en cualquier punto es igual al valor de la fuerza cortante en ese mismo punto. Por consiguiente, con referencia a la figura 5.16, la pendiente del diagrama de momento en el punto de inflexión es V_u. Puede trazarse entonces una línea punteada, tangente a la curva de momento en el punto de inflexión y con pendiente igual al valor de la fuerza cortante V_u. Entonces, si M_n es la resistencia nominal a flexión suministrada por las barras que se extienden hasta el punto de inflexión, y si se

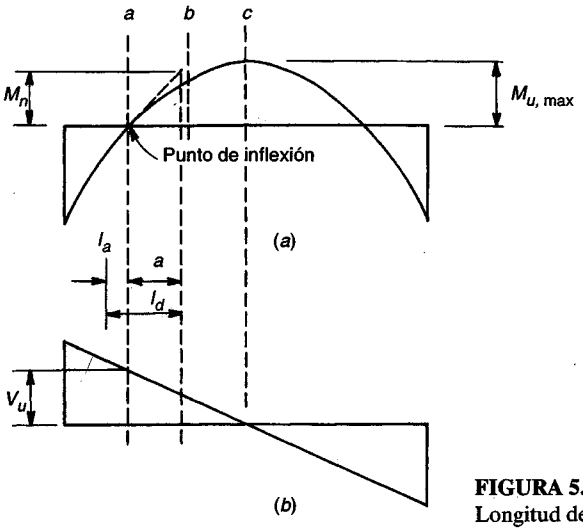


FIGURA 5.16
Longitud de desarrollo requerida en el punto de inflexión.

supone conservadoramente que el diagrama de momento varía linealmente a lo largo de la línea punteada tangente hasta la curva real de momento, se puede establecer una distancia a, de acuerdo con la relación básica según la cual $M_n/a = V_u$ así:

$$a = \frac{M_n}{V_u} \qquad (b)$$

Si las barras en cuestión estuvieran completamente esforzadas a una distancia a a la derecha del punto de inflexión, y si el momento disminuyera linealmente hasta el punto de inflexión como lo sugiere la línea punteada, entonces el desprendimiento no ocurriría si la longitud de desarrollo l_d fuera menor que la distancia a. Los momentos reales son menores que los indicados por la línea punteada, de modo que se cumple con el requisito de la seguridad.

Si las barras se extienden más allá del punto de inflexión hacia el apoyo, como se exige en todos los casos, entonces esta extensión puede contabilizarse como contribución para satisfacer los requisitos de longitud embebida. Arbitrariamente, conforme al Código ACI 12.11, para satisfacer estas exigencias puede contarse con una longitud más allá del punto de inflexión, que no sea superior al mayor entre la altura de la viga d o 12 veces el diámetro de la barra d_b. Entonces, el requisito para las barras a tensión en los puntos de inflexión es que

$$l_d \leq \frac{M_n}{V_u} + l_a \qquad (5.9)$$

donde M_n = resistencia nominal a flexión con el supuesto de que todo el refuerzo de la sección está esforzado a f_y

V_u = fuerza cortante mayorada en la sección

l_a = longitud empotrada de la barra más allá del punto de momento cero pero sin exceder el mayor de d o de $12\,d_b$.

Una situación similar se presenta cerca de los apoyos de luces simples con cargas uniformemente distribuidas donde se imponen, por consiguiente, requisitos similares. Sin embargo, debido a los efectos benéficos de la compresión vertical en el concreto en el extremo de una luz simplemente apoyada, la cual tiende a evitar el fracturamiento y las fallas de adherencia a lo largo de las barras, el Código ACI 12.11 permite aumentar el valor de M_n/V_u, en un 30 por ciento en estos casos. Así que, en los extremos de luces simplemente apoyadas, el requisito para el refuerzo a tensión es

$$l_d \leq 1.3\frac{M_n}{V_u} + l_a \qquad (5.10)$$

La consecuencia de estos requisitos especiales para el punto de momento cero es que, en algunos casos, deben utilizarse barras con tamaños menores, para obtener menores valores de l_d aunque se cumplan los requisitos para el desarrollo más allá del punto de máximo esfuerzo.

De la revisión de las secciones 5.9b y 5.9c resulta evidente que la determinación de los puntos de corte y doblamiento en elementos a flexión se hace complicada y puede ser bastante dispendiosa en el diseño. Es importante mantener este hecho en perspectiva y reconocer que los costos globales de la construcción no aumentarán mucho si algunas barras se dejan un poco más largas de lo absolutamente necesario, de acuerdo con los cálculos o según las disposiciones del Código ACI. Además, la sencillez de la construcción es un objetivo deseado que puede, por sí misma, generar ahorros compensatorios en el costo. De acuerdo con esto, muchos ingenieros en la práctica llevan *todo* el refuerzo positivo hasta la longitud requerida de 6 pulg más allá de la cara de los apoyos, y extienden *todo* el refuerzo negativo la distancia requerida más allá de los puntos de inflexión, en vez de utilizar puntos escalonados de corte.

d. Disposiciones de integridad estructural

La experiencia con estructuras que han sufrido daño en algún elemento principal de apoyo, por ejemplo una columna, debido a un accidente o a una carga anormal, indica que el colapso total puede evitarse mediante la adopción de cambios menores en el despiece de las barras. Si parte del refuerzo adecuadamente confinado se lleva en forma continua a través de un apoyo, entonces, aun si ese apoyo sufre daño o es destruido, la acción de catenaria de las vigas puede evitar el colapso total. En general, si las vigas tienen aceros inferior y superior que cumplen o exceden los requisitos resumidos en las secciones 5.9b y 5.9c, y si se suministra acero de confinamiento en la forma de estribos cerrados, entonces la acción de catenaria casi siempre se garantiza.

Según el Código ACI 7.13.2, en las vigas perimetrales de la estructura por lo menos la sexta parte del refuerzo negativo que se exige en los apoyos y al menos un cuarto del acero positivo necesario en el centro de la luz, deben ser continuos alrededor del perímetro y confinarse mediante estribos adecuadamente detallados. Los estribos pueden ser cerrados o pueden anclarse alrededor del acero negativo mediante un gancho doblado al menos 135°. Aunque no se especifica el espaciamiento de tales estribos, los requisitos de acero cortante mínimo dados en la sección 4.5b establecen una guía en las zonas donde el cortante no exige un espaciamiento menor. Los estribos no necesitan prolongarse a través de las juntas. La continuidad requerida para el acero longitudinal puede proporcionarse mediante refuerzo superior empalmado en el centro de la luz y refuerzo inferior empalmado cerca de los apoyos, ambos con empalmes a tensión clase A (ver la sección 5.11a).

Para vigas no perimetrales, cuando no se proporcionan estribos según lo descrito en el parágrafo anterior, al menos un cuarto del refuerzo para momento positivo requerido en el centro de la luz debe ser continuo o debe empalmarse sobre el apoyo con un empalme a tensión clase A, y en los apoyos no continuos debe terminar con un gancho estándar.

Observe que estas disposiciones exigen muy poco acero adicional en la estructura. Otras determinaciones del Código ACI exigen que por lo menos la cuarta parte de las barras inferiores debe prolongarse hasta 6 pulg dentro de los apoyos; las normas de integridad estructural exigen apenas que estas barras sean continuas o se empalmen. De manera similar, otras disposiciones exigen que por lo menos la tercera parte de las barras negativas se extienda determinada distancia mínima más allá del punto de inflexión; las normas de integridad estructural para vigas perimetrales exigen sólo que la mitad de estas barras se extienda un poco más y se empalme en los centros de las luces.

5.10 EJEMPLO INTEGRADO DE UN DISEÑO DE VIGAS

En éste y en los capítulos anteriores se estudiaron diversos aspectos del diseño de vigas de concreto reforzado en forma más o menos independiente: primero el diseño a flexión, luego el diseño a cortante y, finalmente, la adherencia y el anclaje. El siguiente ejemplo se presenta para demostrar cómo los diferentes requisitos para vigas, que en algunos casos presentan conflictos entre sí, se pueden satisfacer en un diseño global de un elemento representativo.

Ejemplo 5.3. Diseño integrado de una viga T. Un sistema de entrepiso consta de vigas T simplemente apoyadas, espaciadas a 8 pies entre centros y sostenidas por muros de mampostería de 12 pulg de ancho, espaciados a 25 pies entre las caras internas. La distribución general se ilustra en la figura 5.17*a*. Una losa monolítica de 5 pulg sostiene una carga viva de servicio uniformemente distribuida de 165 lb/pie^2. Las vigas T, además de la carga de la losa y de su propio peso, deben sostener dos cargas de equipo de 16,000 lb aplicadas sobre el alma de la viga T a 3 pies desde el centro de la luz, como se muestra. Realice el diseño completo de las vigas T utilizando concreto con una resistencia de 4000 lb/pulg^2 y barras con un esfuerzo de fluencia de 60,000 lb/pulg^2.

Solución. De acuerdo con el Código ACI, la longitud de la luz debe tomarse igual a la luz libre más la altura de la viga, sin exceder la distancia entre los centros de los apoyos. La última disposición controla en este caso y la luz efectiva es 26 pies. Estimando las dimensiones del alma de la viga en 12 × 24 pulg, las cargas muertas mayoradas calculadas son

Losa: $$\frac{5}{12} \times 150 \times 7 = 440 \text{ lb/pie}$$

Viga: $$\frac{12 \times 24}{144} 150 = 300$$

$$w_d = 740 \text{ lb/pie}$$

$$1.4w_d = 1040 \text{ lb/pie}$$

La carga viva uniformemente distribuida es

$$w_l = 165 \times 8 = 1310 \text{ lb/pie}$$

$$1.7w_l = 2230 \text{ lb/pie}$$

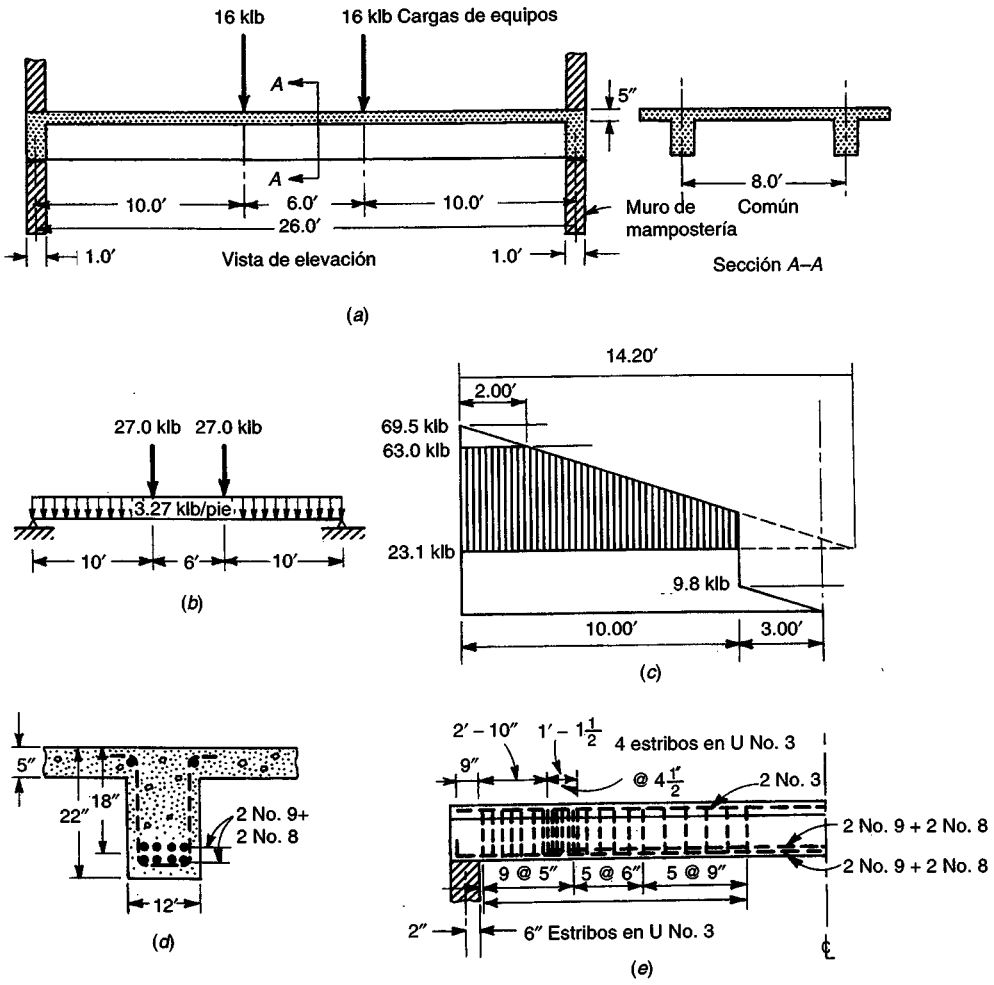


FIGURA 5.17
Ejemplo de diseño de una viga T.

Los factores de mayoración de la carga viva se aplican a las dos cargas concentradas para obtener $P_u = 16{,}000 \times 1.7 = 27{,}000$ lb. Las cargas mayoradas se resumen en la figura 5.17*b*.

En lugar de utilizar otros criterios para controlar, las dimensiones del alma de la viga se seleccionan con base en el cortante. Las reacciones a la izquierda y a la derecha bajo la acción de las cargas mayoradas son $27.0 + 3.27 \times 13 = 69.5$ klb. Con una altura efectiva para la viga de 20 pulg, el máximo cortante que debe considerarse en el diseño es $69.5 - 3.27(0.50 + 1.67) = 62.4$ klb. Aunque el Código ACI permite valores para V_s, hasta de $8\sqrt{f'_c}b_w d$, esto exigiría una gran cantidad de refuerzo en el alma. Se adopta en este caso un límite más bajo de $4\sqrt{f'_c}b_w d$. Con $Vc = 2\sqrt{f'_c}b_w d$, esto genera un valor máximo para $Vn = 6\sqrt{f'_c}b_w d$. Entonces $b_w d = V_w/(6\phi\sqrt{f'_c}) = 62{,}400/(6 \times 0.85\sqrt{4000}) = 194$ pulg^2. Se seleccionan unas dimensiones para la sección transversal $b_w = 12$ pulg, y $d = 18$ pulg, que resulta en una altura total de la viga de 22 pulg. No es necesario revisar la carga muerta supuesta para la viga.

De acuerdo con el Código, el ancho efectivo del ala b corresponde a la menor de las siguientes tres cantidades:

$$\frac{L}{4} = \frac{26 \times 12}{4} = 78 \text{ pulg}$$

$$16h_f + b_w = 80 + 12 = 92 \text{ pulg}$$

$$\text{Espacio entre centros} = 96 \text{ pulg}$$

La primera cantidad controla en este caso. El momento máximo se presenta en el centro de la luz, donde

$$M_u = \frac{1}{8} \times 3.27 \times 26^2 + 27.0 \times 10 = 546 \text{ klb-pie}$$

Si se asume en forma tentativa que la altura del bloque de esfuerzos va a ser igual al espesor de la losa, se llega a que

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y(d - a/2)} = \frac{546 \times 12}{0.90 \times 60 \times 15.5} = 7.82 \text{ pulg}^2$$

Entonces

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{7.82 \times 60}{0.85 \times 4 \times 78} = 1.78 \text{ pulg}$$

Se observa que la altura del bloque de esfuerzos es menor que el espesor de la losa; en consecuencia, son válidas las ecuaciones para vigas rectangulares. Un cálculo mejorado de A_s, es

$$A_s = \frac{546 \times 12}{0.90 \times 60 \times 17.11} = 7.10 \text{ pulg}^2$$

Se puede confirmar que este valor está muy por debajo de la máxima cuantía permitida. Se utilizarán entonces cuatro barras No. 9 más cuatro barras No. 8, que suministran un área total de 7.14 pulg^2. Éstas se distribuirán en dos filas, como aparece en la figura 5.17*d*, con las barras No. 9 en los extremos externos de cada fila. El ancho de la viga b_w es adecuado para esta distribución de barras.

Mientras que el Código ACI permite la discontinuidad de dos tercios del refuerzo longitudinal para luces simples, en este caso resulta conveniente interrumpir solamente la fila superior de acero, que corresponde a la mitad del área total. La capacidad a momento del elemento después de que se han interrumpido las barras de la fila superior se puede determinar así:

$$a = \frac{3.57 \times 60}{0.85 \times 4 \times 78} = 0.81 \text{ pulg}$$

$$\phi M_n = \phi A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = 0.90 \times 3.57 \times 60 \times 18.66 \times \frac{1}{12} = 300 \text{ klb-pie}$$

Para el presente caso, con un diagrama de momento resultante de la combinación de las cargas distribuidas y concentradas, debe calcularse el punto para el cual el momento aplicado es equivalente a esta cantidad. (En el caso de vigas cargadas uniformemente, resultan útiles los gráficos A.2 y A.3 del apén-

dice A.) Si x es la distancia desde el centro del apoyo hasta el punto donde el momento es igual a 300 klb-pie, entonces

$$69.5x - \frac{3.27x^2}{2} = 300$$

$$x = 4.80$$

Las barras superiores deben extenderse una distancia mínima de $d = 1.50$ pies o $12d_b = 1.13$ pies más allá de este punto teórico de corte. Además, debe suministrarse una longitud de desarrollo completa l_d más allá de la sección de máximo momento donde el esfuerzo en las barras que se cortan se supone igual a f_y. A causa de las altas cargas concentradas cerca al centro de la luz, el punto de esfuerzo pico se supone que actúa en el punto de aplicación de la carga concentrada en vez de hacerlo en el punto medio de la luz. Para las cuatro barras superiores, suponiendo un recubrimiento libre de 1.50 pulg hasta la parte de los estribos No. 3, el recubrimiento lateral libre es 1.50 + 0.38 = 1.88 pulg, o 1.66 d_b. Suponiendo una distancia libre igual entre las cuatro barras, este recubrimiento libre es [12.00 – 2 × (1.50 + 0.38 + 1.13 +1.00)]/3 = 1.33 pulg, o 1.18 d_b. Observando que se cumplen los requisitos del Código ACI para estribos mínimos, resulta claro que se cumplen todas las restricciones para el uso de las ecuaciones simplificadas de longitud de desarrollo, y a partir de la tabla 5.1 de la sección 5.3b:

$$\frac{l_d}{d_b} = \frac{60{,}000}{20\sqrt{4000}} = 47$$

dando una longitud de desarrollo requerida de $l_d = 47 \times 1.13 = 53$ pulg, o 4.42 pies. Entonces las barras deben continuarse por lo menos 3.00 + 4.42 = 7.42 pies más allá del centro de la luz, pero adicionalmente deben continuar hasta un punto a 4.80 – 1.50 = 3.30 pies del eje del apoyo. El segundo requisito controla y por tanto se interrumpe la fila superior de las barras a 2.80 pies de la cara del apoyo, tal como se indica en la figura 5.17*e*. La fila inferior de barras se prolonga hasta un punto a 3 pulg del extremo de la viga, proporcionando 5.05 pies de empotramiento más allá de la sección crítica para corte de las barras superiores. Esto excede la longitud de desarrollo del conjunto inferior de barras, confirmando que se cumplen los requisitos para corte y extensión de barras. El doblez a 90° que se muestra en la figura 5.17*e*. es opcional.

Observe que se obtendría un diseño más simple utilizando muy poco acero adicional, si se prolongan las ocho barras positivas dentro del apoyo. La justificación para los cálculos más elaborados y las complicaciones en la colocación depende de manera importante del número de repeticiones del diseño en la totalidad de la estructura.

Verificando mediante la ecuación (5.12) si el acero que continúa tiene un diámetro suficientemente pequeño, se encuentra que

$$l_a \leq 1.3\frac{333 \times 12}{69.5} + 3 = 78 \text{ pulg}$$

El valor real de l_d es 53 pulg y cumple con la anterior restricción.

Puesto que las barras que se cortan están localizadas en una zona a tensión, se utilizan estribos especiales de confinamiento para controlar el agrietamiento; éstos se seleccionan posteriormente a la determinación del refuerzo normal a cortante.

El diagrama de cortante que resulta de la aplicación de las cargas mayoradas se muestra en la figura 5.17*c*. La contribución del concreto al cortante es

$$\phi V_c = 0.85 \times 2\sqrt{4000} \times 12 \times 18 = 23{,}000 \text{ lb}$$

Así que debe proveerse refuerzo en el alma para cubrir la parte sombreada del diagrama de cortante.

Se seleccionan estribos No. 3. El espaciamiento máximo no debe exceder $d/2 = 9$ pulg, 24 pulg o $A_v f_y 50 b_w = 0.22 \times 60{,}000/50 \times 12 = 22$ pulg. El primer criterio controla en este caso. Como punto de referencia, se calcula el espaciamiento hipotético de los estribos en el apoyo, a partir de la ecuación (4.14*a*),

$$s_0 = \frac{0.85 \times 0.22 \times 60 \times 18}{69.5 - 23.1} = 4.35 \text{ pulg}$$

y a intervalos de 2 pies a lo largo de la luz,

$$\begin{aligned} s_2 &= 5.06 \text{ pulg} \\ s_4 &= 6.05 \text{ pulg} \\ s_6 &= 7.53 \text{ pulg} \\ s_8 &= 9.96 \text{ pulg} \\ s_{10} &= 14.70 \text{ pulg} \end{aligned}$$

El espaciamiento no necesita ser menor que el que se exige a una distancia de 2.00 pies desde el centro del apoyo. Además, no se requieren estribos más allá del punto de aplicación de las cargas concentradas, puesto que en esa zona el cortante es menor que la mitad de ϕV_c. El espaciamiento final seleccionado para los estribos verticales es

$$\begin{aligned} \text{1 espacio de 2 pulg} &= 2 \text{ pulg} \\ \text{9 espacios de 5 pulg} &= 45 \text{ pulg} \\ \text{5 espacios de 6 pulg} &= 30 \text{ pulg} \\ \text{5 espacios de 9 pulg} &= 45 \text{ pulg} \\ \text{Total} &= 122 \text{ pulg} = 10 \text{ pies } 2 \text{ pulg} \end{aligned}$$

Por conveniencia durante la construcción, se adicionan dos barras longitudinales No. 3 para amarrar la parte superior de los estribos.

Además de este refuerzo a cortante especificado, es conveniente suministrar refuerzo adicional a lo largo de una distancia igual a $3/4d$ o 13.5 pulg desde los extremos cortados del acero interrumpido. El espaciamiento de este refuerzo adicional en el alma no debe exceder $d8\beta_b = 18/(8 \times 1/2) = 4.5$ pulg. Además, el área adicionada de acero dentro de una distancia s no debe ser menor que $60b_w sf_y = 60 \times 12 \times 4.5/60{,}000 = 0.054$ pulg^2. Por conveniencia se utilizarán de nuevo estribos No. 3, que proporcionan un área de 0.22 pulg^2 en la distancia s. La ubicación de los cuatro estribos adicionales se ilustra en la figura 5.17*e*.

5.11 EMPALMES EN BARRAS

En general, las barras de refuerzo están disponibles en longitudes de 60 pies para tamaños desde el No. 5 hasta el No. 18 y en longitudes de 20 ó 40 pies para tamaños menores. Por esta razón, y porque resulta más conveniente trabajar con barras de longitudes más pequeñas, con frecuencia es necesario empalmar las barras en el campo. Deben evitarse los empalmes del refuerzo en los puntos de máximo esfuerzo, y cuando se utilicen deben escalonarse, aunque ninguna de estas condiciones sea práctica, por ejemplo, para el caso de empalmes a compresión en columnas.

Los empalmes para las barras No.11 y menores se realizan simplemente mediante traslapo de las barras a lo largo de una distancia suficiente para transmitir el esfuerzo por adherencia desde una barra hasta la otra. Las barras traslapadas se colocan, a menudo, en contacto y se amarran ligeramente con alambre, de modo que permanezcan en su posición a medida que se vacía el concreto. Como alternativa, los empalmes pueden realizarse con soldadura o mediante camisas o dispositivos mecánicos que suministran una "conexión efectiva y completa" entre las barras. El Código ACI 12.14.2 prohíbe el uso de empalmes traslapados para barras mayores que las No. 11. Para barras que van a estar sometidas a compresión únicamente, es posible transmitir la carga con el apoyo, uno sobre otro, de los extremos cortados en forma transversal, siempre y cuando las barras se mantengan con seguridad en su posición mediante una camisa o cualquier otro dispositivo.

Los empalmes por traslapo de barras en paquete se basan en la longitud de empalme por traslapo que se requiere para las barras individuales dentro del paquete, pero debido a la reducción en perímetro efectivo, la longitud de empalme debe aumentarse en un 20 por ciento para paquetes de tres barras y en un 33 por ciento para paquetes de cuatro barras. Los empalmes de las barras individuales dentro de un paquete no deben superponerse y los paquetes enteros no deben empalmarse por traslapo.

Con respecto al Código ACI 12.14.3, los empalmes soldados deben colocarse a tope y soldarse de manera que la conexión desarrolle a tensión por lo menos el 125 por ciento de la resistencia a la fluencia especificada de la barra. El mismo requisito se aplica a las conexiones puramente mecánicas. Esto asegura que una barra empalmada y sobrecargada falle por fluencia dúctil en una región alejada del empalme, en vez de que se presente en el empalme mismo donde es posible una falla frágil. Conexiones con barras No. 5 o menores que no cumplan con este requisito pueden utilizarse en puntos donde los esfuerzos sean menores que los máximos.

a. Empalmes por traslapo a tensión

La longitud requerida para traslapos en empalmes a tensión, establecida mediante ensayos, puede plantearse en términos de la longitud de desarrollo l_d. En el proceso de calcular l_d se aplican los mismos factores de modificación anteriores excepto que el factor de reducción por refuerzo en exceso no debe aplicarse porque ya se tiene en cuenta en la especificación misma del empalme.

Se han establecido dos clasificaciones diferentes para los empalmes por traslapo según la longitud mínima requerida para el traslapo: el empalme clase A requiere un traslapo de $1.0l_d$ y el empalme clase B, uno de $1.3\,l_d$. En los dos casos debe aplicarse la longitud mínima de 12 pulg. Los empalmes por traslapo deben ser, por lo general, clase B conforme al Código ACI 12.15.2, excepto que los de clase A se permiten cuando el área suministrada de refuerzo es por lo menos el doble de la exigida por análisis a lo largo de toda la longitud del empalme, *y* cuando la mitad o menos del refuerzo total se empalma dentro de la longitud requerida de traslapo. El efecto de estos requisitos es motivar al diseñador para que ubique los empalmes lejos de las regiones de máximo esfuerzo, en zonas donde el área real de acero sea por lo menos el doble de la requerida por análisis, y para que realice los empalmes en forma escalonada.

b. Empalmes a compresión

Las barras de refuerzo a compresión se empalman ante todo en columnas donde las barras llegan normalmente un poco más arriba de cada piso o en pisos de por medio. Esto se hace en parte por conveniencia en la construcción para evitar el manejo y soporte de barras muy largas en las columnas, pero también para permitir la reducción por etapas del área de acero de la columna a medida que las cargas disminuyen en los pisos superiores.

Las barras a compresión pueden empalmarse por traslapo, mediante contacto directo en los extremos, soldadura o mediante dispositivos mecánicos que proporcionen una conexión efectiva. La longitud mínima de traslapo para empalmes a compresión está definida por el Código ACI 12.16:

Para barras con $f_y \leq 60{,}000$ lb/pulg^2	$0.0005\,f_y d_b$
Para barras con $f_y > 60{,}000$ lb/pulg^2	$(0.0009f_y - 24)d_b$

pero no menos de 12 pulg. Para f'_c menor que 3000 lb/pulg^2, el traslapo requerido se incrementa en un tercio. Cuando se realizan traslapos a compresión con barras de diferente tamaño, la longitud de empalme debe ser la mayor entre la longitud de desarrollo de la barra mayor y la de empalme de la barra menor. Como una excepción a la restricción usual para el empalme por traslapo de barras de gran diámetro, las Nos. 14 y 18 *sí pueden* empalmarse por traslapo con las No. 11 y menores.

Mediante ensayos y experiencias se ha encontrado que el contacto directo en los extremos puede ser un medio efectivo para transmitir la compresión. En este caso, las barras deben mantenerse adecuadamente alineadas con un dispositivo apropiado. Con relación al Código ACI 12.16.4, los extremos de las barras deben terminar en superficies planas, en ángulo recto con una desviación más o menos de 1.5° y con una tolerancia máxima de 3° con respecto al contacto total después de ensamblarse. Se debe utilizar flejes, estribos cerrados o espirales.

c. Empalmes en columnas

Los empalmes por traslapo, los de soldadura a tope, las conexiones mecánicas o los empalmes por contacto en los extremos pueden utilizarse en columnas con ciertas restricciones. Las barras de refuerzo en las columnas pueden estar sometidas a compresión o tensión o, para diferentes combinaciones de carga, tanto a tensión como a compresión. De acuerdo con esto, los empalmes en columnas deben ajustarse en algunos casos a los requisitos para empalmes a compresión o a tensión únicamente, y en otros, a los requisitos para las dos condiciones. El Código ACI 12.17 exige que se disponga de una capacidad mínima a tensión en cada una de las caras de todas las columnas, aun cuando el análisis indique que sólo hay compresión. Los empalmes por traslapo corrientes a compresión proveen suficiente resistencia a la tensión, pero los empalmes por contacto en los extremos pueden exigir barras adicionales para transmitir la tensión a menos que se hagan en forma escalonada.

Los empalmes por traslapo en columnas donde los esfuerzos en las barras producto de las cargas mayoradas son de compresión, deben cumplir con los requisitos expuestos en la sección 5.11b para empalmes a compresión. Cuando el esfuerzo es de tensión y no excede el valor de $0.5f_y$, el empalme por traslapo debe ser clase B si se empalman más de la mitad de las barras en cualquier sección, o clase A si se empalman la mitad o menos y los empalmes por traslapo alternos se escalonan a distancias mayores que l_d. Si el esfuerzo es de tensión y excede $0.5f_y$, entonces de acuerdo con el Código ACI el empalme por traslapo debe ser clase B.

Si se utilizan flejes transversales a todo lo largo de la longitud de empalme con un área por lo menos de $0.0015\,hs$, donde s es el espaciamiento de los flejes y h es el espesor total del elemento, la longitud de empalme que se requiere puede multiplicarse por 0.83 pero no debe ser menor que 12 pulg. Si el empalme está confinado por refuerzo en espiral, la longitud exigida puede multiplicarse por 0.75 pero de nuevo no debe ser menor que 12 pulg.

Los empalmes por contacto en los extremos, como se describió anteriormente, se pueden utilizar para barras en columnas sometidas a esfuerzos de compresión, siempre y cuando los empalmes se escalonen o si se colocan barras adicionales en los sitios de los empalmes. Las barras que continúan en cada cara deben tener una resistencia a la tensión no menor que $0.25f_y$ veces el área del refuerzo en esa cara.

Ejemplo 5.4. Empalme a compresión del refuerzo de columnas. Con respecto a la figura 5.8, cuatro barras de columna No. 11 provenientes del piso inferior deben empalmarse por traslapo con cuatro barras de columna No. 10 del piso superior y éste debe realizarse justo por encima de una junta de construcción al nivel del piso. La columna, con dimensiones de la sección transversal de 12 pulg × 21 pulg, estará sometida únicamente a fuerzas de compresión para todas las combinaciones de carga. El refuerzo transversal se compone de flejes No. 4 espaciados a 16 pulg. Todas las barras verticales pueden suponerse sometidas al esfuerzo de fluencia. Calcule la longitud de empalme requerida. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 4000$ lb/pulg^2.

Solución. La longitud del empalme debe ser la mayor entre la longitud de desarrollo de las barras No. 11 y la de empalme de las barras No. 10. Para las barras No. 11, la longitud de desarrollo a partir de la ecuación (5.10) es

$$l_{db} = \frac{0.02 \times 1.41 \times 60{,}000}{\sqrt{4000}} = 27 \text{ pulg}$$

pero no debe ser menor que $0.0003 \times 1.41 \times 60{,}000 = 25$ pulg. El primer criterio controla. No es aplicable ningún factor de modificación. Para las barras No. 10, la longitud del empalme a compresión es $0.0005 \times 60{,}000 \times 1.27 = 38$ pulg. Se verifica la utilización del factor de modificación para columnas confinadas, para lo cual la dimensión crítica de la columna es 21 pulg y el área efectiva de flejes que se requiere es, en consecuencia $0.0015 \times 21 \times 16 = 0.50$ pulg^2. Los flejes No. 4 suministran un área de únicamente $0.20 \times 2 = 0.40$ pulg^2, de manera que el factor de reducción de 0.83 no puede aplicarse a la longitud de empalme. Así que la longitud de empalme a compresión de 38 pulg, que es

superior a la longitud de desarrollo de 27 pulg para las barras No. 11, controla en este caso y se requiere por lo tanto un empalme por traslapo de 38 pulg. Obsérvese que si el espaciamiento de los flejes en el empalme se redujera a 12.8 pulg o menos (por ejemplo, 12 pulg), el traslapo requerido se reduciría a $38 \times 0.83 = 32$ pulg. Esto ahorraría un poco de acero y aunque los costos de construcción aumentarían ligeramente, esta última alternativa produciría probablemente el diseño más económico.

REFERENCIAS

5.1. R. M. Mains, "Measurement of the Distribution of Tensile and Bond Stresses along Reinforcing Bars", *J. ACI*, vol. 23, no. 3, 1951, pp. 225-252.

5.2. A. H. Nilson, "Internal Measurement of Bond Slip", *J. ACI*, vol. 69, no. 7, 1972, pp. 439-441.

5.3. Y. Goto, "Cracks Formed in Concrete around Deformed Tension Bars", *J. ACI*, vol. 68, no. 4, 1971, pp. 244-251.

5.4. L. A. Lutz and P. Gergely, "Mechanics of Bond and Slip of Deformed Bars in Concrete", *J. ACI*, vol. 64, no. 11, 1967, pp. 711-721.

5.5. P. M. Ferguson and J. N. Thompson. "Development Length of High Strength Reinforcing Bars in Bond", *J. ACI*, vol. 59, no. 7, 1962, pp. 887-992.

5.6. R. G. Mathey and D. Watstein, "Investigation of Bond in Beam and Pullout Specimens with High-Strength Reinforcing Bars", *J. ACI*, vol. 32, no. 9, 1961, pp. 1071-1090.

5.7. "Bond Stress—The State of the Art", ACI Committee 408, *J. ACI*, vol. 63, no. 11, 1966, pp. 1161-1190.

5.8. "Suggested Development, Splice, and Standard Hook Provisions for Deformed Bars in Tension", ACI Comm. 408, *Conc. Int.*, vol. 1, no. 1, 1979, pp. 44-46.

5.9. J. O. Jirsa, L. A. Lutz, and P. Gergely, "Rationale for Suggested Development, Splice, and Standard Hook Provisions for Deformed Bars in Tension", *Conc. Int.*, vol. 1, no. 7, 1979, pp. 47-61.

5.10. C. O. Orangun, J. O. Jirsa, and J. E. Breen, "A Reevaluation of the Test Data on Development Length and Splices", *J. ACI*, vol. 74, no. 3, 1977, pp. 114-122.

5.11. L. A. Lutz, S. A. Mirza, and N. Gosain, "Changes to and Applications of Development and Lap Splice Length Provisions for Bars in Tension", *ACI Struct. J.*, Vol. 90, no. 4, pp. 393-406.

5.12. P. M. Ferguson, "Small Bar Spacing or Cover—A Bond Problem for the Designer", *J. ACI*, vol. 74, no. 9, 1977, pp. 435-439.

5.13. P. R. Jeanty, D. Mitchell, and M. S. Mirza, "Investigation of Top Bar Effects in Beams", *ACI Struct. J.*, vol. 85, no. 3, 1988, pp. 251-257.

5.14. R. A. Treece and J. O. Jirsa. "Bond Strength of Epoxy-Coated Reinforcing Bars", *ACI Matls. J.*, vol. 86, no. 2, 1989, pp. 167-174.

5.15. R. G. Mathey and J. R. Clifton, "Bond of Coated Reinforcing Bars in Concrete", *J. Struct. Div.*, ASCE, vol. 102, no. ST1, 1976, pp. 215-228.

5.16. H. H. Ghaffari, O. C. Choi, D. Darwin, and S. L. McCabe, "Bond of Epoxi-Coated Reinforcement: Cover, Casting Position, Slump, and Consolidation", *ACI Struct. J.* vol. 91, no. 1, 1994, pp. 59-68.

5.17. B. S. Hamad, J. O. Jirsa, and N. I, dePaulo, "Anchorage Strength of Epoxy-Coated Hooked Bars", *ACI Struct. J.*, vol. 90, no. 2, 1993, pp. 210-217.

5.18. J. L. G. Marques and J. O. Jirsa, "A Study of Hooked Bar Anchorages in Beam-Column Joints", *J. ACI*, vol. 72, no. 5, 1975, pp. 198-209.

5.19. C. J. Hester, S. Salamizavaregh, D. Darwin, and S. L. McCabe, "Bond of Epoxy-Coated Reinforcement: Splices", *ACI Struct. J.*, vol. 90, no. 1, 1993, pp. 89-102.

PROBLEMAS

5.1. La viga corta de la figura P5.1 sale en voladizo desde una columna de soporte a la izquierda. Debe sostener una carga muerta calculada de 1.5 klb/pie, que incluye su propio peso, y una carga viva de servicio de 3.0 klb/pie. El refuerzo a tensión por flexión se compone de dos barras No. 11 a una altura efectiva de 21 pulg. Se suministran estribos transversales en forma de U con los siguientes espaciamientos a partir de la cara de la columna: 4 pulgadas, 3 pulgadas, 5 a 10.5 pulgadas.

(*a*) Si el acero de flexión y de cortante es de $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2, y si la viga se construye con concreto de $f'_c = 3000$ lb/pulg^2, verifique si es posible proporcionar en la viga la longitud adecuada de desarrollo para las barras No. 11. Utilice las ecuaciones simplificadas para longitud de desarrollo.

(*b*) Recalcule la longitud de desarrollo requerida para las barras de la viga utilizando la ecuación básica (5.3). Comente sus resultados.

(*c*) Si las resistencias de los materiales de la columna son $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 5000$ lb/pulg^2, verifique si es posible suministrar el empotramiento necesario dentro de la columna para las barras No. 11. En caso de requerirse ganchos, especifique detalladamente las dimensiones.

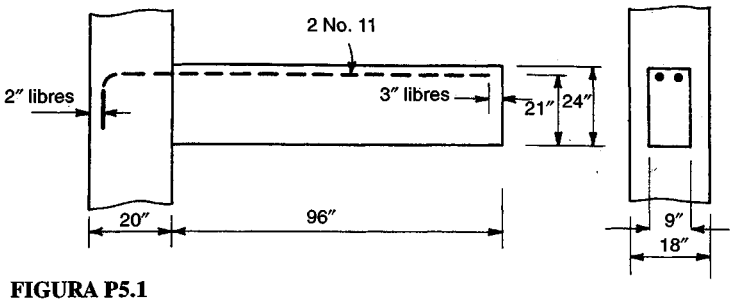


FIGURA P5.1

5.2. La viga simplemente apoyada de la figura P5.2 tiene una luz libre de 24.75 pies y debe sostener una carga muerta distribuida de 0.54 klb/pie, que incluye su peso propio, y una carga viva no mayorada de servicio de 1.08 klb/pie. El refuerzo consta de tres barras No. 10 a una altura efectiva de 16 pulg, una de las cuales debe interrumpirse cuando no sea necesaria. Las resistencias especificadas de los materiales son f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2. Se utilizan estribos No. 3 con un recubrimiento de 1.5 pulgadas y con espaciamientos menores que los máximos establecidos por el Código ACI.

(*a*) Calcule el punto donde puede interrumpirse la barra central.

(*b*) Verifique que las longitudes de empotramiento sean las adecuadas para las barras continuas y las interrumpidas.

(*c*) Verifique los requisitos especiales en el apoyo, donde $M_u = 0$.

(*d*) Si se utilizan barras No. 3 para el refuerzo transversal, especifique los detalles especiales del refuerzo en los alrededores del punto de corte de la barra No. 10.

(*e*) Explique los aspectos prácticos del diseño propuesto. ¿Recomendaría cortar el acero como se sugiere? ¿Podrían interrumpirse dos barras en lugar de una?

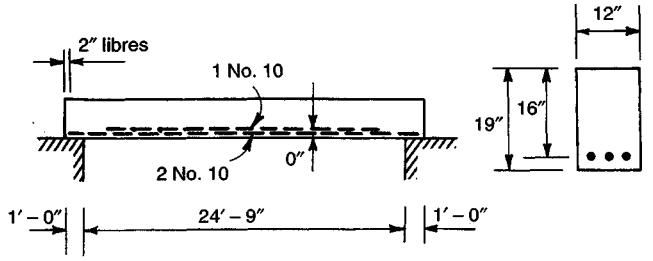


FIGURA P5.2

5.3. La figura P5.3 ilustra el refuerzo de una columna con un diámetro de 16 pulg, con f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 5000 lb/pulg^2. El análisis del pórtico del edificio da un área requerida A_s = 7.10 pulg^2 para la columna inferior y 5.60 pulg^2 para la columna superior. El refuerzo en espiral consta de una barra con diámetro de 3/8 de pulg con un paso de 2 pulg. Las barras de la columna deben empalmarse justo por encima de la unión de construcción al nivel de piso, como se muestra en el esquema. Calcule la longitud mínima de empalme permitida.

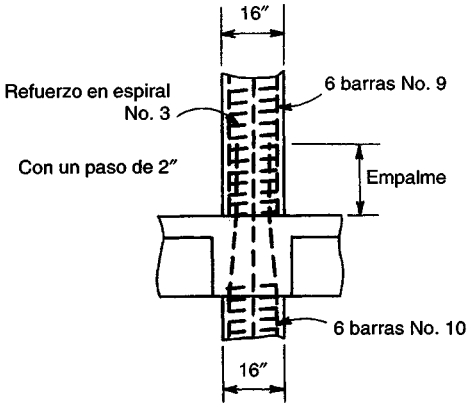


FIGURA P5.3

5.4. El pequeño voladizo expuesto en la figura P5.4 sostiene una carga concentrada alta a 6 pulg desde su extremo exterior. El análisis a flexión indica que se requieren tres barras No. 8 debidamente ancladas en el muro de soporte y que se prolonguen hasta un punto a una distancia no menor que 2 pulg desde el extremo libre. Las barras estarán sometidas a un esfuerzo igual a f_y en el apoyo empotrado. Investigue la necesidad de ganchos y de acero de confinamiento transversal en el extremo derecho del elemento. Las resistencias de los materiales son f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2.
En caso de que se requieran ganchos y acero transversal, señale los detalles en un esquema.

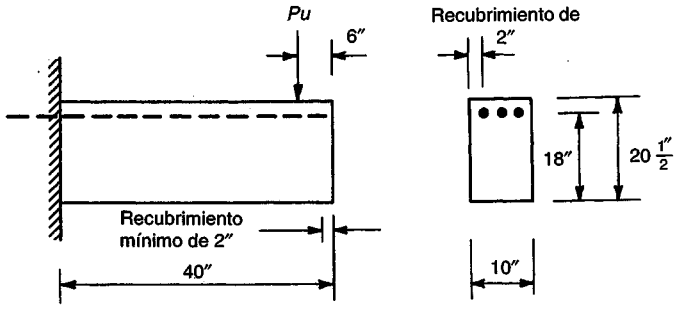


FIGURA P5.4

5.5. La figura P5.5 presenta, la sección transversal de una zapata corrida continua bajo un muro. Se propone utilizar refuerzo a tensión consistente en barras No. 8 espaciadas a 16 pulg a lo largo de la longitud del muro, para proporcionar un área de barras de 0.59 pulg^2/pie. Las barras tienen una resistencia de f_y = 60,000 lb/pulg^2 y el concreto de la zapata tiene un f'_c = 3000 lb/pulg^2. Se supone que la sección crítica para flexión está localizada en la cara del muro que sostiene y que la altura efectiva del acero a tensión es 12 pulg. Verifique que haya suficiente longitud de desarrollo disponible para las barras No. 8 y en caso de que se requieran ganchos, esquematice los detalles e incluya las dimensiones de los ganchos

Nota: En caso de que se requieran ganchos para las barras No. 8, prepare un diseño alterno utilizando barras con la misma área por pie pero de menor diámetro, de modo que puedan eliminarse los ganchos; utilice el máximo tamaño posible de barra con el fin de minimizar los costos de colocación del acero.

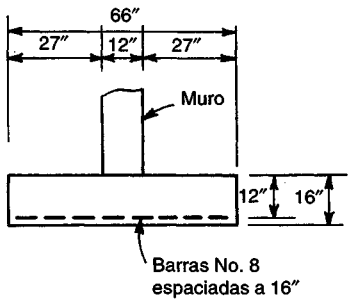


FIGURA P5.5

5.6. La viga continua ilustrada en la figura P5.6 se diseñó para resistir una carga muerta de servicio de 2 klb/pie, incluido su peso propio, y una carga viva de servicio de 3 klb/pie. El diseño a flexión se basa en el método de los coeficientes de momento del ACI que establece valores de 1/11 y 1/16 para la cara del apoyo y para el centro de la luz, respectivamente. La sección de concreto que resulta tiene dimensiones b = 14 pulg y d = 22 pulg. Se suministra refuerzo negativo en la cara del apoyo mediante cuatro barras No. 10, las cuales se cortan por pares donde ya no son necesarias, según el Código ACI. El refuerzo positivo está conformado por cuatro barras No. 8 que también se cortan por pares. Especifique los puntos exactos de corte para todo el acero negativo y positivo, así como cualquier refuerzo en el alma suplementario que pueda requerirse. Confirme que se cumplan los requisitos del Código ACI en los puntos de inflexión y sugiera modificaciones al refuerzo, si es apropiado. Las resistencias de los materiales son f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2.

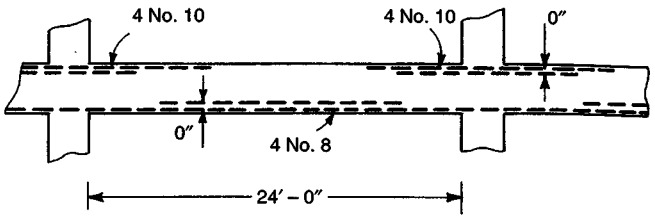


FIGURA P5.6

5.7. La figura P5.7 presenta una viga de transferencia de gran altura que resiste dos cargas grandes de columnas en sus extremos exteriores como parte de un edificio de concreto de gran altura. Las columnas del primer piso deben desplazarse 8 pies cada una como se ilustra. La carga produce esencialmente un momento constante (sin tener en cuenta el peso propio de la viga) que obliga a una sección de concreto con $b = 22$ pulg y $d = 50$ pulg, con refuerzo principal a tensión en la parte superior de la viga conformado por doce barras No. 11, en tres filas de cuatro barras cada una. La longitud máxima de barra disponible es 60 pies, de manera que deben proveerse los correspondientes empalmes a tensión. De acuerdo con las disposiciones del Código ACI, diseñe y detalle todos los empalmes, los cuales deben escalonarse de manera que no se empalmen más de cuatro barras en cualquier sección. Investigue también la necesidad de anclajes especiales en los extremos exteriores del refuerzo principal y especifique los detalles de anclajes especiales si son necesarios. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 5000$ lb/pulg^2.

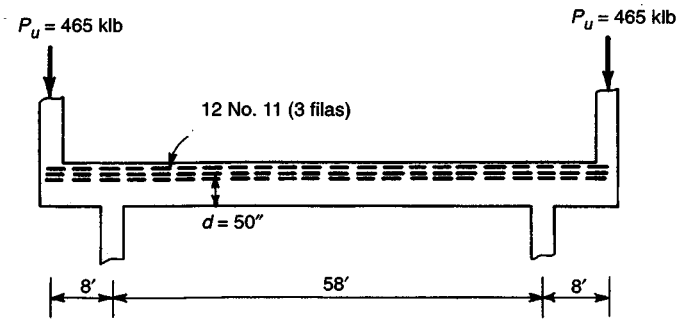


FIGURA P5.7

CAPÍTULO



CONDICIONES DE SERVICIO

6.1 INTRODUCCIÓN

Los capítulos 3, 4 y 5 trataron principalmente el diseño a la resistencia de vigas de concreto reforzado. Se han desarrollado métodos para asegurar un adecuado margen de seguridad contra la falla a flexión o a cortante en las vigas, o contra la falla por adherencia y anclaje del refuerzo. Para este propósito se ha supuesto que el elemento se encuentra en un estado hipotético de sobrecarga.

También es importante que el comportamiento del elemento sea satisfactorio para el servicio normal cuando las cargas son aquellas que realmente se esperan, es decir, cuando los coeficientes de carga son iguales a 1.0. Esto no se garantiza simplemente con el suministro de una resistencia adecuada. Las deflexiones para la carga de servicio total pueden ser muy grandes o es posible que las deflexiones a largo plazo, producidas por las cargas sostenidas, ocasionen daño a la estructura. Las grietas de tensión en las vigas pueden ensancharse lo suficiente de manera que lleguen a ser desagradables a la vista e incluso pueden permitir una corrosión importante de las barras de refuerzo. Éstos y otros aspectos, como vibraciones o fatiga, requieren un análisis especial.

Los estudios para las condiciones de servicio se llevan a cabo con base en la teoría elástica que supone los esfuerzos proporcionales a las deformaciones tanto para el concreto como para el acero. El concreto en el lado del eje neutro sometido a tensión puede suponerse no fisurado, o parcial o totalmente fisurado, según las cargas y las resistencias de los materiales (ver la sección 3.3).

Antes, los aspectos relacionados con las condiciones de servicio se trataban indirectamente, limitando los esfuerzos en el concreto y en el acero para cargas de servicio a valores relativamente conservadores que producían comportamientos satisfactorios. Ahora, con el uso generalizado de los métodos de diseño a la resistencia, que permiten elementos más esbeltos mediante una evaluación más precisa de la capacidad, y con la utilización de materiales de mayor resistencia que además contribuyen a la disminución de los tamaños de los elementos, los métodos indirectos ya no cumplen con este propósito. El enfoque actual consiste en investigar de manera específica los agrietamientos y las deflexiones para las cargas de servicio, después de haber calculado las dimensiones de los elementos utilizando los requisitos de resistencia. Las disposiciones del Código ACI reflejan esta nueva conceptualización.

En este capítulo se desarrollarán los métodos para asegurar que las grietas asociadas con la flexión de vigas de concreto reforzado se mantengan limitadas en espesor y estén bien distribuidas, y que las deflexiones a corto y a largo plazo para cargas que pueden llegar a la carga total de servicio, no sean excesivamente grandes.

6.2 AGRIETAMIENTO EN ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN

Todas las vigas de concreto reforzado se agrietan, iniciándose el proceso por lo general para cargas muy por debajo del nivel de servicio y posiblemente aun antes de que actúen las cargas, debido a que no se puede retraer libremente. Las grietas de flexión generadas por las cargas no son sólo inevitables sino realmente necesarias con el fin de que el refuerzo trabaje de manera efectiva. Antes de la formación de las grietas de flexión, el esfuerzo en el acero no es mayor que n veces el esfuerzo del concreto adyacente, donde n es la relación modular, E_s/E_c. Para los materiales comunes en la práctica actual, n es más o menos 8. Así que, cuando el concreto está cerca de su módulo de rotura, aproximadamente de 500 lb/pulg^2, el esfuerzo en el acero será sólo $8 \times 500 = 4000$ lb/pulg^2, valor muy bajo para que el acero trabaje en forma efectiva como refuerzo. Para las cargas normales de servicio pueden esperarse esfuerzos en el acero hasta de ocho y nueve veces este valor.

En una viga bien diseñada las grietas de flexión son finas, por eso se les llama grietas "capilares"; son casi invisibles al observador casual y garantizan muy poca o ninguna corrosión del refuerzo. A medida que se incrementan gradualmente las cargas por encima de la carga de agrietamiento, tanto la cantidad como el ancho de las grietas aumentan y se puede encontrar un ancho común de grietas aproximadamente de 0.01 pulg (0.25 mm) para el nivel de cargas de servicio. Si las cargas se incrementan aun más, el ancho de las grietas aumenta en forma correspondiente aunque la cantidad se mantiene más o menos estable.

El agrietamiento del concreto es un proceso aleatorio, altamente variable e influido por muchos factores. A causa de la complejidad del problema, los métodos disponibles para predecir el ancho de las grietas se fundamentan principalmente en la observación de ensayos. La mayor parte de las ecuaciones que se han desarrollado estiman el ancho máximo probable de la grieta, lo cual significa comúnmente que casi el 90 por ciento de los anchos de grietas en el elemento van a estar por debajo del valor calculado. Sin embargo, algunas veces pueden ocurrir grietas aisladas con ancho superior al doble del calculado (ver la referencia 6.1)

a. Variables que afectan el ancho de las grietas

En el análisis relacionado con la importancia de una buena adherencia entre el concreto y el acero presentado en la sección 5.1, se señaló que con un anclaje adecuado en los extremos, una viga no fallará prematuramente aún si se ha perdido la adherencia a lo largo de toda la luz. Sin embargo, el ancho de las grietas en este caso será mayor que para una viga idéntica en la cual se proporcione una buena resistencia al deslizamiento a lo largo de la longitud de la luz. En general, las vigas diseñadas con barras circulares lisas mostrarán en servicio una cantidad pequeña de grietas relativamente anchas, mientras que las vigas diseñadas con una buena resistencia al deslizamiento, garantizada mediante la utilización de barras con deformaciones superficiales adecuadas, presentarán una cantidad mayor de grietas muy finas, casi invisibles. Como consecuencia de este mejor comportamiento, en la práctica actual las barras de refuerzo se fabrican siempre con deformaciones en su superficie, para las cuales las Especificaciones ASTM A615, A616 y A617 establecen su espaciamiento máximo y su altura mínima.

Una segunda variable importante es el esfuerzo en el acero. Estudios realizados por Gergely y Lutz (ver la referencia 6.2) y otros confirman que el ancho de la grieta es proporcional a f_s^n donde f_s es el esfuerzo en el acero y n es un exponente que varía en el intervalo de aproximadamente 1.0 a 1.4. Para esfuerzos en el acero en el intervalo de interés práctico, es decir, entre 20 y 36 klb/pulg^2, n puede tomarse igual a 1.0. El esfuerzo en el acero se calcula fácilmente con base en un análisis elástico de la sección fisurada (ver la sección 3.3*b*). Como opción, f_s puede tomarse igual a $0.60f_y$, de acuerdo con el Código ACI 10.6.4.

Experimentos realizados por Broms (ver la referencia 6.3) y otros demuestran que tanto el espaciamiento como el ancho de la grieta están relacionados con la distancia de recubrimiento de concreto d_c, medida desde el centro de la barra hasta la cara de concreto. En general, al aumentar el recubrimiento se aumenta el espaciamiento y el ancho de las grietas. Otra variable importante es la distribución del refuerzo en la zona de tensión de la viga. Por lo regular, para controlar el agrietamiento es mejor utilizar una cantidad grande de barras de diámetro pequeño para suministrar el área requerida A_s, que hacer uso de una cantidad mínima de barras grandes; las barras deben estar bien distribuidas en la zona de tensión del concreto.

b. La ecuación de Gergely-Lutz para calcular el ancho de las grietas

Con base en una investigación adelantada en la Universidad de Cornell (ver la referencia 6.2), la cual comprendió el análisis estadístico de una gran cantidad de datos experimentales, Gergely y Lutz propusieron la siguiente ecuación para predecir el máximo ancho de grieta en la cara de tensión de una viga:

$$w = 0.076\beta f_s \sqrt[3]{d_c A} \tag{6.1}$$

en la cual w es el ancho máximo de la grieta, en milésimas de pulgada, y f_s es el esfuerzo en el acero para la carga a la cual se desea determinar el ancho de la grieta, medido en klb/pulg^2. Los parámetros geométricos se ilustran en la figura 6.1 y son los siguientes:

donde d_c = espesor del recubrimiento de concreto medido desde la cara de tensión hasta el centro de la barra más cercana a esta cara, pulg
β = relación entre las distancias desde la cara de tensión y desde el centroide del acero hasta el eje neutro, igual a h_2/h_1
A = área de concreto que rodea una barra, igual al área total efectiva a tensión del concreto que rodea el refuerzo y que tiene el mismo centroide, dividido por el número de barras, pulg^2

La ecuación (6.1), que es aplicable sólo para vigas en las cuales se han utilizado barras corrugadas, incluye todos los factores identificados anteriormente con una influencia importante en el ancho de las grietas: esfuerzo en el acero, recubrimiento de concreto y la distribución del refuerzo en la zona de tensión del concreto. Asimismo, se incluye el factor β para tener en cuenta el aumento del ancho de la grieta con la distancia desde el eje neutro (ver la figura 6.1*b*).

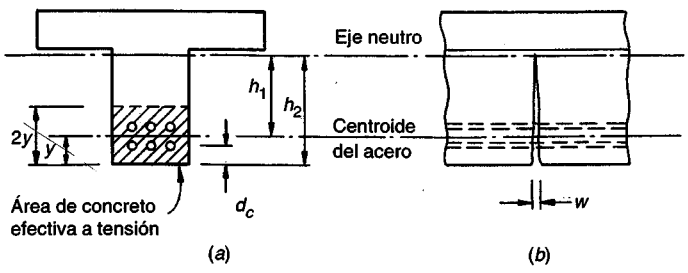


FIGURA 6.1
Parámetros geométricos para el cálculo del ancho de las grietas.

c. Anchos admisibles de las grietas

El ancho aceptable para las grietas de flexión en el estado de servicio depende principalmente de las condiciones de exposición y debe establecerse con relación a la posibilidad de corrosión del refuerzo. Las recomendaciones del comité ACI 224 (ver la referencia 6.1) se resumen en la tabla 6.1. Sin embargo, debe contarse con un buen criterio de ingeniería para establecer valores límites en casos particulares. Es preciso tener en cuenta que, a causa de la naturaleza aleatoria del agrietamiento, resulta factible que se presenten grietas individuales significativamente más anchas que las que predice la ecuación (6.1). El diseñador también debe tener en mente, sin embargo, que la ecuación (6.1) predice el ancho de la grieta en la superficie del elemento y se sabe que éste es menor en la interfase acero-concreto (ver la referencia 6.3). El aumento en el recubrimiento de concreto, aunque aumenta el ancho de la grieta en la superficie, puede ser benéfico para evitar la corrosión.

d. Efectos de las cargas cíclicas y de las cargas sostenidas

Tanto las cargas cíclicas como las sostenidas producen un incremento en el ancho de las grietas. Aunque existe una gran dispersión en los datos de ensayos, los resultados de ensayos de fatiga y de carga sostenida indican que, con el tiempo, puede esperarse que el ancho de la grieta se duplique (ver la referencia 6.1). Para la mayoría de las condiciones, el espaciamiento de las grietas no cambia en el tiempo para niveles constantes de esfuerzo sostenido o de intervalo de esfuerzo cíclico.

6.3 DISPOSICIONES DEL CÓDIGO ACI PARA EL CONTROL DE LAS GRIETAS

En vista de la naturaleza aleatoria del agrietamiento y de la alta dispersión en las mediciones del ancho de las grietas, aun en condiciones de laboratorio, no se justifica una precisión excesiva en el cálculo del ancho de las grietas. De acuerdo con esto, la ecuación (6.1) puede simplificarse para vigas comunes con la adopción de un valor representativo de $\beta = 1.2$. Entonces, se puede definir un parámetro z, como sigue:

$$z = f_s \sqrt[3]{d_c A} \tag{6.2}$$

en el cual

$$z = \frac{w}{0.076 \times 1.2} = \frac{w}{0.091}$$

TABLA 6.1
Anchos tolerables de las grietas para concreto reforzado

	Ancho tolerable de la grieta	
Condición de exposición	**pulg**	**mm**
Aire seco o membrana protectora	0.016	0.41
Humedad, aire húmedo, suelo	0.012	0.30
Químicos para deshielo	0.007	0.18
Agua de mar y rocío de agua de mar: humedecimiento y secado	0.006	0.15
Estructuras de contención de agua, se excluyen ductos sin presión	0.004	0.10

Fuente: Tomada de la referencia 6.1.

El ancho máximo de la grieta se puede controlar entonces imponiendo un límite superior al parámetro z. El Código ACI 10.6.4 especifica que z no debe exceder un valor de 175 para exposición interior y 145 para exposición exterior. Estos límites corresponden a anchos máximos de 0.016 y 0.013 pulg, respectivamente. Asimismo, el Código ACI 10.6.3 especifica que el refuerzo a tensión debe distribuirse bien en la zona de máxima tensión en el concreto. El Código ACI 9.4 establece que para diseño no debe usarse una resistencia a la fluencia f_y por encima de 80,000 lb/pulg^2.

Cuando se utilicen conjuntamente barras de diferentes diámetros, lo cual a menudo resulta ventajoso en la práctica, el área de concreto a tensión por barra debe calcularse utilizando un número equivalente de barras que se determina dividiendo el área total del refuerzo por el área de la mayor barra utilizada, conforme al Código ACI. Así que, si se suministra un área total de acero de 3.27 pulg^2 mediante una barra No. 10 más dos barras No. 9, el número equivalente de barras que debe utilizarse para calcular A, sería 3.27/1.27 = 2.6. Cuando se utilicen barras en paquete, Lutz (ver la referencia 6.4) recomienda que cada paquete se cuente como un equivalente a 1.4 barras en el cálculo de A, reconociendo el hecho de que las barras en paquete tienen un perímetro de adherencia superior al de una barra individual que tenga la misma área que el paquete.

Las ecuaciones (6.1) y (6.2) también pueden utilizarse para losas reforzadas en una dirección. Sin embargo, para losas comunes donde el espesor efectivo es menor que para vigas y el recubrimiento de concreto en la parte inferior de las barras puede ser aproximadamente 1 pulg, el valor representativo de β es casi 1.35 en lugar del valor de 1.2 para vigas. Para determinado ancho límite de grieta, los valores límites de z deben, por consiguiente, multiplicarse por la relación 1.2/1.35. Así que, el valor de z para losas no debe exceder de 155 para exposición interior y de 130 para exposición exterior, valores que corresponden a anchos de grieta de 0.016 pulg y de 0.013 pulg, respectivamente.

Cuando las alas de una viga T de concreto están en tensión, como en el caso de las zonas de momento negativo en vigas T continuas, la concentración del refuerzo en el alma puede causar un ancho excesivo de la grieta en la losa sobresaliente, aunque las grietas en la parte superior del alma sean finas y bien distribuidas. Para evitar esto, el refuerzo a tensión debe distribuirse a todo lo ancho del ala, en lugar de concentrarlo en la parte superior del alma. Sin embargo, debido a la pérdida de eficiencia en la transmisión de esfuerzos por cortante (*shear lag*), las barras más alejadas en dicha distribución estarán considerablemente menos esforzadas que aquellas que se encuentran sobre el alma, obteniéndose así un diseño antieconómico. A manera de compromiso razonable, el Código ACI 10.6.6 exige que el refuerzo a tensión para estos casos se distribuya en el ancho efectivo del ala o en un ancho igual a un décimo de la luz; el que sea menor. Si el ancho efectivo del ala excede un décimo de la luz, debe suministrarse algún refuerzo longitudinal en las porciones más alejadas del ala. La cantidad de ese refuerzo adicional se deja a criterio del diseñador, pero debe ser por lo menos equivalente al refuerzo de temperatura para losas (ver la sección 12.3) y se utiliza a menudo el doble de esta cantidad.

Para vigas con almas relativamente altas, debe colocarse algo de refuerzo cerca de las caras verticales del alma para controlar el ancho de las grietas en la zona de tensión del concreto por encima del nivel de las barras principales de refuerzo. Sin este acero se han observado grietas en el alma con anchos mayores que aquéllas a nivel de las barras principales. Con respecto al Código ACI 10.6.7, si la altura del alma excede 36 pulg, debe distribuirse uniformemente refuerzo longitudinal a lo largo de las dos caras laterales del elemento en una distancia igual a los $d/2$ más cercanos al acero a tensión por flexión. El área de este refuerzo lateral, A_{sk}, por pie de altura en cada cara lateral no debe ser menor que $0.012(d - 30)$ pulg^2 por pie. El espaciamiento máximo no debe exceder $d/6$ ó 12 pulg. El área *total* de refuerzo longitudinal lateral en ambas caras no necesita exceder la mitad del área requerida para el refuerzo a ten-

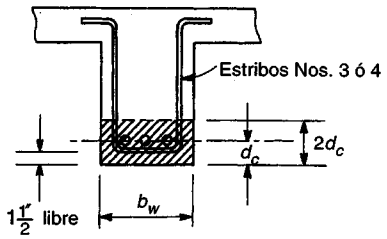


FIGURA 6.2
Número mínimo de barras en el alma de la viga.

sión por flexión. En general, la contribución de este acero lateral a la resistencia a flexión no se tiene en cuenta, aunque puede incluirse en los cálculos de resistencia si se utiliza un análisis de compatibilidad de deformaciones para establecer los esfuerzos en el acero lateral para la carga de falla a flexión.

Para vigas cuyo refuerzo principal a flexión está ubicado en una sola fila en el alma, puede desarrollarse una ayuda de diseño muy conveniente con base en la ecuación (6.2) que permite la tabulación del número mínimo de barras que satisfacen los requisitos del Código ACI para control de las grietas. Con referencia a la figura 6.2, el área total a tensión de concreto es igual a $2d_c b_w$. Así que el área a tensión por barra es

$$A = \frac{2d_c b_w}{m} \tag{a}$$

donde m es el número de barras en la fila única de refuerzo. Entonces, a partir de la ecuación (6.2),

$$\left(\frac{z}{f_s}\right)^3 = \frac{2d_c^2 b_w}{m} \tag{b}$$

a partir de la cual

$$m = \frac{2d_c^2 b_w}{(z/f_s)^3} \tag{c}$$

Para barras comunes grado 60, f_s puede tomarse igual a $0.6 \times 60 = 36$ klb/pulg, y para barras de diámetro d_b con 1.5 pulg de recubrimiento por debajo de los estribos, las cuales son generalmente barras Nos. 3 ó 4,

$$d_c = 2.0 + 0.5d_b \tag{d}$$

Este valor se sustituye entonces en la ecuación (c) para obtener

$$m = \frac{2(2.0 + 0.5d_b)^2 b_w}{(z/36)^3} \tag{6.3}$$

la cual da el número mínimo de barras que pueden utilizarse para satisfacer los requisitos de control de las grietas, en función del diámetro de la barra d_b y del ancho de la viga b_w, para el límite impuesto sobre z. La tabla A.9 del apéndice A presenta los valores de m, el número mínimo de barras que satisfacen los requisitos del Código ACI para control de grietas, tanto para exposición interior como exterior.

Ejemplo 6.1. Revisión del ancho de grietas. La viga T de la figura 6.3 sostiene un momento para cargas de servicio de 5850 klb-pulg. Estime el ancho máximo de la grieta que puede esperarse en la superficie inferior del elemento para la carga de servicio completa y determine si los detalles del refuerzo son satisfactorios, con relación al agrietamiento, para exposición exterior según el Código ACI.

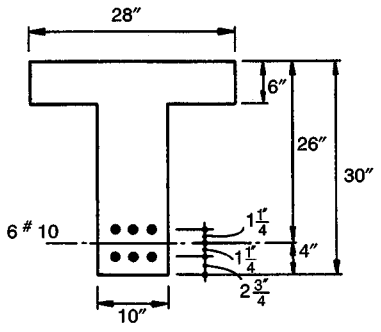


FIGURA 6.3
Viga T para la determinación del ancho de las grietas en el ejemplo 6.1.

Solución. El área total de acero a tensión suministrada por las seis barras No. 10 es 7.59 pulg^2. El esfuerzo en el acero para las cargas de servicio puede estimarse razonablemente bien si se toma el brazo interno igual a la distancia $d - t/2$:

$$f_s = \frac{M_s}{A_s(d - t/2)} = \frac{5850}{7.59 \times 23} = 33.6 \text{ klb/pulg}^2$$

(Como alternativa, el Código ACI permite utilizar $f_s = 0.6 f_y$, que da 36.0 klb/pulg^2). La distancia desde el centroide del acero hasta la cara de tensión de la viga es 4 pulg; así que, el área total efectiva de concreto para propósitos del cálculo del agrietamiento es $4 \times 2 \times 10 = 80$ pulg^2 y

$$A = \frac{80}{6} = 13.30 \text{ pulg}^2$$

Entonces, utilizando la ecuación (6.1) con $d_c = 2\frac{3}{4}$ pulg,

$$w = 0.076 \times 1.2 \times 33.6 \sqrt[3]{2.75 \times 13.30}$$
$$= 10 \text{ milésimas de pulg} = 0.010 \text{ pulg}$$

Alternativamente, mediante la ecuación (6.2),

$$z = 33.6 \sqrt[3]{2.75 \times 13.30} = 112$$

valor que está muy por debajo del límite de 145 impuesto por el Código ACI para construcción exterior. Si los resultados hubiesen sido desfavorables, sería preciso rediseñar utilizando un mayor número de barras de menor diámetro y reducir así el valor de A.

6.4 CONTROL DE DEFLEXIONES

Además de los límites impuestos al agrietamiento descritos en los numerales precedentes de este capítulo, se hace necesario imponer ciertos controles a las deflexiones de vigas con el fin de garantizar su funcionamiento. Las deflexiones excesivas pueden producir agrietamientos en los muros y en las particiones que sostienen, descuadres en las puertas y ventanas, problemas en los drenajes de cubierta, desalineación de maquinaria y equipos sensibles o deformación visualmente desagradable. Por tanto, es importante mantener el control de las deflexiones de una forma u otra, de manera que los elementos diseñados principalmente para cumplir con criterios de resistencia ante sobrecargas preestablecidas, se comporten también de modo satisfactorio durante el servicio normal.

En el pasado, el control de las deflexiones se lograba en forma indirecta limitando los esfuerzos para cargas de servicio en el concreto y en el acero a valores conservadoramente bajos. Los elementos que resultaban por lo general eran más grandes y, en consecuencia, más rígidos que los diseñados por los métodos actuales con base en la resistencia. Además, en la actualidad se utilizan comúnmente materiales de mayor resistencia y esto también lleva a elementos con secciones trans-

versales menores que son menos rígidos que antes. Como consecuencia de estos cambios en las condiciones de la práctica, el control de las deflexiones resulta cada vez más importante.

En la actualidad existen dos metodologías. La primera es indirecta y consiste en establecer límites superiores adecuados en la relación luz-espesor. Éste es un método simple y es satisfactorio en muchos casos donde las luces, las cargas, las distribuciones de las cargas y los tamaños y proporciones de los elementos están en los intervalos usuales. En otros casos, es vital calcular las deflexiones y comparar estas predicciones con valores límites especificados que pueden ser impuestos por los códigos o por requisitos especiales.

En los siguientes numerales resultará claro que los cálculos sólo pueden, en el mejor de los casos, proporcionar una guía en la estimación de los valores probables de deflexión real. Esto se debe a las incertidumbres relacionadas con las propiedades de los materiales, los efectos de agrietamiento y el historial de la aplicación de cargas para el elemento que se analiza. Por esta razón, en ningún caso se justifica una precisión extrema en los cálculos, puesto que es muy poco probable que se obtengan resultados precisos. Sin embargo, es suficiente conocer que, por ejemplo, la deflexión bajo la carga será de aproximadamente $\frac{1}{2}$ pulg en lugar de 2 pulg, mientras que es relativamente poco importante conocer si ésta va a ser en realidad $\frac{5}{8}$ pulg en lugar de $\frac{1}{2}$ pulg.

En general, las deflexiones de interés son aquellas que ocurren durante la vida de servicio normal del elemento. Durante el servicio, un elemento sostiene la carga muerta completa más alguna fracción o toda la carga viva especificada de servicio. Las disposiciones de seguridad del Código ACI y otras especificaciones de diseño similares garantizan que, para cargas hasta de la magnitud de las cargas de servicio completas, los esfuerzos tanto en el acero como en el concreto se mantienen en los intervalos elásticos. En efecto, las deflexiones que ocurren una vez que se aplica la carga, llamadas *deflexiones instantáneas*, pueden calcularse con base en las propiedades del elemento elástico no fisurado o de este mismo elemento fisurado o de alguna combinación de éstas (ver la sección 3.3).

Sin embargo, y como se destacó en las secciones 2.8 y 2.11, además de las deformaciones del concreto, que se presentan inmediatamente se ha aplicado la carga, existen otras deformaciones que ocurren de modo gradual durante algún periodo. Estas deformaciones dependientes del tiempo son causadas por el flujo plástico del concreto y por la retracción de fraguado. Como resultado de estos efectos, los elementos de concreto reforzado continúan deflectándose con el paso del tiempo. Las deflexiones a largo plazo continúan durante un periodo de muchos años y eventualmente pueden ser hasta dos y más veces las deflexiones elásticas iniciales. Es claro que los métodos para predecir tanto las deflexiones instantáneas como las dependientes del tiempo resultan esenciales.

6.5 DEFLEXIONES INSTANTÁNEAS

Las deflexiones elásticas pueden expresarse en la forma general

$$\Delta = \frac{f(\text{cargas, luces, apoyos})}{EI}$$

donde EI es la rigidez a flexión y f (cargas, luces, apoyos) es una función de la carga, de la luz y de la distribución de los apoyos para un caso particular. Por ejemplo, la deflexión de una viga simplemente apoyada con carga uniforme es $5wl^4/384EI$, de manera *que* $f = 5wl^4/384$. Ecuaciones de deflexión similares se han tabulado o pueden calcularse fácilmente para muchos otros casos de distribución de cargas y para luces simples, empotradas o continuas, y así pueden determinarse las funciones f correspondientes. El problema específico para las estructuras de concreto reforzado consiste entonces en determinar la rigidez a flexión apropiada EI para un elemento que está conformado por dos materiales con propiedades y comportamientos tan diferentes como el acero y el concreto.

Si el momento máximo en un elemento a flexión es tan pequeño que el esfuerzo de tensión en el concreto no excede el módulo de rotura f_r, no se presentarán grietas de tensión por flexión; entonces, la sección completa no fisurada está disponible para resistir los esfuerzos y para suministrar la rigidez. Este estado de cargas se analizó en la sección 3.3*a*. De acuerdo con este análisis, el momento de inercia efectivo para este intervalo bajo de cargas es el correspondiente a la sección transformada no fisurada I_{ut}, y E es el módulo elástico del concreto E_c determinado por la ecuación (2.3). Entonces, para este rango de cargas,

$$\Delta_{iu} = \frac{f}{E_c I_{ut}} \qquad (a)$$

Para cargas mayores se forman grietas de tensión por flexión. Además, si el esfuerzo de corte excede v_{cr} [ver la ecuación (4.3)] y si se utiliza refuerzo en el alma para resistir estos esfuerzos, pueden presentarse grietas diagonales para las cargas de servicio. En la región de las grietas de flexión la posición del eje neutro varía: directamente en cada grieta éste está localizado al nivel calculado para la sección transformada fisurada (ver la sección 3.3*b*); en puntos medios entre las grietas, éste desciende hasta un sitio cercano al calculado para la sección transformada no fisurada. De manera similar, el agrietamiento de tensión por flexión hace que el momento efectivo de inercia sea el de la sección transformada fisurada en las zonas adyacentes de la grieta a tensión por flexión y se aproxima al de la sección transformada no fisurada en los puntos medios entre las grietas, con una transición gradual entre estos dos extremos.

Puede verse que el valor del momento de inercia local varía en aquellas partes de la viga donde el momento flector excede el momento de agrietamiento de la sección

$$M_{cr} = \frac{f_r I_{ut}}{y_t} \qquad (6.4)$$

donde y_t es la distancia desde el eje neutro hasta la cara de tensión y f_r es el módulo de rotura. La variación exacta de I depende de la forma del diagrama de momentos y del patrón de agrietamiento, y es difícil de determinar. Esto hace que el cálculo exacto de una deflexión sea imposible.

Sin embargo, gran cantidad de estudios documentados (ver la referencia 6.5) demuestran que las deflexiones Δ_{ic} que ocurren en una viga después de que el momento máximo M_a alcanza y excede el momento de agrietamiento M_{cr}, pueden calcularse utilizando un momento de inercia efectivo I_e; es decir,

$$\Delta_{ic} = \frac{f}{E_c I_e} \qquad (b)$$

donde

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_{ut} + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \quad \text{y} \quad \leq I_{ut} \qquad (6.5)$$

donde I_{cr} es el momento de inercia para la sección transformada fisurada.

En la figura 6.4 se dibuja el momento de inercia efectivo estipulado por la ecuación (6.5) como una función de la relación M_a/M_{cr} (el valor recíproco de la relación de momentos utilizada en la ecuación). Puede verse que, para valores del momento máximo M_a, menores que el momento de agrietamiento M_{cr}, es decir, para M_a/M_{cr} menor que 1.0, $I_e = I_{ut}$. Para valores crecientes de M_a, I_e se aproxima a I_{cr}, y para valores de M_a/M_{cr} de 3 o más, I_e es casi igual a I_{cr}. Los valores comunes de M_a/M_{cr} para cargas completas de servicio varían aproximadamente entre 1.5 y 3.

La figura 6.5 indica el aumento de las deflexiones con un incremento en el momento para una viga con luz simple e ilustra la utilización de la ecuación (6.5). Para momentos no mayores que M_{cr}, las deflexiones prácticamente son proporcionales a los momentos y la deflexión para la cual se inicia el agrietamiento se obtiene a partir de la ecuación (*a*) con $M = M_{cr}$. Para momentos mayores,

el momento de inercia efectivo I_e, se vuelve cada vez más pequeño conforme a la ecuación (6.5) y las deflexiones se encuentran mediante la ecuación (*b*) para el nivel de carga de interés. El momento M_2 correspondería, por ejemplo, al de la carga de servicio completa, mientras que el momento M_1 representaría el momento para la carga muerta en un caso común. Una curva momento-deflexión correspondiente a la línea E_cI_{cr}, representa un límite superior para las deflexiones en forma consistente con la figura 6.4, excepto que, para cargas un poco mayores a las de servicio, la respuesta no lineal del acero o del concreto, o ambas, produciría un aumento adicional no lineal en las deflexiones.

Observe que para calcular el incremento en la deflexión causado por la carga viva, que ocasiona un incremento en el momento $M_2 - M_1$, se requiere un cálculo en dos etapas: la primera etapa para calcular la deflexión Δ_2 como consecuencia de las cargas viva y muerta, y la segunda para calcular la deflexión Δ_1 por la sola carga muerta, cada una con el valor correspondiente de I_e. Entonces el incremento en la deflexión ocasionado por la carga viva se encuentra con el cálculo de $\Delta_2 - \Delta_1$.

La mayor parte de las luces de concreto reforzado son continuas y no simplemente apoyadas. Los conceptos desarrollados anteriormente para luces simples pueden aplicarse en estos casos,

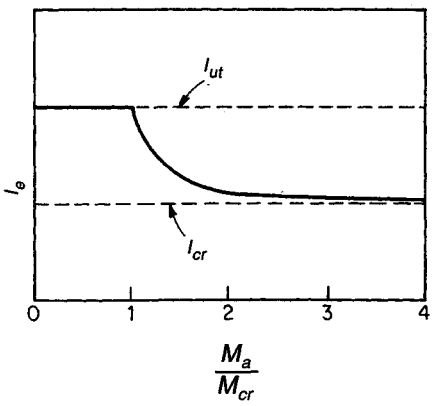


FIGURA 6.4
Variación de I_e, con la relación de momentos.

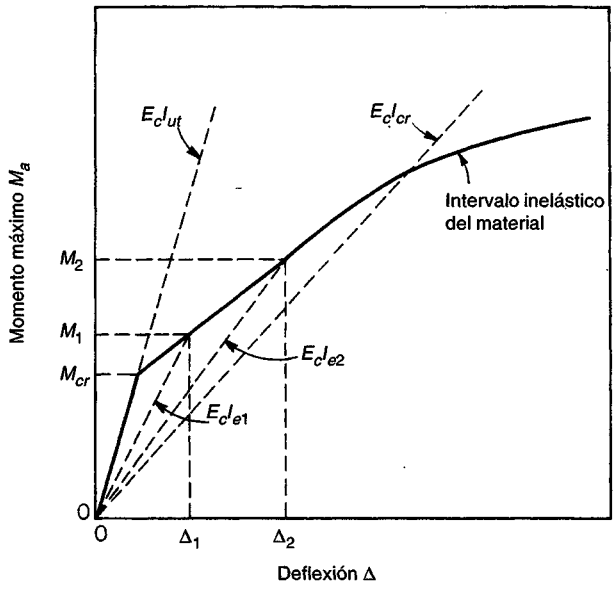


FIGURA 6.5
Deflexión de una viga de concreto reforzado.

pero debe tenerse en cuenta que el diagrama de momentos para determinada luz incluye tanto regiones positivas como negativas, que reflejan la restricción a la rotación proporcionada en los extremos de la luz por la acción continua de pórtico. Con respecto al Código ACI, el momento de inercia efectivo para luces continuas puede encontrarse simplemente promediando los valores. Este método se describe en la sección 6.7c.

Un problema fundamental que se presenta para luces continuas consiste en que, aunque las deflexiones se basan en el diagrama de momentos, este diagrama depende a su vez de la rigidez a flexión *EI* para cada elemento del pórtico. Como se demostró, la rigidez a la flexión depende de la extensión del agrietamiento, el cual depende, a su vez, de los momentos que deben determinarse.

Se podría utilizar un procedimiento iterativo, inicialmente con el análisis de los pórticos con el supuesto de elementos de concreto no fisurados, con la determinación de los momentos, con el cálculo de los términos efectivos *EI* para todos los elementos, luego con la reformulación de los momentos, con el ajuste de los valores de *EI*, etc. El proceso podría continuarse el número de iteraciones necesarias para que los cambios no sean significativos. Sin embargo, este enfoque sería muy costoso y requeriría de mucho tiempo, aun con la ayuda del computador.

Por lo general, se adopta un método mucho más aproximado. Las rigideces a flexión de los elementos para el análisis del pórtico se basan simplemente en las propiedades de la sección transversal rectangular de concreto no fisurada. Esto puede sustentarse con el hecho de que los momentos en un pórtico continuo dependen únicamente de los valores *relativos* de *EI* en sus elementos, no de los valores *absolutos*. Entonces, si se utiliza un supuesto consistente para todos los elementos, por ejemplo, secciones no fisuradas, los resultados deben ser válidos. Aunque el agrietamiento es con seguridad mayor en vigas que en columnas, lo cual reduce el valor efectivo de *EI* para las vigas, esto se compensa en buena forma para los casos comunes, por el efecto rigidizante de las alas en las regiones de flexión positiva en construcciones con vigas T continuas.

6.6 DEFLEXIONES POR CARGAS QUE ACTÚAN A LARGO PLAZO

Las deflexiones iniciales se incrementan de modo significativo si las cargas se sostienen durante un periodo bastante amplio, principalmente a causa de los efectos de la retracción de fraguado y del flujo plástico; estos dos efectos se combinan por lo general para el cálculo de las deflexiones. El flujo plástico domina en la mayor parte de los casos pero para algunos tipos de elementos, las deflexiones por retracción de fraguado son importantes y deben estudiarse independientemente (ver la sección 6.8).

En la sección 2.8 se destacó que las deformaciones por flujo plástico del concreto son directamente proporcionales a los esfuerzos de compresión hasta y más allá del intervalo de cargas usuales de servicio. Éstas aumentan asintóticamente con el tiempo y, para un mismo nivel de esfuerzo, resultan mayores para concretos de baja resistencia que para concretos de alta resistencia. La relación entre la deformación unitaria adicional dependiente del tiempo y la deformación unitaria elástica inicial la determina el coeficiente de flujo plástico C_{cu} (ver la tabla 2.1).

Para una viga de concreto reforzado, la deformación unitaria a largo plazo es mucho más complicada que para un cilindro cargado axialmente, puesto que mientras el concreto fluye bajo carga sostenida, el acero no lo hace. La situación para una viga de concreto reforzado se ilustra en la figura 6.6. Para carga sostenida, la deformación unitaria inicial ϵ_i en la cara superior de la viga aumenta a causa del flujo plástico en una cantidad ϵ_t, mientras que la deformación ϵ_s en el acero permanece esencialmente constante. Puesto que el eje de rotación del diagrama de distribución de deformaciones unitarias está al nivel del acero y no del eje neutro de la sección elástica fisurada, el eje neutro se mueve hacia abajo como resultado del flujo plástico y

$$\frac{\phi_t}{\phi_i} < \frac{\epsilon_t}{\epsilon_i} \qquad (a)$$

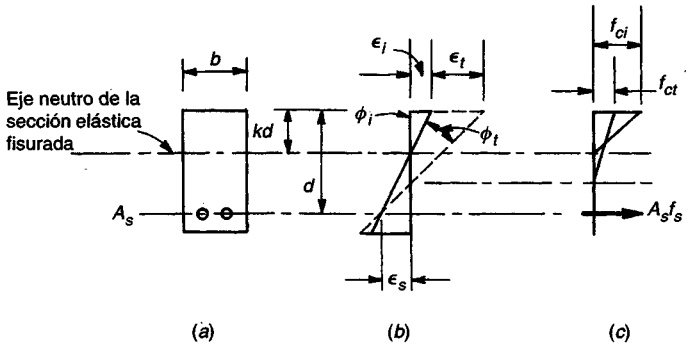


FIGURA 6.6
Efecto del flujo plástico del concreto en la curvatura: (*a*) sección transversal de la viga; (*b*) deformaciones unitarias; (*c*) esfuerzos y fuerzas (*adaptada de la referencia 6.6.*)

demostrando por qué los coeficientes normales de flujo plástico no pueden aplicarse a curvaturas iniciales para obtener curvaturas asociadas al flujo plástico (y por tanto deflexiones).

La situación se complica aún más. Como efecto del descenso del eje neutro asociado con el flujo plástico (ver la figura 6.6*b*) y del aumento correspondiente del área de compresión, el esfuerzo de compresión requerido para producir determinada resultante C para equilibrar la fuerza $T = A_s f_s$ es menor que antes, en contraste con la situación del flujo plástico en un cilindro a compresión, puesto que dicho flujo en la viga ocurre para un esfuerzo que disminuye gradualmente. Por otro lado, con un eje neutro ahora más bajo, el brazo interno de palanca entre las resultantes de las fuerzas a compresión y a tensión es menor, requiriéndose así un incremento en ambas resultantes para mantener un momento constante. Esto a su vez requiere un pequeño aumento en el esfuerzo y por tanto en las deformaciones del acero; así que, ϵ_s no es constante como se supuso originalmente.

A causa de las anteriores complejidades, en la práctica es necesario calcular las deflexiones adicionales dependientes del tiempo para vigas, ocasionadas por el flujo plástico (y la retracción de fraguado), utilizando una metodología simplificada y empírica mediante la cual las deflexiones iniciales elásticas se multipliquen por un factor λ para obtener las deflexiones adicionales a largo plazo. Los valores de λ a utilizar en el diseño se basan en datos de deflexiones a largo plazo medidas en vigas de concreto reforzado (ver las referencias 6.6 a 6.9). Así que

$$\Delta_t = \lambda \Delta_i \tag{6.6}$$

donde Δ_t es la deflexión *adicional* a largo plazo producto del efecto combinado del flujo plástico y de la retracción de fraguado, y Δ_i es la deflexión elástica inicial calculada con los métodos de la sección 6.5.

El coeficiente λ depende de la duración de la carga sostenida. También depende de si la viga tiene únicamente refuerzo A_s en el lado de tensión o si se proporciona refuerzo longitudinal adicional A_s en el lado de compresión. En este último caso, las deflexiones a largo plazo se reducen de manera significativa, debido a que cuando no se suministra refuerzo a compresión, el concreto a compresión se somete a un flujo plástico y a una retracción de fraguado no restringidos. Por otro lado, puesto que el acero no está sujeto a flujo plástico, si se colocan barras adicionales cerca de la cara de compresión, éstas van a resistir y, en consecuencia, van a reducir la cantidad de flujo plástico, la retracción de fraguado y las deflexiones correspondientes (ver la referencia 6.9). El acero a compresión puede incluirse en la viga, exclusivamente por esta razón. En la sección 6.7 se presentan valores específicos de λ utilizados para tener en cuenta la influencia del flujo plástico y del refuerzo a compresión.

Si una viga soporta determinada carga sostenida W (por ejemplo, la carga muerta más la carga de tráfico promedio en un puente) y se somete a una carga viva considerable de corta duración P (por ejemplo, el peso de un vehículo excepcionalmente muy pesado), la deflexión máxima total bajo esta condición de carga combinada se obtiene de la siguiente forma:

1. Se calcula la deflexión instantánea Δ_{iw} causada por la carga sostenida W mediante los métodos de la sección 6.5
2. Se calcula la deflexión adicional a largo plazo ocasionada por W; es decir,

$$\Delta_{tw} = \lambda \Delta_{iw}$$

3. Entonces, la deflexión total producto de la parte sostenida de la carga es

$$\Delta_w = \Delta_{iw} + \Delta_{tw}$$

4. Para calcular la deflexión adicional instantánea causada por la carga P de corta duración, debe tenerse en cuenta el hecho de que la relación carga-deflexión después del agrietamiento no es lineal, como se ilustra en la figura 6.5. De ahí que,

$$\Delta_{ip} = \Delta_{i(w+p)} - \Delta_{iw}$$

donde $\Delta_{i(w+p)}$ es la deflexión total instantánea que se obtendría si W y P fueran aplicadas simultáneamente; ésta se calcula utilizando I_e determinada con el momento causado por $W + P$.

5. Entonces, la deflexión total bajo la carga sostenida más la carga pesada de corta duración es

$$\Delta = \Delta_w + \Delta_{ip}$$

En el cálculo de las deflexiones debe darse especial cuidado al historial de aplicación de cargas, es decir, a la secuencia en el tiempo en la cual se aplican las cargas, al igual que a la magnitud de éstas. La carga pico de corta duración en la viga del puente descrita anteriormente, pudo haberse aplicado más temprano en la vida del elemento, antes de que hubieran ocurrido las deflexiones dependientes del tiempo. De manera similar, en el caso de edificios se colocan a menudo cargas muy pesadas, como consecuencia, por ejemplo, del almacenamiento de materiales durante la construcción. Estas cargas temporales pueden ser iguales o aún mayores que la carga viva de diseño. El estado de agrietamiento corresponderá al de la *carga máxima* que haya sido aplicada y para esta condición fisurada es que debe calcularse la deflexión para cargas sostenidas, en la cual se basan los efectos a largo plazo. En estos casos, para recalcular las deflexiones para cargas sostenidas debe utilizarse el valor de I_e para la carga máxima alcanzada, antes de calcular los efectos a largo plazo.

Esto se ilustrará con referencia a la figura 6.7 que presenta el gráfico de carga-deflexión para una viga de un edificio diseñada para resistir las cargas muerta y viva especificadas. Suponga primero que las cargas muertas y vivas aumentan monotónicamente. A medida que se aplica la carga muerta completa W_d, la curva carga-deflexión sigue el recorrido 0-1 y la deflexión para carga muerta Δ_d se encuentra utilizando I_{e1}, calculada a partir de la ecuación (6.5), con $M_a = M_d$. Los efectos dependientes del tiempo de la carga muerta serían $\Delta\lambda_d$. A medida que se aplica la carga viva, se sigue el recorrido 1-2. La deflexión para carga viva Δ_l se encontrará en dos pasos como se describió en la sección 6.5, primero con la determinación del valor de Δ_{d+l} con base en I_{e2}, con M_a en la ecuación (6.5) igual a M_{d+l} y luego, restando la deflexión por carga muerta, Δ_d.

Por otro lado, si se aplicaran cargas de construcción de corta duración y luego se retiraran, se seguiría el recorrido de deflexión 1-2-3. Entonces, para carga muerta sola, la deflexión que resulta sería Δ'_d. Observe que esta deflexión puede encontrarse en un solo paso con W_d, pero utilizando I_{e2} correspondiente a la máxima carga alcanzada. La deflexión a largo plazo sería ahora $\lambda\Delta'_d$ significativamente *mayor* que antes.

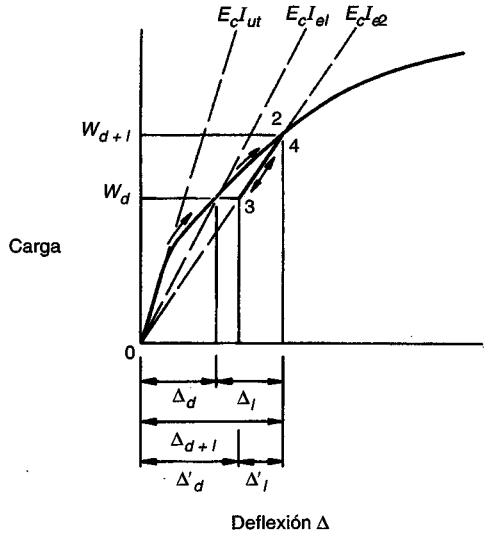


FIGURA 6.7
Efectos del historial de la aplicación de las cargas en las deflexiones de una viga de un edificio.

Por otra parte, si se aplica luego la carga *viva* de diseño completa, la deflexión seguiría el recorrido 3-4 y la deflexión para carga viva sería *menor* que para el primer caso. Ésta también puede calcularse en un solo paso, utilizando W_l sola en este caso y con un momento de inercia igual a I_{e2}.

Es obvio que para calcular las deflexiones, el ingeniero debe anticipar tan precisamente como sea posible, tanto las magnitudes como la secuencia de aplicación en el tiempo de las cargas. Aunque las deflexiones a largo plazo se calculan a menudo con el supuesto de una carga monotónica, y considerando que los efectos inmediatos y a largo plazo de la carga muerta ocurren antes de la aplicación de la carga viva, esta situación no es realista en muchos casos prácticos.

6.7 DISPOSICIONES DEL CÓDIGO ACI PARA EL CONTROL DE LAS DEFLEXIONES

a. Relaciones mínimas altura-luz

Como se subrayó en la sección 6.4, actualmente se siguen dos metodologías para el control de las deflexiones, ambas aceptables desde el punto de vista de las disposiciones del Código ACI, dentro de límites prescritos. La más simple consiste en imponer restricciones a la altura mínima h del elemento, en relación con su luz l, para garantizar que la viga tenga suficiente rigidez y que haya poca probabilidad de que las deflexiones causen problemas durante el servicio. Las deflexiones están influidas en forma importante por las condiciones de apoyo (por ejemplo, una viga simplemente apoyada y cargada de modo uniforme se deflectará cinco veces más que otra viga idéntica con apoyos empotrados), de manera que las alturas mínimas deben variar en función de las condiciones de restricción de los extremos de las luces.

De acuerdo con el Código ACI 9.5.2, las mínimas alturas determinadas en la tabla 6.2 son aplicables a construcciones reforzadas en una dirección donde *no sostengan* o se unan a particiones u otras construcciones que puedan dañarse por deflexiones grandes, a menos que los cálculos de deflexiones indiquen que se puede utilizar una altura menor sin que se produzcan efectos adversos. Los valores de la tabla 6.2 pueden utilizarse directamente para concretos de peso normal con w_c = 145 lb/pie^3 y refuerzo con f_y = 60,000 lb/pulg^2. Para elementos que utilicen concretos livianos, con densidades en el intervalo de 90 a 120 lb/pie^3, los valores de la tabla 6.2 deben multiplicarse por $(1.65 - 0.005w_c) \geq 1.09$. Para resistencias a la fluencia diferentes de 60,000 lb/pulg^2, los valores deben multiplicarse por $(0.4 + f_y/100{,}000)$.

TABLA 6.2
Alturas mínimas de vigas no preesforzadas o losas reforzadas en una dirección, a menos que se calculen las deflexiones

Elemento	Altura mínima, h			
	Simplemente apoyada	Un extremo	Ambos extremos continuo	Voladizo continuos
	Elementos que no sostienen o están unidos a particiones o a otro tipo de construcción que puedan dañarse por deflexiones grandes			
Losas macizas reforzadas en una dirección	$l/20$	$l/24$	$l/28$	$l/10$
Vigas o losas con nervios en una dirección	$l/16$	$l/18.5$	$l/21$	$l/8$

b. Cálculo de las deflexiones instantáneas

Cuando se presente la necesidad de utilizar elementos con alturas menores que las permitidas por la tabla 6.2, o cuando los elementos sostienen una construcción que puede sufrir daños por deflexiones grandes o para elementos preesforzados, deben calcularse las deflexiones y compararse con los valores límite (ver la sección 6.7e). El procedimiento para el cálculo de deflexiones, cuando se requiere, es como se describe en las secciones 6.5 y 6.6. Para propósitos de diseño el momento de inercia de la sección transformada no fisurada I_{ut}, se debe remplazar por el correspondiente al de la sección bruta de concreto I_g, sin tener en cuenta el refuerzo, sin que con esto se cometa un error serio. Con esta simplificación, las ecuaciones (6.4) y (6.5) pueden remplazarse por la siguiente:

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \tag{6.7}$$

y

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \qquad \text{y} \qquad \leq I_g \tag{6.8}$$

El módulo de rotura para concreto de peso normal debe tomarse igual a

$$f_r = 7.5\sqrt{f'_c} \tag{6.9a}$$

Para concreto liviano, es probable que no se conozca el módulo de rotura, pero a menudo se especifica la resistencia a la tensión indirecta f_{ct}, que se determina mediante ensayos. Para concretos de peso normal, la resistencia a la tensión indirecta generalmente se supone igual a $f_{ct} = 6.7\sqrt{f'_c}$. De acuerdo con esto, el término $\sqrt{f'_c}$ de la ecuación (6.9*a*) puede sustituirse por $f'_{ct}/6.7$ con el fin de calcular el módulo de rotura. Entonces, para concreto liviano, si se conoce f_{ct}

$$f_r = 7.5\frac{f_{ct}}{6.7} = 1.12 f_{ct} \tag{6.9b}$$

donde $f_{ct}/6.7$ no debe exceder $\sqrt{f'_c}$, según el Código ACI 9.5.2. Como alternativa, en vez de utilizar información de ensayos de resistencia a la tensión, el valor de f_r puede calcularse mediante la ecuación (6.9*a*) multiplicada por 0.75 para concretos con "agregados livianos" y por 0.85 para concretos con "arenas livianas".

c. Luces continuas

Para luces continuas, el Código ACI 9.5.2 propone un promedio simple de los valores obtenidos a partir de la ecuación (6.8) para las secciones críticas de momentos positivo y negativo, es decir,

$$I_e = 0.50I_{em} + 0.25(I_{e1} + I_{e2}) \qquad (6.10a)$$

donde I_{em} es el momento de inercia efectivo para la sección en el centro de la luz e I_{e1} e I_{e2} son los correspondientes a las secciones de momento negativo en los extremos respectivos de la viga, cada uno calculado con la ecuación (6.8) utilizando el valor aplicable de M_a. En la referencia 6.10 se demuestra que puede obtenerse un resultado un poco mejor para el caso de elementos prismáticos continuos utilizando un promedio ponderado para vigas con sus dos extremos continuos, igual a

$$I_e = 0.70I_{em} + 0.15(I_{e1} + I_{e2}) \qquad (6.10b)$$

y para vigas con un extremo continuo y el otro simplemente apoyado, igual a

$$I_e = 0.85_{em} + 0.15I_{e1} \qquad (6.10c)$$

donde I_{e1} es el momento de inercia efectivo en el extremo continuo. El Código ACI permite como opción remplazar el valor de I_e para vigas prismáticas continuas por el valor obtenido de la ecuación (6.8) en el centro de la luz; para voladizos, puede utilizarse el valor de I_e calculado en la sección del apoyo.

Cuando se determina el valor de I_e, las deflexiones pueden calcularse con el método de las áreas de momento (ver la referencia 6.11), que estudia las rotaciones de las tangentes a la curva elástica en los apoyos. En general, para calcular la deflexión máxima se puede utilizar la carga que produce el máximo momento positivo, y la deflexión en el centro de la luz puede utilizarse normalmente como una aproximación aceptable de la deflexión máxima. En estos casos son muy útiles los coeficientes para el cálculo de las deflexiones, como los deducidos por Branson en la referencia 6.5. Para elementos en los cuales los apoyos pueden considerarse como totalmente empotrados o articulados, es posible hacer uso de las ecuaciones disponibles en varios manuales.

d. Multiplicadores para deflexiones a largo plazo

Con base en estudios empíricos (véanse las referencias 6.5, 6.7 y 6.9), el Código ACI 9.5.2 especifica que las deflexiones *adicionales* a largo plazo Δ_l, ocasionadas por los efectos combinados del flujo plástico y de la retracción de fraguado, deben calcularse multiplicando las deflexiones inmediatas Δ_i, por el factor

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'} \qquad (6.11)$$

donde $\rho' = A'_s = bd$ y ξ es un coeficiente dependiente del tiempo, que varía como se indica en la figura 6.8. En la ecuación (6.11) la cantidad $1/(1 + 50\rho')$ es un factor de reducción, básicamente una propiedad de la sección, que refleja el efecto benéfico del refuerzo a compresión A'_s en la reducción de las deflexiones a largo plazo, mientras que ξ es una propiedad del material que depende de las características de flujo plástico y de retracción de fraguado. Conforme al Código ACI para luces simples y continuas, el valor de ρ' usado en la ecuación (6.11) es el correspondiente a la sección en el centro de la luz o el de los apoyos para voladizos. La ecuación (6.11) y los valores de ξ determinados por la figura 6.8 se aplican a vigas construidas tanto con concretos de peso normal como con concretos livianos. Las deflexiones adicionales dependientes del tiempo se encuentran, entonces, remplazando los valores de λ de la ecuación (6.11) en la ecuación (6.6).

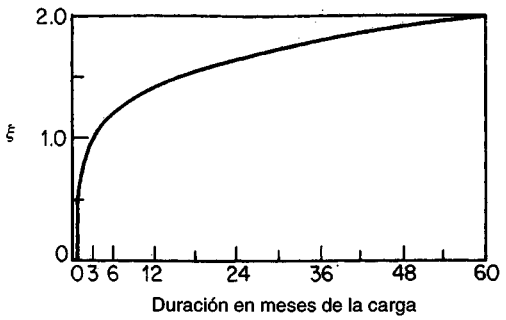


FIGURA 6.8
Variación de ξ con el tiempo para el cálculo de las deflexiones a largo plazo.

Los valores de ξ dados en el Código ACI y en su Comentario, son satisfactorios para vigas normales y para losas reforzadas en una dirección, pero pueden subestimar el valor de las deflexiones dependientes del tiempo, en el caso de losas en dos direcciones, para las cuales Branson sugiere un valor para cinco años de $\xi = 3.0$ (ver la referencia 6.5).

Investigaciones recientes en la Universidad de Cornell indican que la ecuación (6.11) no refleja en forma adecuada el flujo plástico reducido, característico en los concretos de alta resistencia que se utilizan en la actualidad (ver la referencia 6.12). Como se indica en la tabla 2.1, el coeficiente de flujo plástico para concretos de alta resistencia puede llegar a ser hasta la mitad del valor correspondiente para concretos normales. Claramente, las deflexiones a largo plazo para vigas de concreto de alta resistencia bajo cargas sostenidas, expresadas con relación a las deflexiones elásticas inmediatas, serán correspondientemente menores. Esto sugiere un valor inferior para el *modificador del material*, ξ, en la ecuación (6.11) y en la figura 6.8. Por otro lado, la influencia del acero a compresión en la reducción de las deflexiones por flujo plástico en vigas con concretos de alta resistencia es menos pronunciada, la cual requiere un ajuste en el *modificador por la sección*, $1/(1 + 50\rho')$, para dicha ecuación.

Con base en ensayos a largo plazo llevados a cabo en la Universidad de Cornell, correlacionados con resultados de otros seis programas experimentales, se recomienda la siguiente forma modificada de la ecuación (6.11):

$$\lambda = \frac{\mu\xi}{1 + 50\mu\rho'} \tag{6.12}$$

en la cual

$$\mu = 1.4 - f'_c/10{,}000$$
$$0.4 \leq \mu \leq 1.0 \tag{6.13}$$

La ecuación propuesta ofrece resultados idénticos a los de la ecuación (6.11) para concretos con resistencias de 4000 lb/pulg^2 y menores, y estima con mucha mayor precisión los resultados para concretos con resistencias entre 4000 y 12,000 lb/pulg^2.

e. Deflexiones permitidas

Para garantizar un comportamiento satisfactorio para las condiciones de servicio, el Código ACI 9.5.2 impone ciertos límites en las deflexiones calculadas según los procedimientos descritos con anterioridad. Estos límites se presentan en la tabla 6.3. Los límites dependen de si el elemento sirve de apoyo o está unido a otros elementos no estructurales, y de si estos mismos pueden sufrir daño o no por deflexiones grandes. Cuando se calculan las deflexiones a largo plazo, pueden restarse las deflexiones que ocurren antes de la unión de los elementos no estructurales; para este propósito resulta útil la información de la figura 6.8. De acuerdo con el Código ACI, los últimos dos límites de la tabla 6.3 pueden excederse bajo ciertas condiciones.

TABLA 6.3
Máximas deflexiones admisibles calculadas

Tipo de elemento	Deflexiones para tener en cuenta	Deflexión límite
Cubiertas planas que no sostienen ni están unidas a elementos no estructurales que puedan dañarse por deflexiones grandes	Deflexión instantánea debida a la carga viva L	$\frac{l}{180}$
Pisos que no sostienen ni están unidos a elementos no estructurales que puedan dañarse por deflexiones grandes	Deflexión instantánea debida a la carga viva L	$\frac{l}{360}$
Cubiertas o pisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que puedan dañarse por deflexiones grandes	La parte de la deflexión total que ocurre después de la construcción de los elementos no estructurales, o sea la suma de las deflexiones a largo plazo como consecuencia de todas las cargas sostenidas y las deflexiones instantáneas que ocasiona cualquier carga viva adicional	$\frac{l}{480}$
Cubiertas o pisos que sostienen o estánunidos a elementos no estructurales que pueden no dañarse por deflexiones grandes		$\frac{l}{240}$

Ejemplo 6.2. Cálculo de deflexiones. La viga de la figura 6.9 hace parte del sistema de entrepisos de una edificación de apartamentos y debe diseñarse para sostener una carga muerta calculada w_d de 1.1 klb/pie y una carga viva de servicio w_l de 2.2 klb/pie. De la carga viva total, el 20 por ciento es de carácter permanente, mientras que el 80 por ciento restante se aplicará sólo en forma intermitente en toda la vida de la estructura. Para las máximas cargas muertas y vivas, el diagrama de momentos es el que aparece en la figura 6.9*c*. La viga soportará particiones no estructurales que podrían sufrir daño en caso de ocurrir deflexiones grandes. Éstas se instalarán poco tiempo después de que se retire el apuntalamiento y de que comiencen a actuar las cargas muertas, pero antes de que se presente un flujo plástico significativo. Calcule la parte de la deflexión total que puede afectar desfavorablemente las particiones, es decir, la suma de las deflexiones a largo plazo ocasionadas por la carga muerta y por la carga viva parcial, más la deflexión inmediata que ocasiona la parte no permanente de la carga viva. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 2500$ lb/pulg^2 y $f_y = 40$ klb/pulg^2.

Solución. Para los materiales especificados, $E_c = 57{,}000\sqrt{2500} = 2.85 \times 10^6$ lb/pulg^2, y con $E_s = 29 \times 10^6$ lb/pulg^2, la relación modular es de $n = 10$. El módulo de rotura $f_r = 7.5/\sqrt{2500} = 375$/lb/pulg^2. El momento de inercia efectivo se calculará para el diagrama de momentos que se ilustra en la figura 6.9*c* correspondiente a la carga de servicio completa, suponiendo un nivel de agrietamiento controlado por esta carga aunque ésta sea intermitente. En la región de momento positivo, el eje centroidal de la sección T no fisurada de la figura 6.9*b* se determina tomando momentos con respecto a la cara superior, y se obtiene un valor de 7.66 pulg desde esa cara para lo cual se genera un valor de $I_g = 33{,}160$ pulg^4. En forma similar, el eje centroidal de la sección T transformada y fisurada, que se presenta en la figura 6.9*d*, está localizado a 4.14 pulg por debajo de la parte superior de la losa e $I_{cr} = 13{,}180$ pulg^4. El momento de fisuración se encuentra, entonces, mediante la ecuación (6.7):

$$M_{cr} = 375 \times \frac{33{,}160}{16.84} \times \frac{1}{12{,}000} = 62 \text{ klb-pie}$$

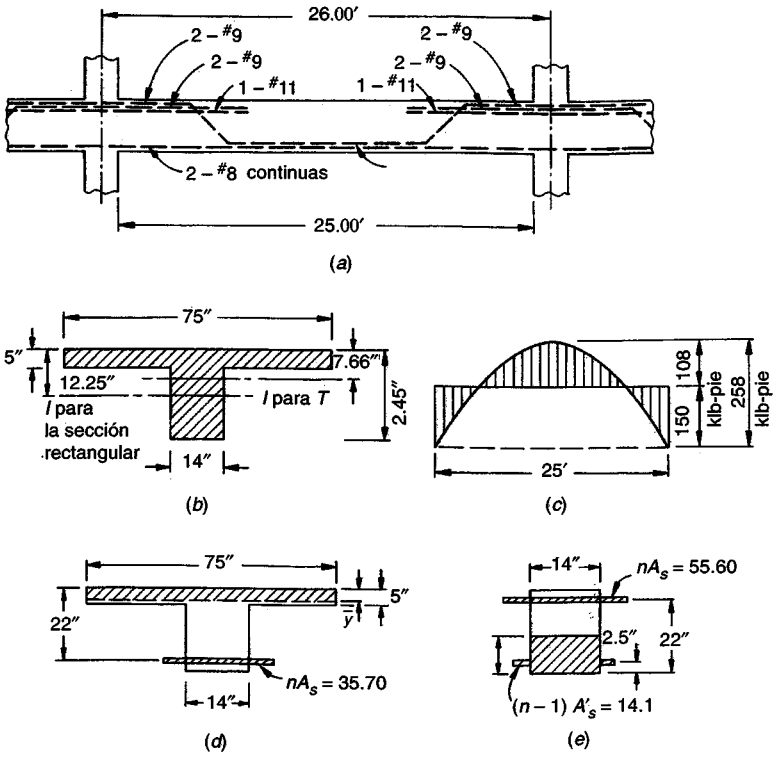


FIGURA 6.9
Viga T continua para el cálculo de deflexiones en el ejemplo 6.2.

Con $M_{cr}/M_a = 62/108 = 0.574$, el momento de inercia efectivo en la zona de flexión positiva se encuentra a partir de la ecuación (6.8) y es equivalente a

$$I_e = 0.574^3 \times 33{,}160 + (1 - 0.574^3) \times 13{,}180 = 16.970 \text{ pulg}^4$$

En la zona de flexión negativa, el momento de inercia bruto se basa en la sección rectangular que se indica punteada en la figura 6.9*b*. Para esta área, el centroide está ubicado a 12.25 pulg desde la superficie superior e $I_g = 17{,}200$ pulg^4. Para la sección transformada fisurada que se mueve en la figura 6.9*e*, el eje centroidal se encuentra tomando momentos con respecto a la superficie inferior y está ubicado a 9.33 pulg desde este nivel e $I_{cr} = 13{,}368$ pulg^4. Entonces

$$M_{cr} = 375 \times \frac{17{,}200}{12.25} \times \frac{1}{12{,}000} = 44 \text{ klb-pie}$$

Obteniéndose $M_{cr}/M_a = 44/150 = 0.293$. Así que, para las zonas de momento negativo,

$$I_e = 0.293^3 \times 17{,}200 + (1 - 0.293^3) \times 13{,}368 = 13{,}530 \text{ pulg}^4$$

El valor promedio de I_e a utilizar en el cálculo de las deflexiones es

$$I_{e,av} = \frac{1}{2}(16{,}970 + 13{,}530) = 15{,}250 \text{ pulg}^4$$

Ahora es necesario determinar el multiplicador de las deflexiones a largo plazo de la ecuación (6. 11) y la figura 6.8. Para la zona de flexión positiva sin refuerzo a compresión, $\lambda_{pos} = 2.00$.

Como punto de referencia conveniente, se determina la deflexión del elemento bajo las cargas muertas y vivas completas de 3.3 klb/pie, correspondientes al diagrama de momentos de la figura 6.9*c*. Se utilizan los principios del método de las áreas de momento,

$$\Delta_{d+l} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{2}{3} \times 258 \times 12.5 \times \frac{5}{8} \times 12.5\right) - (150 \times 12.5 \times 6.25)\right] = \frac{5100}{EI}$$

$$= \frac{5100 \times 1728}{2850 \times 15{,}250} = 0.203 \text{ pulg}$$

Con esta figura como base, es posible determinar la porción dependiente del tiempo de la deflexión ocasionada por la carga muerta (la única parte del total que afectará las particiones), así

$$\Delta_d = 0.203 \times \frac{1.1}{3.3} \times 2.00 = 0.135 \text{ pulg}$$

mientras que la suma de las deflexiones instantáneas y dependientes del tiempo ocasionadas por la porción permanente de la carga viva, es

$$\Delta_{0.20l} = 0.203 \times \frac{2.2}{3.3} \times 0.20 \times 3.00 = 0.081 \text{ pulg}$$

y la deflexión instantánea debida a la aplicación de la porción de la carga viva de corta duración es

$$\Delta_{0.80l} = 0.203 \times \frac{2.2}{3.3} \times 0.80 = 0.108 \text{ pulg}$$

Por tanto, la deflexión total que afectará desfavorablemente las particiones, desde el momento en que éstas se instalan hasta que hayan ocurrido todas las deflexiones a largo plazo y las deflexiones instantáneas subsecuentes, es:

$$\Delta = 0.135 + 0.081 + 0.108 = 0.324 \text{ pulg}$$

En comparación, el límite impuesto por el Código ACI en estas circunstancias es $l/480 = 26 \times 12/480 = 0.650$ pulg, que indica que la rigidez del elemento propuesto es suficiente.

Puede destacarse que el error introducido en la solución anterior, al utilizar el momento de inercia de la sección fisurada para las secciones positiva y negativa en lugar del valor de I_e, hubiera sido relativamente menor. Con esto se hubiera logrado un ahorro significativo en el trabajo computacional. Si M_{cr}/M_a es menor que 1/3, la utilización de I_{cr} será casi siempre aceptable. Además, debe subrayarse que el cálculo de los momentos de inercia tanto para la sección fisurada como para la no fisurada, se facilita considerablemente con ayudas de diseño como las que se incluyen en la referencia 6.13.

6.8 DEFLEXIONES OCASIONADAS POR RETRACCIÓN DE FRAGUADO Y POR CAMBIOS DE TEMPERATURA

La retracción de fraguado del concreto produce esfuerzos de compresión en el refuerzo longitudinal en vigas y losas, y esfuerzos de tensión en el concreto para equilibrar la fuerza de compresión. Si, como ocurre en la mayor parte de los casos, el refuerzo no está colocado simétricamente con respecto al centroide del concreto, la retracción de fraguado producirá una curvatura y una deflexión correspondiente. Las deflexiones ocurrirán en la misma dirección de las producidas por las cargas, si el refuerzo está colocado principalmente en la cara del elemento que está sometida a tensión por flexión.

La deflexión por retracción de fraguado no se calcula generalmente en forma independiente, sino en forma combinada con la deflexión por flujo plástico según los procedimientos determinados por el Código ACI (ver la sección 6.7*d*). Sin embargo, existen circunstancias en que se hace

necesario el cálculo de un estimativo independiente y más preciso de la deflexión por retracción de fraguado, en particular para losas delgadas y con baja carga. El acero a compresión, aunque tiene apenas un pequeño efecto en la reducción de las deflexiones elásticas instantáneas, contribuye en forma significativa a la reducción de las deflexiones ocasionadas por retracción de fraguado (al igual que a las de flujo plástico) y por esta razón se adiciona en algunos casos.

Las curvaturas producto de la retracción de fraguado del concreto para un elemento asimétricamente reforzado pueden encontrarse con el método de la tensión ficticia (ver la referencia 6.5). La figura 6.10*a* presenta la sección transversal del elemento con área de acero a compresión A'_s y área de acero a tensión A_s, a profundidades d' y d, respectivamente, desde la superficie superior. En la figura 6.10*b* el concreto y el acero se suponen temporalmente como si estuvieran separados, de manera que el concreto puede asumir libremente su deformación unitaria por retracción de fraguado ϵ_{sh}. Entonces, se aplica al acero una fuerza de compresión ficticia $T_{sh} = (A_s + A'_s)\,\epsilon_{sh} E_s$, en el centroide de todas las barras, a una distancia e por debajo del centroide de concreto, de manera que el acortamiento producido en el acero sea exactamente igual a la deformación unitaria por retracción de fraguado libre del concreto. Luego se aplica la fuerza de tensión equilibrante T_{sh} a la sección completa, recombinada, como se ilustra en la figura 6.10*c*. Esto produce un momento $T_{sh}e$ y la curvatura por retracción de fraguado correspondiente es equivalente a

$$\phi_{sh} = \frac{T_{sh}e}{EI}$$

Los efectos del agrietamiento del concreto y del flujo plástico complican el análisis, pero comparaciones con datos experimentales (ver la referencia 6.5) indican que se obtienen buenos resultados si se utilizan e_g e I_g para la sección bruta no fisurada del concreto y un módulo reducido E_{ct} igual *a* $\frac{1}{2}\,E_c$ para tener en cuenta el flujo plástico. Así que:

$$\phi_{sh} = \frac{2T_{sh}e_g}{E_c I_g} \tag{6.14}$$

donde E_c es el valor normal para el módulo elástico del concreto dado por la ecuación (2.3).

También se han utilizado métodos empíricos, en vez del método de la fuerza de tensión ficticia, para calcular las curvaturas ocasionadas por retracción de fraguado. Estos métodos se basan en la simple pero razonable proposición de que la curvatura por retracción de fraguado es una función directa de la retracción de fraguado libre y de la cuantía de acero, y una función inversa de la altura de la sección (ver la referencia 6.5). Branson sugiere que para cuantías de acero $(p - p') \leq 3$ por ciento (donde $p = 100A_s/bd$ y $p' = 100A'_s/bd$),

$$\phi_{sh} = 0.7\frac{\epsilon_{sh}}{h}(p - p')^{1/3}\left(\frac{p - p'}{p}\right)^{1/2} \tag{6.15a}$$

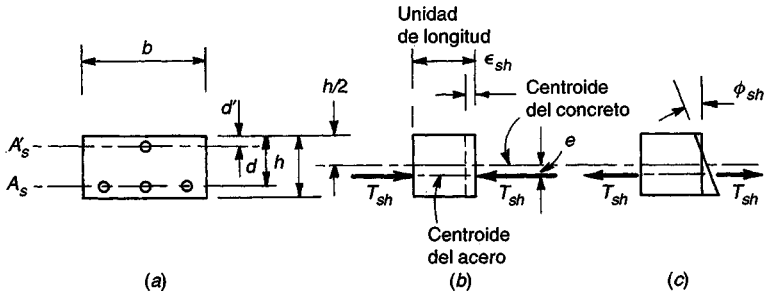


FIGURA 6.10
Curvatura por retracción de fraguado de una viga o losa de concreto reforzado: (*a*) sección transversal; (*b*) deformación unitaria por retracción de fraguado libre; (*c*) curvatura por retracción de fraguado.

y para $(p - p') > 3$ por ciento,

$$\phi_{sh} = \frac{\epsilon_{sh}}{h} \tag{6.15b}$$

Una vez calculada la curvatura por retracción de fraguado por cualquiera de los métodos expuestos, la deflexión correspondiente en el elemento puede determinarse con cualquiera de los métodos convenientes como el método de las áreas de momento o el de la viga conjugada. Si las cuantías de acero y las excentricidades son constantes a lo largo de la luz, la deflexión ϵ_{sh} que produce la curvatura por retracción de fraguado puede determinarse a partir de

$$\Delta_{sh} = K_{sh}\phi_{sh}l^2 \tag{6.16}$$

donde K_{sh} es un coeficiente igual a 0.500 para voladizos, 0.125 para luces simples, 0.065 para luces internas de vigas continuas y 0.090 para luces externas de vigas continuas (ver la referencia 6.5).

Ejemplo 6.3. Deflexión por retracción de fraguado. Calcule la deflexión en el centro de la luz de una viga simplemente apoyada con una luz de 20 pies, como consecuencia de la retracción de fraguado del concreto para el cual $\epsilon_s dh = 780 \times 10^{-6}$. Con referencia a la figura 6.10*a*, $b = 10$ pulg, $d = 17.5$ pulg, $h = 20$ pulg, $A_s = 3.00$ pulg^2 y $A'_s = 0$. Los módulos elásticos son $E_c = 3.6 \times 10^6$ lb/pulg^2 y $E_s = 29 \times 10^6$ lb/pulg^2.

Solución. Mediante el método de la fuerza de tensión ficticia,

$$T_{sh} = 3.00 \times 780 \times 10^{-6} \times 29 \times 10^6 = 67{,}900 \text{ lb}$$

y a partir de la ecuación (6.14) con $I_g = 6670$

$$\phi_{sh} = \frac{2 \times 67{,}900 \times 7.5}{3.6 \times 10^6 \times 6670} = 42.4 \times 10^{-6}$$

mientras que, a partir de la ecuación (6.16) con $K_{sh} = 0.125$; para la luz simple,

$$\Delta_{sh} = 0.125 \times 42.4 \times 10^{-6} \times 240^2 = 0.305 \text{ pulg}$$

Alternativamente se utiliza el método aproximado de Branson mediante la ecuación (6.15*a*) con $p = 100 \times 3/175 = 1.7$ por ciento y $\rho' = 0$

$$\phi_{sh} = \frac{0.7 \times 780 \times 10^{-6}}{20}(1.7)^{1/3} = 32.5 \times 10^{-6}$$

valor que se compara con 42.4×10^{-6} obtenido con el método de la fuerza de tensión equivalente. Si se tienen en cuenta las incertidumbres asociadas con los efectos del agrietamiento y del flujo plástico, el método aproximado puede utilizarse en forma satisfactoria.

También se producirán deflexiones en un elemento como resultado del diferencial de temperatura entre las partes superior e inferior del mismo. Este diferencial produce una variación de la deformación unitaria con la altura del elemento, que puede suponerse generalmente como lineal. En estos casos, la deflexión producto de la diferencia de temperatura se calcula utilizando la ecuación (6.16), en la cual ϕ_{sh}, se remplaza por $\alpha\Delta T/h$, donde el coeficiente térmico α para el concreto puede tomarse igual a 5.5×10^{-6} por °F y ΔT es el diferencial de temperatura en grados Fahrenheit entre una cara y la otra. La presencia del refuerzo tiene poca influencia en las curvaturas y en las deflexiones que resultan de temperaturas diferenciales, puesto que el coeficiente térmico para el acero es muy parecido al del concreto.

6.9 MOMENTO *VERSUS* CURVATURA PARA SECCIONES DE CONCRETO REFORZADO

Aunque no se necesita en forma explícita en el diseño corriente y no es parte de los procedimientos del Código ACI, la relación entre el momento aplicado a determinada sección de una viga y la curvatura que resulta a lo largo del intervalo completo de carga hasta la falla, es muy importante en diferentes contextos. Es básica para estudiar la ductilidad del elemento, para entender el desarrollo de las rótulas plásticas y para tener en cuenta la redistribución de los momentos elásticos que ocurren en la mayor parte de las estructuras de concreto reforzado antes del colapso (ver la sección 11.9).

Con referencia a la figura 6.11, se recuerda que la curvatura se define como el cambio de ángulo por unidad de longitud en una ubicación dada, a lo largo del eje del elemento sometido a cargas de flexión:

$$\psi = \frac{1}{r} \tag{6.17}$$

donde ψ = curvatura unitaria y r = radio de curvatura. Si se utilizan las relaciones esfuerzo-deformación unitaria para el acero y el concreto que se representan en forma ideal en las figuras 6.12*a* y *b* respectivamente, y si se tienen en cuenta los supuestos usuales referentes a la adherencia perfecta y a las secciones planas, es posible calcular la relación entre momento y curvatura para una sección común en una viga de concreto subreforzada y sometida a agrietamiento por flexión, como sigue.

La figura 6.13*a* presenta la sección bruta transformada de una viga rectangular reforzada a tensión, para el estado de carga elástico no fisurado, con el acero representado mediante el área equivalente de concreto nA_s, es decir, con área $(n - 1)A_s$ adicionada por fuera de la sección

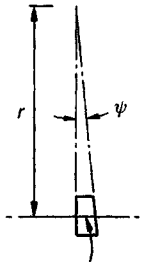


FIGURA 6.11
Curvatura unitaria resultante de la flexión en una sección de viga.

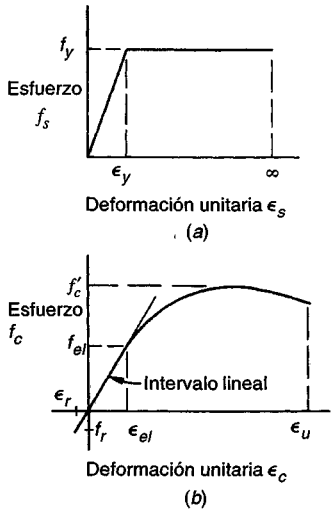


FIGURA 6.12
Curvas idealizadas esfuerzo-deformación unitaria: (*a*) para el acero; (*b*) para el concreto.

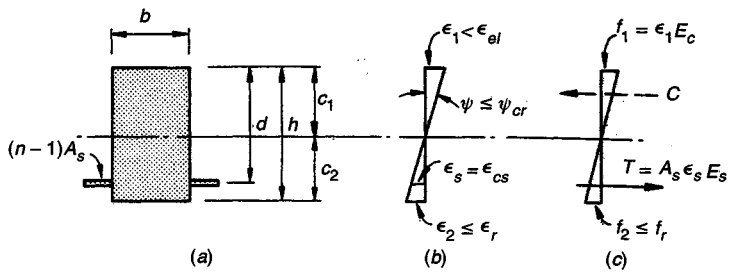


FIGURA 6.13
Viga no fisurada en el intervalo elástico de cargas: (*a*) sección bruta transformada; (*b*) deformaciones unitarias; (*c*) esfuerzos y fuerzas.

rectangular de concreto†. El eje neutro, ubicado a una distancia c_1 por debajo de la superficie superior de la viga, se encuentra fácilmente (ver la sección 3.3*a*). En el caso límite, el esfuerzo en el concreto en la cara de tensión es justamente igual al módulo de rotura f_r, y la deformación unitaria es $\epsilon_r = f_r/E_c$. El acero se encuentra muy por debajo de su fluencia en este estado de cargas, lo cual puede confirmarse con el cálculo de la deformación unitaria en el acero a partir del diagrama de deformaciones unitarias $\epsilon_s = \epsilon_{cs}$, donde ϵ_{cs} es la deformación unitaria del concreto en las fibras al nivel del acero. También se puede confirmar fácilmente que el esfuerzo de compresión máximo en el concreto está muy por debajo del límite de proporcionalidad. En la figura 6.13*b* se observa que la curvatura es

$$\psi_{cr} = \frac{\epsilon_1}{c_1} = \frac{\epsilon_r}{c_2} \tag{6.18}$$

y el momento correspondiente es

$$M_{cr} = \frac{f_r I_{ut}}{c_2} \tag{6.19}$$

donde I_{ut} el momento de inercia para la sección transformada no fisurada. Las ecuaciones (6.18) y (6.19) proveen la información necesaria para dibujar el punto 1 del gráfico momento-curvatura de la figura 6.16*a*.

Una vez que se presenta la fisuración por tensión en la sección, la rigidez se reduce inmediatamente y la curvatura aumenta hasta el punto 2 de la figura 6.16 sin incremento en el momento. El análisis se basa ahora en la sección transformada fisurada de la figura 6.14*a*, con el acero representado por el área transformada nA_s y sin tener en cuenta el concreto a tensión. La distancia al eje neutro elástico fisurado $c_1 = kd$ se encuentra sin dificultad con los métodos usuales (ver la sección 3.3b). En el caso límite, la deformación unitaria en el concreto alcanza justamente el límite de proporcionalidad como aparece en la figura 6.14*b* y, generalmente, el acero permanece aún por debajo de la deformación unitaria de fluencia. La curvatura se calcula con facilidad mediante

$$\psi_{el} = \frac{\epsilon_1}{c_1} = \frac{\epsilon_{el}}{c_1} \tag{6.20}$$

y el momento correspondiente es

$$M_{el} = \frac{1}{2} f_{el} kjbd^2 \tag{6.21}$$

como se demostró en la sección 3.3b. Esto genera el punto 3 de la figura 6.16. La curvatura en el punto 2 se encuentra ahora a partir de la relación M_{cr}/M_{el}

† Observe que el esfuerzo a comprensión o varias filas de refuerzo a tensión pueden incluirse en el análisis sin mayores complicaciones.

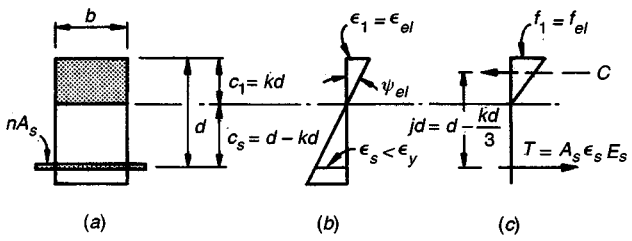


FIGURA 6.14
Viga fisurada en el intervalo elástico de respuesta del material: (*a*) sección transversal transformada; (*b*) deformaciones unitarias; (*c*) esfuerzos y fuerzas.

Luego, en la figura 6.15 se ilustra el estado de cargas inelástico fisurado. Aquí el concreto está bien metido en el intervalo inelástico, aunque el acero todavía no fluye. La profundidad del eje neutro, c_1, es menor que la elástica correspondiente kd y se modifica con el aumento de la carga a medida que cambia la forma de la distribución de esfuerzos en el concreto y el esfuerzo en el acero.

En este momento resulta conveniente adoptar una representación numérica de la distribución de esfuerzos de compresión en el concreto con el fin de encontrar tanto la fuerza de compresión total en el concreto C como la localización de su centroide, para cualquier valor arbitrariamente seleccionado de la deformación unitaria máxima del concreto ϵ_1, en este intervalo. El diagrama de deformaciones unitarias a compresión se divide en una cantidad arbitraria de intervalos (por ejemplo, cuatro en la figura 6.15*b*) y se obtienen los esfuerzos correspondientes a compresión para cada deformación unitaria a partir de la curva esfuerzo-deformación unitaria de la figura 6.12*b*. La representación escalonada del bloque de esfuerzos, que es realmente continuo, se integra numéricamente para encontrar C y su punto de aplicación se localiza tomando los momentos de las fuerzas en el concreto, con respecto al borde superior de la sección. Si se sigue un procedimiento iterativo, se puede utilizar el requisito básico de equilibrio $C = T$ para encontrar la localización correcta del eje neutro para la deformación unitaria de compresión particular seleccionada.
El proceso completo puede resumirse de la siguiente manera:

1. Seleccionar una deformación unitaria ϵ_1 del concreto cualquiera para la cara superior en el rango inelástico, es decir, entre ϵ_{el} y ϵ_u.
2. Suponer la profundidad del eje neutro a una distancia c_1 por debajo de la cara superior.
3. A partir de la geometría del diagrama de deformaciones unitarias, determinar ϵ_s y ϵ_{cs}.
4. Calcular $f_s = \epsilon_s E_s$, pero $\leq f_y$ y $T = A_s f_s$.
5. Determinar C integrando numéricamente el área bajo la curva de distribución de esfuerzos en el concreto.
6. Verificar si $C = T$. Si no lo es, el eje neutro debe ajustarse hacia arriba o hacia abajo para la deformación unitaria particular del concreto seleccionada en el paso 1, hasta que se satisfagan las condiciones de equilibrio. Esto determina el valor correcto de c_1.

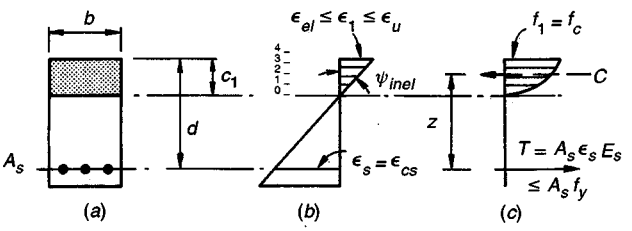


FIGURA 6.15
Viga fisurada con el concreto en el intervalo inelástico de cargas: (*a*) sección transversal; (*b*) deformaciones unitarias; (*c*) esfuerzos y fuerzas.

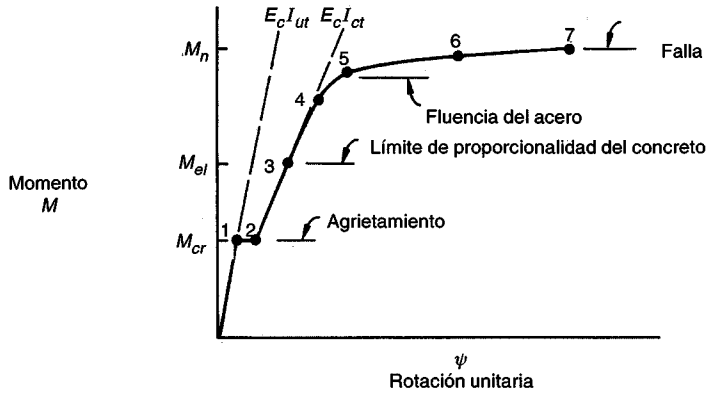


FIGURA 6.16
Relación momento-curvatura para vigas reforzadas a tensión.

La curvatura puede entonces encontrarse a partir de

$$\psi_{inel} = \frac{\epsilon_1}{c_1} \tag{6.22}$$

Se calcula luego el brazo de palanca interno z desde el centroide de la distribución de esfuerzos en el concreto hasta la resultante de tensión, figura 6.15*c*, a partir de lo cual

$$M_{inel} = C_z = T_z \tag{6.23}$$

Así, la secuencia de 1 hasta 6 se repite con nuevos valores seleccionados de deformación unitaria del concreto ϵ_1. El resultado final consistirá en una serie de puntos, como 4, 5, 6 y 7 en la figura 6.16. El límite de la gráfica momento-curvatura se alcanza cuando la deformación unitaria en la cara superior del concreto alcanza el valor ϵ_u correspondiente al punto 7. Para este estado de carga el acero estará muy por encima de la deformación unitaria de fluencia y habrá alcanzado, por tanto, el esfuerzo de fluencia.

Es importante estar atento a la diferencia entre una gráfica de momento-curvatura unitaria como la de la figura 6.16, y un diagrama de momento-rotación para la zona de plastificación en una viga de concreto reforzado. La zona donde se presenta la plastificación incluye normalmente una cantidad de grietas discretas pero, entre estas grietas, el concreto no fisurado reduce la deformación unitaria en el acero que conduce a lo que se conoce como efecto de "rigidización por tensión". El resultado es que la rotación total en la rótula es mucho menor que la que resultaría al multiplicar la curvatura por unidad de longitud en la sección fisurada, por la longitud observada o supuesta en la zona de rótula. Además, el incremento repentino en la curvatura unitaria que se presenta en la figura 6.16, no se vería en el gráfico de momento-rotación en el momento del agrietamiento; sólo se vería una pequeña pero progresiva reducción en la pendiente del diagrama.

REFERENCIAS

6.1. "Control of Cracking in Concrete Structures", ACI Committee 224, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 3, 1995.
6.2. P. Gergely and L. A. Lutz, "Maximun Crack Width in Reinforced Concrete Flexural Members", in *Causes, Mechanisms, and Control of Cracking in Concrete*, ACI Special Publications SP-20, American Concrete Institute, 1968, pp. 1-17.
6.3. B. B. Broms, "Crack Width and Crack Spacing in Reinforced Concrete Members", *J. ACI*, vol. 62, no. 10, 1965, pp. 1237-1256.
6.4. L. A. Lutz, "Crack Control Factor for Bundled Bars and for Bars of Different Sizes", *J. ACI*, vol. 71, no. 1, 1974, pp. 9-10.
6.5. D. E. Branson, *Deformation of Concrete Structures*, McGraw-Hill: New York, 1977.

6.6. "Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members", ACI Committee 435, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 3, 1993.
6.7. W. W. Yu and G. Winter, "Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams Under Working Loads", *J. ACI*, vol. 57, no. 1, 1960, pp. 29-50.
6.8. "Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures", ACI Committee 209, *ACI Manual of Concrete Practice*, Part 3, 1993.
6.9. D. E. Branson, "Compression Steel Effect on Long-Time Deflections", *J. ACI*, vol 68, no. 8, 1971, pp. 555-559.
6.10. "Proposed Revisions by Committee 435 to ACI Building Code and Commentary Provisions on Deflections", ACI Committee 435, *J. ACI*, vol. 75, no. 6, June 1978, pp. 229-238.
6.11. C. H. Norris, J. B. Wilbur, and S. Utku, *Elementary Structural Analysis*, 4th ed., Mcgraw-Hill, New York, 1991.
6.12. K. Paulson, A. H. Nilson, and K. C. Hover, "Long-Term Deflection of High-Strength Concrete Beams", *ACI Materials Journal*, vol. 88, no. 2, 1991, pp. 197-206.
6.13. *CRSI Handbook*, 7th ed., Concrete Reinforcing Steel Institute, Schaumburg, Illinois, 1992.

PROBLEMAS

6.1. Una viga rectangular con ancho $b = 12$ pulg, altura efectiva $d = 20.5$ pulg y altura total $h = 23$ pulg, tiene una luz de 18.5 pies entre apoyos simples. La viga tiene que sostener una carga muerta calculada de 1.27 klb/pie que incluye su peso propio, más una carga viva de servicio de 2.44 klb/pie. El refuerzo consiste en cuatro barras No. 8 en una sola fila. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 4000$ lb/pulg^2.
(*a*) Calcule el esfuerzo en el acero para la carga de servicio completa y estime el ancho máximo de las grietas utilizando la ecuación de Gergely-Lutz.
(*b*) Si se supone una exposición exterior al aire húmedo, confirme si el diseño propuesto es adecuado.

6.2. Para la viga del problema 6.1:
(*a*) Calcule el valor de z del ACI utilizando $f_s = 0.60 f_y$ como lo permite el Código ACI.
(*b*) Compare con las limitaciones del Código ACI para determinar si el diseño es satisfactorio con respecto al agrietamiento.
(*c*) Compare con las indicaciones dadas en la tabla A.8 del apéndice A.

6.3. Para ahorrar costos en el manejo del acero se propone un diseño alterno para la viga del problema 6.1, utilizando dos barras No. 11 para suministrar aproximadamente la misma área de acero que tienen las cuatro barras No. 8 propuestas inicialmente. Verifique si el rediseño de la viga es satisfactorio con respecto al agrietamiento:
(*a*) Mediante la ecuación de Gergely-Lutz y la tabla 6.1, y
(*b*) De acuerdo con el Código ACI. ¿Qué modificaciones podría sugerir para minimizar el número de barras y así reducir los costos, teniendo en cuenta que deben satisfacerse los requisitos de control de agrietamiento?

6.4. Para la viga del problema 6.1:
(*a*) Calcule el incremento en la deflexión resultante de la primera aplicación de la carga viva de corta duración.
(*b*) Encuentre la porción de la deflexión por cargas permanentes a causa del flujo plástico, más la deflexión instantánea como consecuencia de la carga viva.
(*c*) Compare sus resultados con los límites impuestos por el Código ACI que se resumen en la tabla 6.3. Suponga que la viga hace parte de un sistema de entrepiso y sostiene particiones con bloques de escoria susceptibles de agrietarse si las deflexiones son excesivas.

6.5. Una viga con $b = 12$ pulg, $d = 21.5$ pulg y $h = 24$ pulg está reforzada con tres barras No. 11. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 4000$ lb/pulg^2. La viga se utiliza en una luz simple de 28 pies para sostener una carga total de servicio de 2430 lb/pie. Para este elemento, las cargas sostenidas incluyen el peso de la viga además de una carga muerta superpuesta de 510 lb/pie, más 400 lb/pie que representan la parte de la carga viva que actúa en forma más o menos continua, como muebles, equipos y cargas de ocupación promedio en el tiempo. La otra carga viva de 1220 lb/pie la conforman cargas de corta duración, como las cargas pico muy breves en los corredores de un edificio de oficinas al final de un día de trabajo.
(*a*) Encuentre el aumento en la deflexión, bajo cargas permanentes, ocasionado por el flujo plástico.
(*b*) Encuentre el incremento adicional en la deflexión a causa de la parte intermitente de la carga viva.

Para estos cálculos puede suponer que la carga pico se aplica casi inmediatamente después de que el edificio entra en servicio y luego se vuelve a ejercer en forma intermitente. Compare con los límites determinados por el Código ACI en la tabla 6.3. Puede suponerse que para esta viga de piso de gran luz se han tomado las precauciones necesarias, referentes a detalles de construcción, para evitar daños a los

elementos soportados a causa de las deflexiones. Si las limitaciones del Código ACI no se cumplen, ¿qué cambios recomendaría usted para mejorar el diseño?

6.6. Una viga de concreto reforzado es continua a lo largo de dos luces iguales de 22 pies, simplemente apoyada en los dos apoyos exteriores y completamente continua en el apoyo interior. Las dimensiones de la sección transversal de concreto son b = 10 pulg, h = 22 pulg y d = 19.5 pulg, tanto para las regiones de flexión positiva como para las de flexión negativa. El refuerzo positivo en cada luz consta de una barra No. 10 y una barra No. 8, y el refuerzo negativo en el apoyo interior está conformado por tres barras No. 10. No se utiliza acero a compresión. Las resistencias de los materiales son f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c= 5000 lb/pulg^2. La viga va a sostener una carga viva de servicio, aplicada muy temprano en la vida del elemento, de 1800 lb/pie, distribuida uniformemente en las dos luces; el 20 por ciento de esta carga se mantendrá en forma más o menos permanente, mientras que el resto será intermitente. La carga muerta total de servicio es 1000 lb/pie que incluye su peso propio. Encuentre:

(*a*) La deflexión instantánea tan pronto se retira el apuntalamiento y se aplica la carga muerta completa,
(*b*) Las deflexiones a largo plazo para cargas permanentes,
(*c*) El incremento en la deflexión cuando se aplica la parte de corta duración de la carga viva.

Compare con los límites de deflexiones determinados por el Código ACI; tenga en cuenta que el elemento está unido a tuberías y conductos frágiles que pueden dañarse si ocurren deflexiones grandes. Observe que pueden utilizarse las deflexiones en el centro de la luz como una aproximación muy cercana a la deflexión máxima.

6.7. Vuelva a calcular las deflexiones del Problema 6.6 con base en el supuesto de que el 20 por ciento de la carga viva representa la condición normal de cargas de servicio y se mantiene en forma más o menos continua, mientras que el restante 80 por ciento consta de cargas pico de corta duración que no se aplicarán probablemente sino hasta que se presente la mayor parte de las deflexiones por flujo plástico. Compare estos resultados con los anteriores.

6.8. La viga rectangular reforzada a tensión de la figura P6.8*a* se construye utilizando acero con f_y =60,000 lb/pulg^2 y E_s= 29,000,000 lb/pulg^2. Se supone una respuesta perfectamente plástica después de que se alcanza el punto de fluencia. El concreto utilizado tiene la curva esfuerzo-deformación unitaria que aparece en la figura P6.8*b*, con un límite en la respuesta elástica a una deformación unitaria de 0.0005, un esfuerzo máximo a 0.0020 y una deformación unitaria última de 0.0030. El módulo elástico del concreto es E_c = 3,600,000 lb/pulg^2 y el módulo de rotura es f_r = 475 lb/pulg^2. Con base en esta información, dibuje una curva que relacione el momento aplicado con la curvatura unitaria en una sección sometida a agrietamiento por flexión. Marque los puntos correspondientes a la primera fisura, al límite de la respuesta elástica del concreto, a la primera fluencia del acero y a la resistencia última a la flexión.

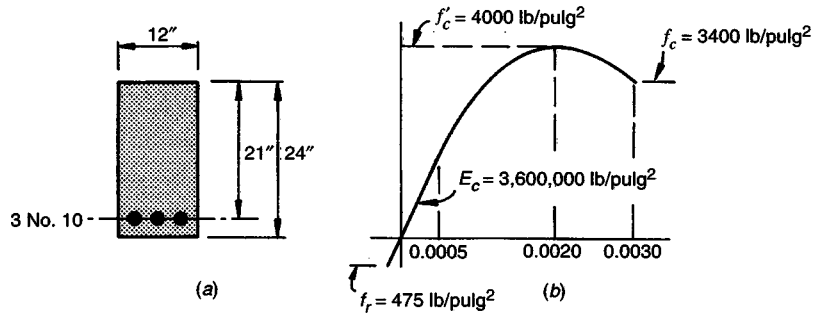


FIGURA P6.8

CAPÍTULO



ANÁLISIS Y DISEÑO A TORSIÓN

7.1 INTRODUCCIÓN

Los elementos de concreto reforzado están sometidos comúnmente a momentos flectores, a fuerzas cortantes transversales asociadas con estos momentos flectores y, en el caso de columnas, a fuerzas axiales combinadas a menudo con flexión y cortante. Además, pueden actuar fuerzas de torsión que tienden a retorcer el elemento con respecto a su eje longitudinal. Estas fuerzas de torsión rara vez actúan solas y casi siempre están acompañadas por momentos flectores, por cortantes transversales y algunas veces por fuerzas axiales.

Durante muchos años, la torsión se observaba como un efecto secundario y no era tenida en cuenta en forma explícita en el diseño; su influencia era absorbida por el factor de seguridad global de estructuras diseñadas más bien conservadoramente. Sin embargo, en años recientes surgió la necesidad de considerar en muchos casos los efectos de torsión en el diseño de elementos y proporcionar refuerzo para aumentar la resistencia de torsión. Existen dos razones principales para este cambio. La primera se relaciona con el mejoramiento en los métodos de análisis y diseño, como el método de diseño a la resistencia que ahora se utiliza, los cuales permiten un factor de seguridad global un poco menor mediante una evaluación más precisa de la capacidad de carga y conducen a su vez a elementos con dimensiones un poco menores. La segunda razón tiene que ver con el incremento en el uso de elementos estructurales en los cuales la torsión es un aspecto principal de su comportamiento, como en las vigas de los puentes curvos, las vigas cajón cargadas excéntricamente y las losas de escaleras helicoidales. En consecuencia, desde 1960 se ha dado una evolución importante en las actividades de investigación relacionadas con la torsión en el concreto reforzado. Por primera vez se incorporaron procedimientos prácticos de diseño en el Código ACI de 1971, se hicieron revisiones menores en las siguientes tres ediciones, y se hizo una revisión sustancial en 1995. Los procedimientos actuales de diseño fueron propuestos inicialmente en Suiza (ver las referencias 7.1 y 7.2) y ahora hacen parte de los códigos modelo en Europa y Canadá (ver referencias 7.3 y 7.4).

Al considerar los efectos de torsión en las estructuras de concreto reforzado, es importante diferenciar entre torsión primaria y torsión secundaria. La *torsión primaria*, algunas veces llamada *torsión de equilibrio* o *torsión estáticamente determinada,* se presenta cuando la carga externa no tiene otra alternativa que ser resistida por torsión. En estos casos, la torsión necesaria para mantener el equilibrio estático puede determinarse en forma única. Un ejemplo es la losa en voladizo de la figura 7.1*a*. Las cargas aplicadas en la superficie de la losa producen unos momentos de torsión que actúan a lo largo de la longitud de la viga de soporte. Éstos se equilibran mediante el momento torsor resistente T que se genera en las columnas. Sin estos momentos de torsión, la estructura colapsaría.

En contraste con la condición anterior se genera la *torsión secundaria* también llamada *torsión por compatibilidad* o *torsión estáticamente indeterminada*, a partir de los requisitos de continuidad, es decir, de la compatibilidad de deformaciones entre partes adyacentes de una estructura. En este caso, los momentos de torsión no pueden determinarse únicamente con base en el equilibrio estático. Si no se considera la continuidad en el diseño se presentará probablemente un gran agrietamiento, pero por lo general no se producirá colapso. Generalmente existe la posibilidad de una redistribución interna de fuerzas y de un equilibrio alterno de fuerzas. Un ejemplo de torsión secundaria se presenta en la viga de borde que sostiene una losa monolítica de concreto como aparece en la figura 7.1*b*. Si la viga de borde es rígida a la torsión y está reforzada adecuadamente, y si las columnas pueden suministrar el momento torsor resistente T que se necesita, entonces los momentos en la losa serán aproximadamente los de un apoyo exterior rígido, como se ilustra en la figura 7.1*c*. Sin embargo, si la viga tiene una rigidez baja a la torsión y está reforzada en forma inapropiada para efectos de torsión, se presentará agrietamiento, que reducirá aún más la rigidez de torsión, y los momentos en la losa se aproximarán a los de un borde articulado, como se ilustra en la figura

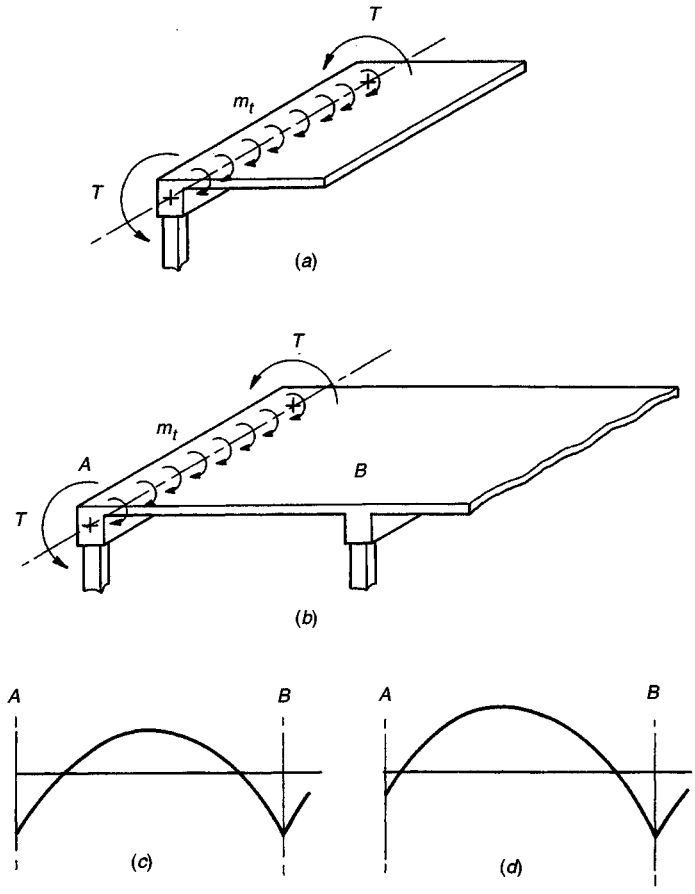


FIGURA 7.1
Efectos de torsión en el concreto reforzado: (*a*) torsión primaria o de equilibrio en una losa en voladizo; (*b*) torsión secundaria o de compatibilidad en una viga de borde; (*c*) momentos en las losas si la viga de borde es rígida a torsión; (*d*) momentos en las losas si la viga de borde es flexible a la torsión.

7.1*d*. Si se diseña la losa para resistir el diagrama de momentos modificado, no ocurrirá el colapso (ver sección 11.10).

Aunque las técnicas modernas de análisis permiten una evaluación realista de los momentos de torsión para las condiciones estáticamente indeterminadas, al igual que para las determinadas, los diseñadores a menudo no tienen en cuenta los efectos de torsión secundarios cuando los esfuerzos de torsión son bajos y cuando los estados alternos de equilibrio son posibles. Esto está permitido por el Código ACI y por muchas otras especificaciones. Por otro lado, cuando la resistencia a la torsión es un aspecto fundamental del diseño, como en el caso del puente de la figura 7.2, se requieren análisis especiales y refuerzo especial a torsión, tal como se describe en el resto de este capítulo.

7.2 TORSIÓN EN ELEMENTOS DE CONCRETO SIMPLE

La figura 7.3 señala una porción de un elemento prismático sometido a momentos torsores T iguales y opuestos en sus extremos. Si el material es elástico, la teoría de torsión de St. Venant indica

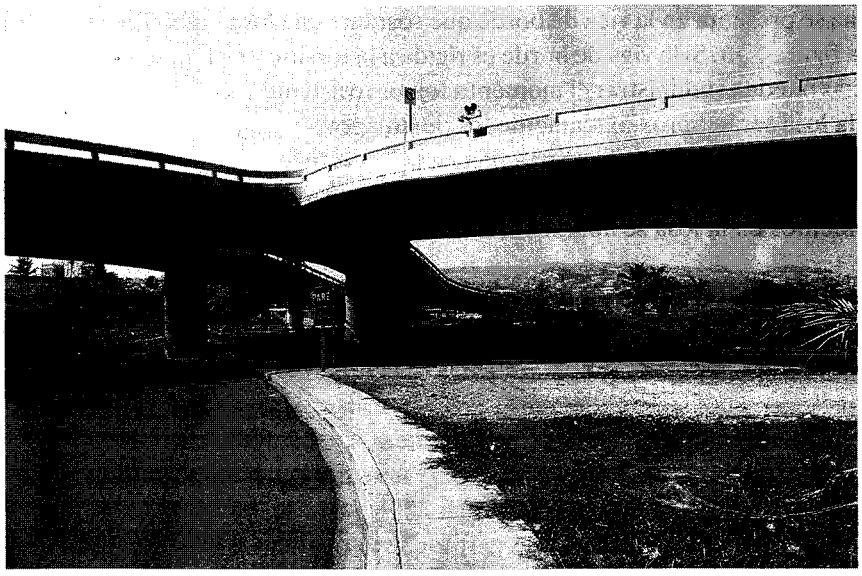


FIGURA 7.2
Viga curva continua para un puente, diseñada para efectos de torsión.

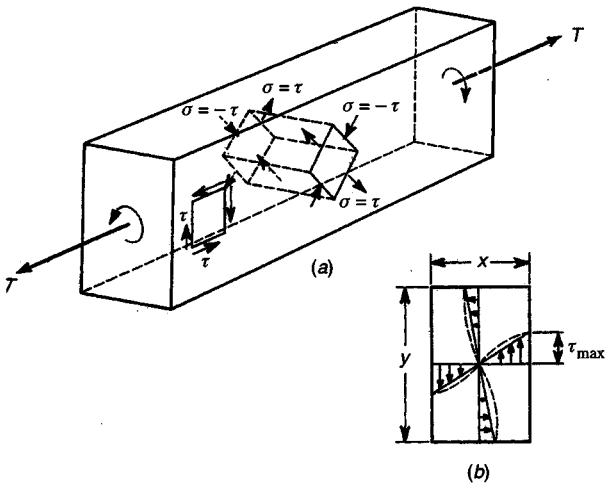


FIGURA 7.3
Esfuerzos causados por la torsión.

que los esfuerzos cortantes por torsión se distribuyen sobre la sección transversal, como se muestra en la figura 7.3*b*. Los mayores esfuerzos cortantes se presentan en la mitad de las caras más anchas. Si el material se deforma ineslásticamente, tal como se espera para el concreto, la distribución de esfuerzos se aproxima a la indicada por líneas punteadas.

Los esfuerzos cortantes actúan en pares sobre un elemento en o cerca de la superficie ancha como aparece en la figura 7.3*a*. Como se demuestra en cualquier texto de resistencia de materiales, este estado de esfuerzos es equivalente a un estado de esfuerzos de tensión y de compresión iguales en las caras de un elemento rotado a un ángulo de 45° con respecto a la dirección del cortante. Estos esfuerzos de tensión inclinados son del mismo tipo que los causados por cortante transversal analizados en la sección 4.2. Sin embargo, para el caso de la torsión, puesto que los esfuerzos cortantes por torsión tienen signos opuestos en las dos caras opuestas del elemento (figura 7.3*b*), los esfuerzos de tensión diagonal correspondientes forman ángulos rectos entre sí (figura 7.3*a*).

Cuando los esfuerzos de tensión diagonal exceden la resistencia a la tensión del concreto, se forma una grieta en algún sitio accidentalmente más débil y ésta se propaga inmediatamente a través de la viga. El valor del momento torsor que corresponde a la formación de esta grieta diagonal se conoce como el *torque de agrietamiento* T_{cr}

Existen diversas maneras de analizar elementos sometidos a torsión. La distribución de esfuerzos no lineal indicada mediante líneas punteadas en la figura 7.3*b*, lleva por sí misma a la utilización de la *analogía del tubo de pared delgada o de la armadura espacial*. Utilizando esta analogía, los esfuerzos cortantes se consideran constantes a través de un espesor finito t alrededor de la periferia del elemento, permitiendo considerar la viga como representada por un tubo equivalente como lo indica la figura 7.4. Dentro de las paredes del tubo de torsión es resistida por el corte de flujo q, el cual tiene unidades de fuerza por unidad de longitud. En la analogía, q se considera como constante alrededor del perímetro del tubo. Como se presenta en la figura 7.4, las resultantes de las componentes individuales del flujo de corte están localizadas dentro de las pares del tubo y actúan a lo largo de las longitudes y_o en las paredes verticales y a lo largo de las longitudes x_o en las paredes horizontales, donde y_o y x_o se miden en el centro de las paredes.

La relación entre el momento torsor aplicado y el flujo de corte puede conseguirse mediante la suma de los momentos alrededor de la línea central en el eje del tubo, obteniéndose

$$T = 2qx_o y_o/2 + 2qy_o x_o/2 \qquad (a)$$

donde los dos términos de la derecha representan las contribuciones de las paredes horizontal y vertical al momento torsor resistente, respectivamente. De esta manera,

$$T = 2qx_o y_o \qquad (b)$$

El producto $x_o y_o$ representa el área encerrada por la trayectoria del flujo de corte A_o obteniéndose,

$$T = 2qA_o \qquad (c)$$

y

$$q = \frac{T}{2A_o} \qquad (d)$$

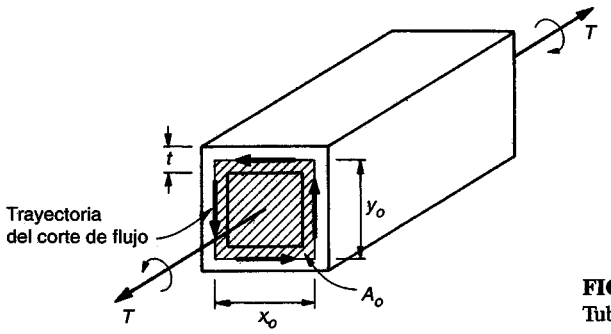


FIGURA 7.4
Tubo de pared delgada bajo torsión.

Observe que, aunque A_o es un área, ésta se deduce a partir de los cálculos de momento indicados en la ecuación (*a*) anterior. De esta manera, A_o es aplicable a secciones cajón huecas, al igual que a secciones sólidas en cuyo caso incluye el área del vacío central.

Para un espesor de pared del tubo t, el esfuerzo cortante unitario que actúa dentro de las paredes del tubo es

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2A_o t} \tag{7.1}$$

Como se presenta en la figura 7.3*a*, el esfuerzo principal a tensión $\sigma = \tau$. De esta manera, el concreto se agrieta sólo cuando $\tau = \sigma = f_t'$, la resistencia a la tensión del concreto. Considerando que el concreto está sometido a tensión y compresión biaxial, f_t' puede representarse conservadoramente mediante $4\sqrt{f_c'}$ en lugar del valor utilizado típicamente para el módulo de rotura del concreto, el cual se toma como $f_r = 7.5\sqrt{f_c'}$ para concretos de densidad normal. Sustituyendo $\tau = \tau_{cr} 4\sqrt{f_c'}$ en la ecuación (7.1) y despejando T, se obtiene el valor del momento torsor de agrietamiento:

$$T_{cr} = 4\sqrt{f_c'}(2A_o t) \tag{7.2}$$

Recordando que A_o representa el área encerrada por el camino seguido por el flujo de corte, A_o debe ser una fracción del área encerrada por el perímetro externo de la sección transversal completa de concreto A_{cp}. En general, el valor de t puede aproximarse a una fracción de la relación A_{cp}/P_{cp}, donde P_{cp} es el perímetro de la sección transversal. Para elementos sólidos con secciones transversales rectangulares, t puede tomarse como un $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{4}$ del ancho mínimo. Utilizando un valor de $\frac{1}{4}$ para un elemento con una relación ancho-espesor de 0.5, se obtiene un valor aproximado de $A_o = \frac{2}{3}A_{cp}$. Para este mismo elemento, $t = \frac{3}{4}A_{cp}/P_{cp}$. Utilizando los valores de A_o y t en la ecuación (7.2) se obtiene.

$$T_{cr} = 4\sqrt{f_c'}\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \text{ lb-pulg} \tag{7.3}$$

Se ha encontrado que la ecuación (7.3) permite estimar de manera razonable el momento torsor de agrietamiento para elementos de concreto reforzado independientemente de la forma de su sección transversal.

7.3 TORSIÓN EN ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

Para resistir la torsión para valores de T superiores a T_{cr}, el refuerzo debe estar conformado por estribos poco espaciados y por barras longitudinales. Diversos ensayos evidencian que las solas barras longitudinales aumentan muy poco la resistencia a la torsión, lográndose incrementos de un 15 por ciento como máximo (ver la referencia 7.5). Esto es comprensible puesto que la única forma en que las barras longitudinales pueden contribuir a la resistencia a la torsión es mediante la acción de dovela que, en particular, es débil y poco confiable si el fracturamiento longitudinal a lo largo de las barras no está restringido por refuerzo transversal. Así que la resistencia a la torsión de elementos reforzados únicamente con acero longitudinal puede estimarse en forma satisfactoria y algo conservadora, con las ecuaciones (7.2) y (7.3).

Cuando los elementos se refuerzan en forma adecuada, como en la figura 7.5*a*, las fisuras en el concreto aparecen para un momento torsor igual o un poco mayor que el de un elemento no reforzado, según la ecuación (7.3). Las grietas forman un patrón en espiral, como aparece en la figura 7.5*b*. Después del agrietamiento, la resistencia a la torsión del concreto disminuye hasta casi la mitad de la resistencia del elemento no fisurado y el resto de la torsión la resiste ahora el refuerzo. Esta redistribución en la resistencia interna se refleja claramente en la curva de momento torsor *versus* ángulo de torsión (ver la figura 7.6), que al nivel del momento torsor de agrietamiento genera rotación continua para momento torsor constante, hasta que las fuerzas se redistribuyen del

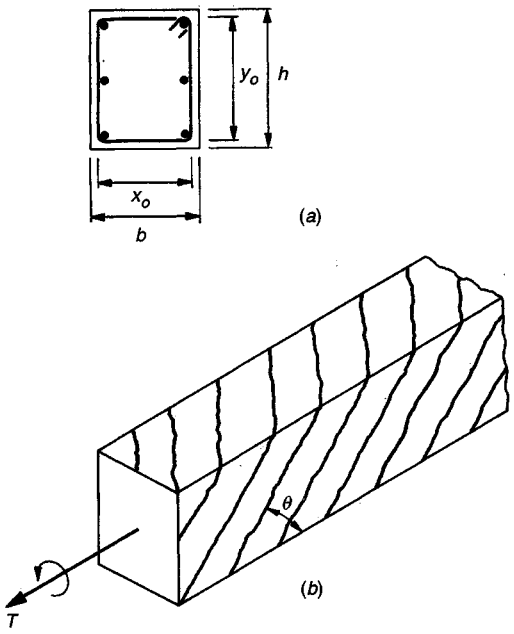


FIGURA 7.5.
Viga de concreto reforzado sometida a torsión: (*a*) refuerzo a torsión; (*b*) grietas de torsión.

concreto hacia el acero. Cuando la sección se aproxima a la resistencia última, el concreto de recubrimiento del acero se fisura y empieza a desprenderse, contribuyendo cada vez menos a la capacidad de torsión del elemento.

Los ensayos experimentales han demostrado que, después del agrietamiento, el área encerrada por el flujo de corte queda definida por las dimensiones x_o y y_o medidas hasta las líneas centrales del refuerzo transversal cerrado más alejado, y no hasta el centro de las paredes del tubo como antes. Estas dimensiones definen el área bruta $A_{oh} = x_o y_o$ y el perímetro de corte $p_h = 2(x_o + y_o)$ medido hasta la línea central del acero.

El análisis de la resistencia a torsión del elemento puede estimarse considerando el élemento como una armadura espacial conformada por diagonales de *concreto en espiral* que toman la carga paralela pero no perpendicular a las grietas de torsión, *elementos en tensión* transversales que corresponden a los estribos cerrados o flejes, y *cordones de tensión* que corresponden al refuerzo longitudinal. La analogía de tubo hueco y armadura espacial es una simplificación del comportamiento real debido a que, como se demostrará posteriormente, la resistencia de torsión calculada está controlada por la resistencia del refuerzo transversal independientemente de la resistencia del concreto. Esta simplificación se utiliza aquí debido a que facilita la comprensión del tema, aunque

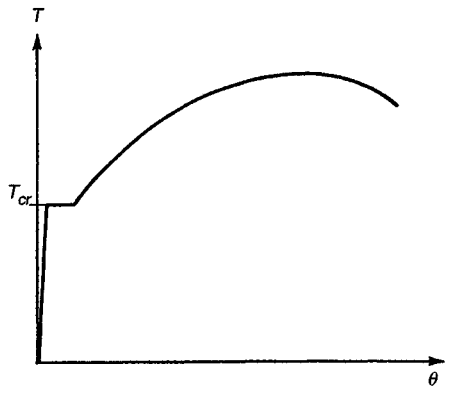


FIGURA 7.6
Curva momento torsor *versus* rotación para un elemento de concreto reforzado.

subestima de manera importante la capacidad de torsión y no refleja la mayor capacidad de ésta que se obtendría con concretos de mayor resistencia (ver las referencias 7.6 y 7.7).

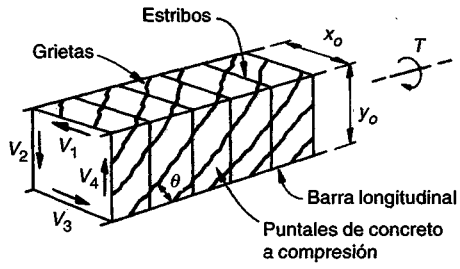
En la figura 7.7, la resistencia de torsión correspondiente a un elemento con una sección transversal rectangular puede representarse como la suma de las contribuciones de los cortantes en cada una de las cuatro paredes del tubo hueco equivalente. La contribución a la resistencia de torsión del cortante que actúa en la pared vertical derecha del tubo es, por ejemplo, igual a

$$T_4 = \frac{V_4 x_o}{2} \qquad (a)$$

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para analizar el modelo de armadura de corte con ángulo variable discutido en la sección 4.8, y presentado en las figuras 4.18 y 4.19, el equilibrio de una sección de pared vertical, con un borde paralelo a una grieta de torsión con ángulo θ, puede evaluarse utilizando la figura 7.8*a*. Suponiendo que los estribos que atraviesan la grieta están en fluencia, el cortante en la pared considerada es

$$V_4 = A_t f_{yv} n \qquad (b)$$

donde A_t = área de una rama de estribo cerrado
f_{yv} = resistencia de la fluencia del refuerzo transversal
n = número de estribos interceptados en la grieta de torsión.



FIGURAS 7.7
Analogía de armadura espacial.

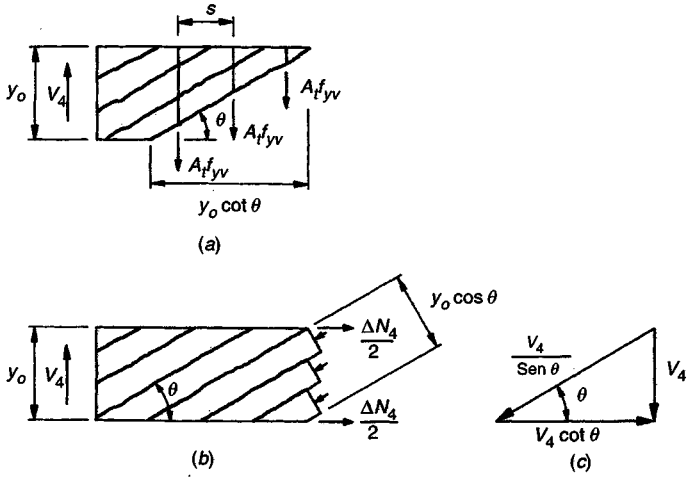


FIGURA 7.8
Fundamentos de diseño a torsión: (*a*) tensión vertical en estribos; (*b*) compresión diagonal en pared vertical de la viga; (*c*) diagrama de equilibro de fuerzas debidas al cortante en la pared vertical.

Puesto que la proyección horizontal de la grieta es $y_o \cot\theta$ y $n = y_o \cot\theta/s$ donde θ es el ángulo de inclinación del puntal y s es el espaciamiento de los estribos,

$$V_4 = \frac{A_t f_{yv} y_o}{s} \cot\theta \qquad (c)$$

Combinando las ecuaciones (c) y (a) se obtiene

$$T_4 = \frac{A_t f_{yv} y_o x_o}{2s} \cot\theta \qquad (d)$$

Puede demostrarse que se obtienen expresiones idénticas para cada una de las paredes horizontales y verticales. Así, sumando la contribución de todos los lados, la capacidad nominal de la sección es

$$T_n = \sum_{i=1}^{4} T_i = \frac{2A_t f_{yv} y_o x_o}{s} \cot\theta \qquad (e)$$

Observando que $y_o x_o = A_{oh}$, y reordenando ligeramente, se obtiene

$$T_n = \frac{2A_{oh} A_t f_{yv}}{s} \cot\theta \qquad (7.4)$$

Los puntuales diagonales a compresión que se forman paralelamente a las grietas de torsión son necesarios, para el equilibrio de la sección transversal. Como se muestra en las figuras 7.8*b* y 7.8*c*, la componente horizontal de la compresión en los puntuales en las paredes verticales debe equilibrarse con una fuerza de tensión axial ΔN_4. Con base en la distribución uniforme supuesta del flujo de corte alrededor del perímetro del elemento, los esfuerzos diagonales en los puntales deben ser uniformemente distribuidos, obteniéndose una línea de acción de la fuerza resultante que coincide con la altura media de la pared. Con referencia a la figura 7.8*c*, la contribución total de la pared vertical derecha al cambio de fuerza axial del elemento debida a la presencia de la torsión es

$$\Delta N_4 = V_4 \cot\theta = \frac{A_t f_{yv} y_o}{s} \cot^2\theta$$

De nuevo, totalizando para todos los lados, el incremento axial para el elemento es

$$\Delta N = \sum_{i=1}^{4} \Delta N_i = \frac{A_t f_{yv}}{s} 2(x_o + y_o) \cot^2\theta \qquad (7.5a)$$

$$\Delta N = \frac{A_t f_{yv} p_h}{s} \cot^2\theta \qquad (7.5b)$$

donde p_h es el perímetro de la línea central de los estribos cerrados.

Debe proporcionarse refuerzo longitudinal para soportar esta fuerza axial adicional ΔN. Si se diseña el acero para que fluya, entonces

$$A_l f_{yl} = \frac{A_t f_{yv} p_h}{s} \cot^2\theta \qquad (7.6)$$

y

$$A_l = \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yv}}{f_{yl}} \cot^2\theta \qquad (7.7)$$

donde A_t = al área total del refuerzo longitudinal para resistir la torsión, pulg^2.

f_{yl} = resistencia a la fluencia del refuerzo longitudinal por torsión, lb/pulg^2.

Se ha encontrado experimentalmente que después del agrietamiento el área efectiva encerrada por la línea del flujo de corte es algo menor que el valor de A_{oh} utilizado en el desarrollo anterior. La referencia 7.7 recomienda tomar un valor reducido igual a $A_o = 0.85A_{oh}$, donde A_{oh} es el área encerrada por la línea central del refuerzo transversal. Esta recomendación se ha incluido en el Código ACI 1995 (ver la sección 7.5) y en una forma modificada de la ecuación (7.4) con A_o sustituida por A_{oh}. Se ha encontrado además de la evidencia experimental que el espesor del tubo equivalente para cargas cercanas a la última puede aproximarse convenientemente por $t = A_{oh}/p_h$, donde p_h es el perímetro de A_{oh}.

7.4 TORSIÓN Y CORTANTE

En pocos casos los elementos están sometidos a torsión pura. La situación más usual es aquélla en que una viga sujeta a los momentos flectores y fuerzas de corte corrientes, debe también resistir los momentos debidos a torsión. En un elemento no fisurado, las fuerzas de cortante y el momento torsor producen esfuerzos de corte. En un elemento fisurado, tanto el cortante como la torsión aumentan las fuerzas en los puntales diagonales (ver las figuras 4.19*c* y 7.8*b*), aumentan el ancho de las grietas diagonales y aumentan las fuerzas actuantes en el refuerzo transversal (ver las figuras 4.19*d* y 7.8*a*)

Utilizando la nomenclatura usual para el concreto reforzado, el esfuerzo cortante nominal producido por una fuerza de corte aplicada V es $\tau_v = V/b_w d$. El esfuerzo cortante producido por la torsión, dado en la ecuación 7.1, es τ_t $T/(2A_o t)$. Como se presenta en la figura 7.9*a*, para *secciones huecas* estos esfuerzos deben adicionarse directamente en un lado del elemento. Así, para una sección transversal de concreto fisurada con $A_o = 0.85A_{oh}$ y $t = A_{oh}/P_h$, el esfuerzo cortante máximo puede expresarse como

$$\tau = \tau_v + \tau_t = \frac{V}{b_w d} + \frac{T p_h}{1.7A_{oh}^2} \tag{7.8}$$

Para un elemento con una *sección sólida*, figura 7.9*b*, τ_t se distribuye principalmente alrededor del perímetro, tal como lo representa la analogía del tubo hueco, pero toda la sección transversal contribuye a soportar τ_v. La comparación con resultados experimentales demuestra que la ecuación (7.8) es algo conservadora para secciones sólidas y que se puede lograr una mejor representación del esfuerzo cortante máximo mediante la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los esfuerzos cortantes nominales:

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{V}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T p_h}{1.7A_{oh}^2}\right)^2} \tag{7.9}$$

Las ecuaciones (7.8) y (7.9) sirven para estimar los esfuerzos cortantes en el concreto bajo cargas de servicio y cargas últimas.

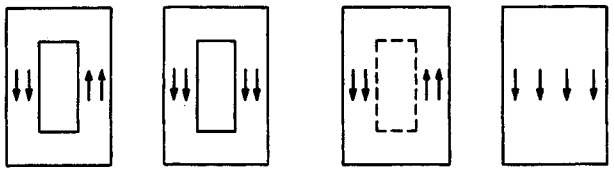


FIGURA 7.9
Adición de esfuerzos por torsión y cortante: (*a*) sección hueca; (*b*) sección sólida (*adaptada de la referencia 7.7*).

7.5 DISPOSICIONES DEL CÓDIGO ACI PARA DISEÑO A TORSIÓN

En las secciones anteriores se presentaron los principios básicos que fundamentan las disposiciones de diseño del Código ACI. Las disposiciones de seguridad del Código ACI 11.6.3.5 exigen que

$$T_u \leq \phi T_n \tag{7.10}$$

donde T_u = resistencia a la torsión requerida para cargas mayoradas
T_n = resistencia a torsión nominal del elemento

Para torsión, el coeficiente de reducción de resistencia es $\phi = 0.85$. T_n se basa en la ecuación (7.4) substituyendo A_{oh} por A_o, por lo cual

$$T_n = \frac{2A_oA_tf_{yv}}{s}\cot\theta \tag{7.11}$$

De acuerdo con el Código ACI 11.6.2, las secciones localizadas a menos de una distancia d de la cara del apoyo pueden diseñarse para el mismo momento torsor T_u que el calculado a una distancia d, reconociendo los efectos benéficos de la compresión generada en el apoyo. Sin embargo, si existe un momento torsor concentrado aplicado dentro de esta distancia, la sección crítica debe tomarse en la cara del apoyo. Estas disposiciones son paralelas a las utilizadas en diseño a cortante. Para vigas que sirven de apoyo a losas, como se presenta en la figura 7.1, los efectos de torsión producidos por la losa pueden considerarse uniformemente distribuidos a lo largo de la viga.

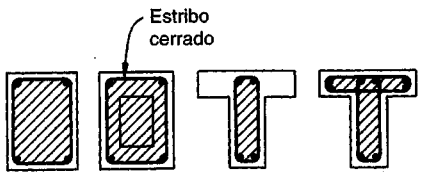
a. Vigas T y secciones en cajón

Para vigas T, una porción de las aletas que sobresalen contribuye al momento de torsión de agrietamiento y, si está reforzada con estribos cerrados, a la resistencia de torsión. De acuerdo con el Código ACI 11.6.1, el ancho de la aleta que sobresale a cada lado del alma que contribuye es igual a la menor de (*a*) la proyección de la viga por encima o por debajo de la losa; la que sea mayor, y (*b*) cuatro veces el espesor de la losa. Estos criterios son los mismos que los utilizados para losas en dos direcciones con vigas ilustrados en la figura 13.3. Al igual que para secciones sólidas, A_{cp} para secciones en cajón, con o sin aletas, representa el área encerrada por el perímetro exterior de la sección de concreto.

Para valores superiores al momento de torsión de fisuración, el momento torsor aplicado es resistido por la porción de la sección representada por A_{oh}, el área encerrada por las líneas centrales del refuerzo a torsión transversal cerrado más alejado. En la figura 7.10 se ilustra A_{oh} para secciones rectangulares, en cajón y en T. Para secciones con aletas, el código no exige que la sección utilizada para calcular A_{cp} coincida con aquélla utilizada para calcular A_{oh}.

b. Torsión mínima

Según el Código ACI 11.6.1, si el momento de torsión mayorado T_u no excede de $\phi\sqrt{f'_c}(A^2_{cp}/p_{cp})$, los efectos de torsión pueden despreciarse. Este límite inferior corresponde al 25 por ciento del momento torsor de agrietamiento determinado por la ecuación (7.3) y reducido mediante el coeficiente ϕ,



A_{oh} = área sombreada

FIGURA 7.10
Definición de A_{oh} (*adaptada de la referencia 7.7*).

como es usual para propósitos de diseño. La presencia de momentos torsionales en o por debajo de este límite, no afectará en forma significativa la resistencia a flexión o a cortante del elemento.

c. Torsión por equilibrio *versus* torsión por compatibilidad

El Código ACI establece diferencias entre la torsión por equilibrio (primaria) y la torsión por compatibilidad (secundaria). Para la primera condición, descrita anteriormente con referencia a la figura 7.1*a*, el elemento de soporte *debe* diseñarse para suministrar la resistencia a torsión requerida por equilibrio estático. Para la torsión secundaria, expuesta en la figura 7.1*b*, generada por exigencias de compatibilidad, se supone que el agrietamiento causará una redistribución de fuerzas internas; y de acuerdo con el Código ACI 11.6.2, el momento de torsión máximo mayorado T_u puede reducirse a $4\phi\sqrt{f'_c}(A^2_{cp}/p_{cp})$. Los momentos y cortantes de diseño en la losa sostenida deben ajustarse de acuerdo con lo anterior. El valor reducido de T_u que admite el Código ACI, intenta aproximar la resistencia de torsión al agrietamiento de la viga de soporte para una carga combinada de torsión y flexión. Las grandes rotaciones que se presentan con carga de torsión esencialmente constante producirían una redistribución significativa de las fuerzas internas, justificando la utilización del valor reducido en el diseño del elemento a torsión y de los elementos de soporte.

d. Límites en el esfuerzo cortante

Con base principalmente en observaciones empíricas, el ancho de las grietas diagonales producidas por la acción combinada del cortante y la torsión bajo *cargas de servicio* puede limitarse el esfuerzo cortante calculado bajo *cortante y torsión mayorados* (referencia 7.4) de manera que

$$v_{\max} \leq \phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c}\right) \tag{7.12}$$

$v_{\max}$ en la ecuación (7.12) corresponde al límite superior de la capacidad a cortante descrita en la sección 4.5d. Combinando la ecuación (7.12) con la ecuación (7.8) se obtienen límites en las dimensiones de la sección transversal de *secciones huecas,* de acuerdo con el Código ACI 11.6.3.

$$\frac{V_u}{b_w d} + \frac{T_u p_h}{1.7A^2_{oh}} \leq \phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c}\right) \tag{7.13}$$

De manera similar, para *secciones sólidas* combinando la ecuación (7.12) con la ecuación (7.9) se obtiene

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7A^2_{oh}}\right)^2} \leq \phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + 8\sqrt{f'_c}\right) \tag{7.14}$$

Si alguno de los criterios de las ecuaciones (7.13) o (7.14) no se cumple, deben aumentarse las dimensiones del elemento o la resistencia del concreto.

El Código ACI 11.6.3 exige que si el espesor de la pared varía alrededor del perímetro de una sección hueca, la ecuación (7.13) debe evaluarse en el sitio para el cual la parte izquierda de la expresión sea máxima. Si el espesor de la pared es menor que el valor supuesto de t utilizado en el desarrollo de la ecuación 7.8, A_{oh}/p_h, el valor real de t debe utilizarse en el cálculo de los esfuerzos cortantes por torsión. Como resultado, el segundo término a la izquierda de la ecuación (7.13) debe tomarse como

$$\frac{T_u}{1.7A_{oh}t}$$

donde t es el espesor de la pared de la sección hueca en el sitio en el cual se verifican los esfuerzos.

e. Refuerzo a torsión

La resistencia nominal a torsión está dada por la ecuación (7.11).

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yv}}{s} \cot\theta \tag{7.11}$$

De acuerdo con el Código ACI 11.6.3, el ángulo θ puede tomar cualquier valor entre 30° y 60°, y se sugiere tomar un valor de $\theta = 45°$. El área encerrada por el flujo de corte A_o puede determinarse mediante análisis utilizando procedimientos como los sugeridos en las referencias 7.8, o A_o puede tomarse igual a $0.85A_{oh}$. Combinando la ecuación (7.11) con la ecuación (7.10), el área requerida para la sección transversal de una rama de estribo para torsión es

$$A_t = \frac{T_u s}{2\phi A_o f_{yv} \cot\theta} \tag{7.15}$$

El código limita f_{yv} a un valor máximo de 60,000 lb/pulg^2 para efectos de control de fisuras.

El refuerzo proporcionado para torsión debe combinarse con el suministrado para cortante. Con base en estribos típicos de dos ramas, esto puede expresarse como

$$\left(\frac{A_{v+t}}{s}\right) = \frac{A_v}{s} + 2\frac{A_t}{s} \tag{7.16}$$

Tal como se describe en la sección 7.3, los estribos transversales para refuerzo a torsión deben ser cerrados para proporcionar la capacidad a tensión requerida a través de las grietas diagonales en todas las caras de la viga. Los estribos en forma de U comúnmente utilizados para refuerzo transversal a cortante, no son idóneos para refuerzo a torsión. Por otro lado, los estribos cerrados de una sola pieza hacen que el armado del refuerzo de la viga en el sitio sea relativamente difícil, y por razones prácticas los estribos a torsión se construyen generalmente con flejes de dos piezas como aparece en la figura 7.11. Un estribo en forma de U se combina con una barra superior horizontal anclada en forma apropiada.

Debido a que el concreto de recubrimiento de un cajón de refuerzo mal detallado tiende a desprenderse cuando el elemento está sometido a torsión, el refuerzo transversal a torsión debe

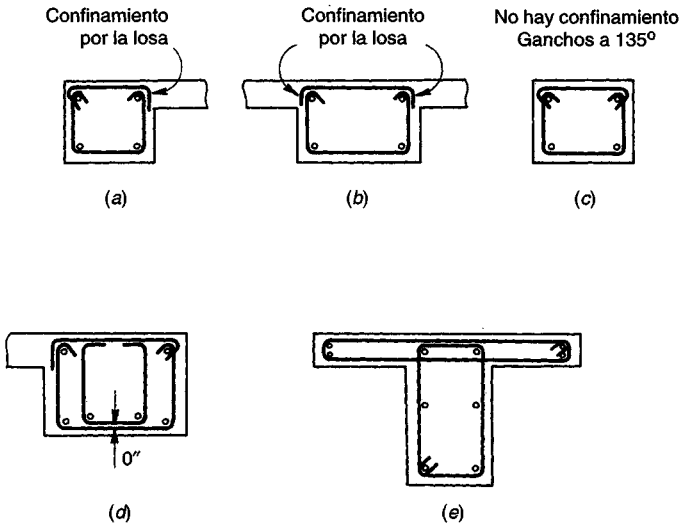


FIGURA 7.11
Estribos y refuerzo longitudinal a torsión: (*a*) viga principal con aletas a un lado; (*b*) viga interior; (*c*) viga rectangular aislada; (*d*) viga principal ancha; (*e*) viga T con refuerzo a torsión en las aletas.

anclarse dentro del núcleo de concreto (referencia 7.9). El Código ACI 11.6.4 exige que los estribos o flejes utilizados para refuerzo transversal deben anclarse con ganchos estándar a 135° alrededor de un barra longitudinal, a menos que el concreto que rodea el anclaje esté confinado contra el desprendimiento por una aleta o una losa, en cuyo caso pueden utilizarse ganchos estándar a 90° como se presenta en las figuras 7.11*a*, *b* y *d*. No deben utilizarse estribos en forma de U superpuestos como se muestra en la figura 5.12*d*. Si las aletas se incluyen en el cálculo de la resistencia de torsión de vigas en forma de T o L, deben proporcionarse estribos cerrados a torsión en las aletas tal como se indica en la figura 7.11*e*.

El espaciamiento requerido de los estribos cerrados, que satisface la ecuación (7.16), se selecciona por ensayo con base en los tamaños estándar de las barras.

Para controlar el agrietamiento en espiral, el máximo espaciamiento de los estribos a torsión no debe exceder $p_h/8$ ó 12 pulgadas; el que sea menor. Adicionalmente, para elementos que requieren tanto refuerzo a cortante como a torsión, el área mínima de estribos cerrados debe ser tal que

$$(A_v + 2A_t) \geq 50\frac{b_w s}{f_{yv}} \tag{7.17}$$

de acuerdo con el Código ACI 11.6.5.

El área de las barras de refuerzo longitudinal A_l requeridas para resistir la torsión está dada por la ecuación 7.7, donde θ debe tener el mismo valor empleado para calcular A_t. En la ecuación 7.7 A_t/s debe tomarse como el valor calculado utilizando la ecuación 7.15, sin haberlo modificado por los requerimientos de acero transversal mínimo. El Código ACI 11.6.3 permite reducir una porción de A_l en la zona de compresión por flexión en una cantidad igual a $M_u/(0.9df_{yl})$, donde M_u es el momento mayorado que actúa en la sección en combinación con T_u.

Con base en la evaluación del comportamiento de especímenes de ensayo conformados por vigas de concreto reforzado sometidas a torsión, el Código ACI 11.6.5 exige que A_l no sea menor que

$$A_{l,\min} = \frac{5\sqrt{f'_c}\,A_{cp}}{f_{yl}} - \left(\frac{A_t}{s}\right)p_h\frac{f_{yv}}{f_{yl}} \tag{7.18}$$

donde $A_t/s \geq 25b_w/f_{yv}$, con f_{yv} en lb/pulg^2.

El espaciamiento de las barras longitudinales no debe exceder de 12 pulgadas y deben estar distribuidas alrededor del perímetro de la sección transversal para controlar el agrietamiento. Las barras no deben ser menores que la número tres ni deben tener un diámetro menor que $\frac{1}{24}$ del espaciamiento de los estribos transversales. Debe colocarse al menos una barra longitudinal en cada una de las esquinas de los estribos. Debe darse especial atención al anclaje del refuerzo longitudinal a torsión de manera que éste sea capaz de desarrollar su resistencia a la fluencia en la cara de las columnas de soporte, donde usualmente los momentos torsores son máximos.

El refuerzo requerido por torsión puede combinarse con aquél requerido para otras fuerzas, siempre y cuando el área suministrada sea la suma de las áreas individuales requeridas y se cumplan los requisitos más exigentes en cuanto a espaciamiento y colocación del refuerzo. De acuerdo con el Código ACI 11.6.6, debe proporcionarse el refuerzo a torsión al menos por una distancia igual a $b_t + d$ más allá del punto donde teóricamente se requiere, donde b_t es el ancho de aquella parte de la sección transversal que contiene los estribos cerrados que resisten torsión. De acuerdo con las disposiciones del Código ACI, el punto en el cual no se requiere más refuerzo a torsión es el punto en el cual $T_u < \phi\sqrt{f'_c}\,(A^2_{cp}/p_{cp})$. Este valor es el 25 por ciento del momento torsor de agrietamiento, reducido por el factor ϕ dado en la sección 7.5b.

El tema referente a diseño a torsión del concreto preesforzado no se trata aquí pero, como se presenta en el Código ACI 11.6, éste se diferencia apenas en algunos detalles con respecto a la presentación anterior para vigas de concreto reforzado no preesforzadas.

f. Diseño a torsión

El diseño a torsión de un elemento a flexión de concreto reforzado involucra una serie de pasos. La siguiente secuencia asegura que se cubren cada uno de éstos:

1. Determinar si el momento torsor mayorado es menor que $\phi\sqrt{f'_c}(A^2_{cp}/p_{cp})$. Si es así, la torsión puede despreciarse. Si no, continuar con el diseño. Observe que en este paso deben incluirse las porciones de las aleteas sobresalientes, tal como se definen en la sección 7.5a, en el cálculo de A_{cp} y P_{cp}.
2. Si se trata de torsión por compatibilidad, en lugar de torsión de equilibrio, tal como se describe en las secciones 7.1 y 7.5c, el momento torsor mayorado máximo puede reducirse a $4\phi\sqrt{f'_c}(A^2_{cp}/p_{cp})$, ajustando de manera correspondiente los momentos y cortantes en los elementos de soporte. La torsión por equilibrio no puede ajustarse.
3. Verificar los esfuerzos cortantes en la sección bajo cortante y torsión combinados utilizando el criterio de la sección 7.5d.
4. Calcular el refuerzo transversal requerido para torsión utilizando la ecuación (7.15), y para cortante utilizado la ecuación (4.14*a*). Combinar A_t y A_v utilizando la ecuación (7.16).
5. Verificar que se cumplen los requisitos mínimos de refuerzo transversal tanto para torsión como para cortante. Éstos incluyen el espaciamiento máximo como se describe en las secciones 7.5e y 4.5d, y el área mínima dada en la ecuación (7.17).
6. Calcular el refuerzo de torsión longitudinal requerido A_l utilizando el mayor de los valores dado en las ecuaciones (7.7) y (7.18), cumpliendo los requisitos de espaciamiento y tamaño de barras dado en la sección 7.5e. La porción de A_l en la zona de compresión por flexión puede reducirse en $M_u/(0.9df_{yl})$, siempre y cuando se cumplan la ecuación (7.18) y los requerimientos de espaciamiento y de tamaños de barras.
7. Continuar el refuerzo a torsión hasta $b_t + d$ más allá del punto donde T_u es menor que $\phi\sqrt{f'_c}(A^2_{cp}/p_{cp})$.

Ejemplo 7.1. Diseño a torsión y a cortante. La viga con 28 pies expuesta en las figuras 7.12*a* y *b* sostiene una losa monolítica con un voladizo de 6 pies desde el centro de la viga como aparece en la sección. La viga en L resultante sostiene una carga viva de 900 lb/pie a lo largo de la línea central de la viga más 50 libras por pie^2 distribuida uniformemente sobre la superficie superior de la losa. La altura efectiva hasta el centroide del acero a flexión es de 21.5 pulgadas y la distancia desde la superficie de la viga hasta el centroide del acero de los estribos es $1\frac{3}{4}$ pulg. Las resistencias de los materiales son f'_c = 5000 lb/pulg^2 y f_y = 60,000 lb/pulg^2. Diseñe el refuerzo a torsión y a cortante de la viga.

Solución. Si se aplican los coeficientes de carga del ACI a las cargas de la losa, se obtiene:

$$1.4w_d = 1.4 \times 75 \times 5.5 = 580 \text{ lb/pie}$$
$$1.7w_l = 1.7 \times 50 \times 5.5 = \underline{470 \text{ lb/pie}}$$
$$\text{Total} = 1050 \text{ lb/pie a 3.25 pies de excentricidad}$$

mientras que la viga soporta directamente

$$1.4w_d = 1.4 \times 300 = 420 \text{ lb/pie}$$
$$1.7w_l = 1.7(900 + 50) = \underline{1620 \text{ lb/pie}}$$
$$\text{Total} = 2040 \text{ lb/pie}$$

Así, la carga uniformemente distribuida sobre la viga es 3090 lb/pie, y actúa de manera simultánea con un momento torsor distribuido uniformemente de 1050 × 3.25 = 3410 lb-pie/pie. En la cara de la columna la fuerza cortante de diseño es V_u = 3.090 × 28/2 = 43.3 klb. En el mismo sitio, el momento de torsión de diseño es T_u = 3.410 × 28/2 = 47.7 klb-pie.

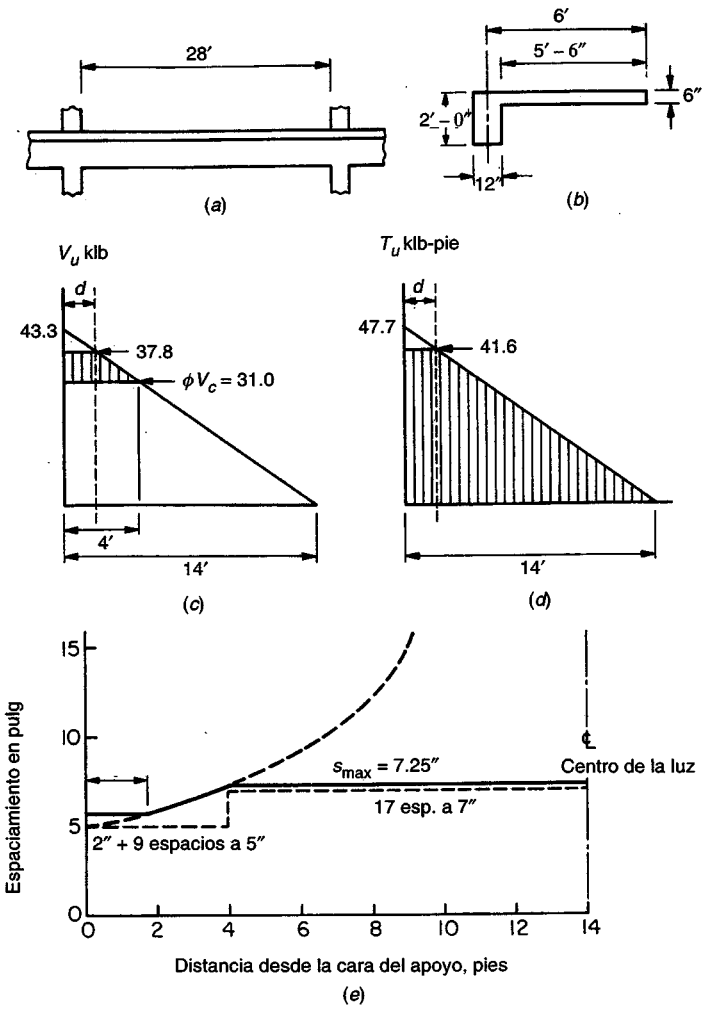


FIGURA 7.12
Ejemplo de diseño para cortante y torsión

La variación de V_u y T_u con la distancia a la columna de apoyo la determinan las figuras 7.12*c* y *d*, respectivamente. Los valores de V_u y T_u en la sección crítica de diseño, a una distancia d de la cara de la columna son:

$$V_u = 43.3 \times \frac{12.21}{14} = 37.8 \text{ klb}$$

$$T_u = 47.7 \times \frac{12.21}{14} = 41.6 \text{ klb-pie}$$

Para la viga efectiva $A_{cp} = 12 \times 24 + 6 \times 18 = 396$ pulg^2 y $P_{cp} = 2 \times 24 + 2 \times 30 = 108$ pulg. De acuerdo con el Código ACI, la torsión puede despreciarse si $T_u \leq 0.85 \times \sqrt{5000}\ (396^2/108)/12{,}000 =$ 7.3 klb-pie. En el presente caso es claro que la torsión debe considerarse. Debido a que la resistencia a torsión de la viga se requiere para el equilibrio, no debe realizarse ninguna reducción en el valor de T_u.

Antes de diseñar el refuerzo a torsión, debe verificarse que la sección cumpla con la ecuación (7.14). Aunque para verificar si la torsión podía despreciarse, A_{cp} se calculó considerando las aletas (tal como lo exige el Código ACI 11.6.1); los cálculos subsecuentes para funcionalidad y resistencia desprecian las aletas y no se proporciona ningún refuerzo a torsión en las mismas. Como referencia, $b_w d = 12 \times 21.5 = 258$ pulg^2. Considerando un recubrimiento de $1\frac{3}{4}$ hasta el centro de las barras de

los estribos en todas las caras, $x_o = 12 - 3.5 = 8.5$ pulg y $y_o = 24.0 - 3.5 = 20.5$ pulg. Así, $A_{oh} = 8.5 \times 20.5 = 174$ pulg^2, $A_o = 0.85 \times 174 = 148$ pulg^2, y $P_h = 2(8.5 + 20.5) = 58$ pulg. Utilizando la ecuación (7.14),

$$\sqrt{\left(\frac{37.8}{258}\right)^2 + \left(\frac{41.6 \times 12 \times 58}{1.7 \times 174^2}\right)^2} \leq \frac{0.85}{1000}\left(2\sqrt{5000} + 8\sqrt{5000}\right)$$

$$0.581 \text{ klb/pulg}^2 \leq 0.601 \text{ klb/pulg}^2$$

Según esto, la sección transversal tiene un tamaño adecuado para la resistencia dada del concreto.

Los valores de A_t y A_v se calculan ahora en la cara de la columna (únicamente como referencia). Utilizando la ecuación (7.15) y seleccionando $\theta = 45^o$,

$$A_t = \frac{T_u s}{2\phi A_o f_{yv} \cot\theta}$$

$$= \frac{47.7 \times 12s}{2 \times 0.85 \times 148 \times 60 \times 1} = 0.0379\,s$$

para una rama de un estribo vertical cerrado, o $0.0758\,s$ para dos ramas.

La capacidad a cortante del concreto solo, obtenida a partir de la ecuación (4.12*b*), es

$$\phi V_c = 0.85 \times 2\sqrt{f'_c} b_w d$$

$$= \frac{0.85 \times 2\sqrt{5000} \times 258}{1000} = 31.0 \text{ klb}$$

A partir de la ecuación (4.14*a*), el refuerzo en el alma para el cortante transversal, de nuevo calculado en la cara de la columna, es

$$A_v = \frac{(V_u - \phi V_c)s}{\phi f_{yv} d} = \frac{(43.3 - 31.0)s}{0.85 \times 60 \times 21.5} = 0.0112\,s$$

que debe proporcionarse con dos ramas verticales.

El valor calculado de A_t disminuye linealmente hasta cero en el centro de la luz y el valor calculado de A_v disminuye linealmente hasta cero a 4 pies desde la cara del apoyo, el punto en el cual $V_u = \phi V_c$. Así, el área total que debe suministrarse mediante las dos ramas verticales es

$$2A_t + A_v = 0.0758s\left(1 - \frac{x}{14}\right) + 0.0112s\left(1 - \frac{x}{4}\right)$$

para $0 \leq x \leq 4$ pies, donde x es la distancia a partir de la cara del apoyo y

$$2A_t + A_v = 0.0758s\left(1 - \frac{x}{14}\right)$$

para $4 \leq x \leq 14$ pies.

Los estribos cerrados No. 4 suministran un área total en las dos ramas de 0.40 pulg^2. Para $2A_t + A_v = 0.40$ pulg^2 el espaciamiento requerido a d y a intervalos de 2 pies a lo largo de la luz puede determinarse utilizando las relaciones dadas entre área de estribos y espaciamiento:

$$\begin{aligned} s_d &= 5.53 \text{ pulg} \\ s_2 &= 5.67 \text{ pulg} \\ s_4 &= 7.39 \text{ pulg} \\ s_6 &= 9.23 \text{ pulg} \\ s_8 &= 12.3 \text{ pulg} \\ s_{10} &= 18.5 \text{ pulg} \end{aligned}$$

Estos valores de s se dibujan en la figura 7.12*e*. Ahora deben verificarse las disposiciones del Código ACI para espaciamiento máximo. Para refuerzo a torsión, el máximo espaciamiento es el menor de

$$\frac{p_h}{8} = \frac{58}{8} = 7.25 \text{ pulg}$$

o 12 pulgadas, mientras que en las disposiciones para cortante, el máximo espaciamiento es $d/2 = 10.75$ pulg ≤ 24 pulg. La primera de las anteriores disposiciones es la más restrictiva y en la figura 7.12*e* se dibuja el máximo espaciamiento de 7.25 pulg. Los estribos entre la cara del apoyo y una distancia d pueden espaciarse a s_d. Los espaciamientos requeridos resultantes se indican mediante la línea continua de la figura. Estos requisitos se cumplen de manera práctica utilizando estribos cerrados No. 4, el primero localizado a dos pulgadas desde la cara de la columna, seguido de 9 estribos con un espaciamiento de 5 pulgadas, y 17 estribos con un espaciamiento de 7 pulgadas. De acuerdo con el Código ACI, los estribos pueden interrumpirse en el punto para el cual $V_u < \phi V_c/2$ (5 pies desde el centro de la luz) o a una distancia $(b_t + d) = 2.8$ pies más allá del punto para el cual $T_u < \phi \sqrt{f'_c}(A^2_{cp}/p_{cp})$. Este último punto está más allá del centro del elemento; por tanto, se requieren estribos mínimos a lo largo de toda la luz. El acero mínimo de 0.40 pulg^2 en el alma que se suministra, satisface el mínimo establecido por el Código ACI de $50b_w s/f_y = 50 \times 12 \times 7/60{,}000 = 0.07$ pulg^2.

Luego se calcula el acero longitudinal exigido para efectos de torsión a una distancia d desde la cara de la columna. En este sitio

$$\frac{A_t}{s} = 0.0379\left(1 - \frac{1.79}{14}\right) = 0.0331$$

y a partir de la ecuación 7.7

$$A_l = 0.0331 \times 58 \times \frac{60}{60} \times 1^2 = 1.92 \text{ pulg}^2$$

con un total no menor que [ecuación (7.18)]

$$A_{l,\,min} = \frac{5\sqrt{5000} \times 396}{60 \times 1000} - 0.0331 \times 58 \times \frac{60}{60} = 0.41 \text{ pulg}^2$$

en la cual A_t/s no debe tomarse menor que $25 \times 12/60{,}000 = 0.005$.

De acuerdo con el Código ACI, el espaciamiento no debe ser mayor que 12 pulgadas, y las barras no deben ser menores que la número 3 en tamaño y no deben tener un diámetro menor que $s/24 = 0.21$ pulg. El refuerzo se ubicará en la parte superior, en el centro y en la parte inferior del elemento, colocando en cada nivel un área mínima de $1.92/3 = 0.64$ pulg^2. En el centro de la altura se utilizarán dos barras No. 6 mientras que en las partes superior e inferior del elemento se aumentará el refuerzo a flexión en 0.64 pulg^2.

Aunque el área requerida A_l disminuye en proporción directa a A_t, y por tanto disminuye linealmente desde una distancia d desde la cara de la columna hasta el centro de la luz, las barras se prolongarán en forma continua a lo largo del elemento para facilitar la construcción. Aunque el Código ACI 11.6.3 establece que el valor de A_l puede disminuirse en las zonas de compresión por flexión en una cantidad igual a $M_u/(0.9df_{yl})$, aquí no se realizarán esta reducción. Se proporcionará el empotramiento adecuado más allá de la cara de la columna con el fin de desarrollar en las barras el valor completo de f_{yl} en ese sitio.

REFERENCIAS

7.1. P. Lampert and B. Thurlimann, "Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending", *Int. Assoc. Bridge and Struct. Eng.* Publ. 31-I, Zurich, 1971, pp. 107-131.

7.2. B. Thurlimann, "Torsional Strength of Reinforced and Prestressed Beams—CEB Approach", in *Concrete Design: U. S. and European Practices,* ACI Special Publication SP-59, 1979, pp. 117-143.

7.3. *CEB-FIP Model Code 1990,* Thomas Telford, London, 1991.

7.4. CSA Committee A23.3, *Design of Concrete Structures*, Canadian Standards Association, Etobicoke, Ontario, 1994, 199 pp.

7.5. T. T. C. Hsu, "Torsion of Structural Concrete—Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members", in *Torsion of Structural Concrete*, ACI Special Publication SP-18, 1968, pp. 261-306.

7.6. A. H. Mattock, Disc. Of "Design of Torsion" by J. G. McGregor and M. G. Ghoneim (Ref. 7.7), *ACI Struct, J.*, vol. 93, no. 1, 1996, pp. 142-143.

7.7. J. G. MacGregor and M. G. Ghoneim, "Design of Torsion", *ACI Struct, J.*, vol. 92, No. 2, 1995, pp. 218-221.

7.8. T. T. C. Hsu, "Shear Flow Zone in Torsion of Reinforced Concrete", *J. Struct. Engrg.*, vol. 116, no. 11, 1990, pp. 3206-3226.

7.9. D. Mitchell and M. P. Collins, "Detailing for Torsion", *J. ACI*, vol. 73, no. 9, 1976, pp. 506-511.
7.10. *Building Code Requirements for Structural Concrete*, ACI 318-95, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 1995.
7.11. *Commentary on Building Code Requirements for Structural Concrete*, ACI 318R-95, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 1995 (publicado como parte de la Ref. 7.10).

PROBLEMAS

7.1. Una viga con sección transversal rectangular de dimensiones $b = 22$ pulg y $h = 15$ pulg, debe sostener una carga mayorada total de 4000 lb/pie y distribuida uniformemente a lo largo de su luz de 26 pies. Además, estará sometida a una torsión uniformemente distribuida de 2000 lb-pie/pie para las cargas mayoradas. Se usarán estribos cerrados para efectos de cortante por flexión y de torsión, localizados de manera que el centroide del acero de los estribos esté a 1.75 pulg de cada cara de concreto. La altura efectiva a flexión correspondiente será aproximadamente 12.5 pulg. Diseñe el refuerzo transversal de esta viga y calcule el incremento necesario en el área de acero longitudinal para absorber la torsión, utilizando $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

7.2. Requisitos arquitectónicos y de holgura exigen la utilización de la viga de transferencia ilustrada en la figura P7.2, con una luz de 20 pies entre las caras de las columnas de apoyo. La viga debe sostener, proveniente de los pisos superiores, una carga concentrada de 20 klb en el centro de la luz, que se aplica con una excentricidad de 2 pies con respecto al centro de la viga (se incluyen los coeficientes de carga al igual que una estimación para el peso propio de la viga). El elemento tendrá dimensiones $b = 10$ pulg, $h = 20$ pulg, $x_o = 6.5$ pulg, $y_o = 16.5$ pulg y $d = 17$ pulg. Las columnas de apoyo suministran una rigidez de torsión completa; la rigidez a flexión en los extremos de la luz puede suponerse que desarrolla el 40 por ciento del momento máximo que se obtendría si la viga estuviera simplemente apoyada. Diseñe tanto el acero transversal como el longitudinal para la viga. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 40{,}000$ lb/pulg^2 y $f_y = 4000$ lb/pulg^2.

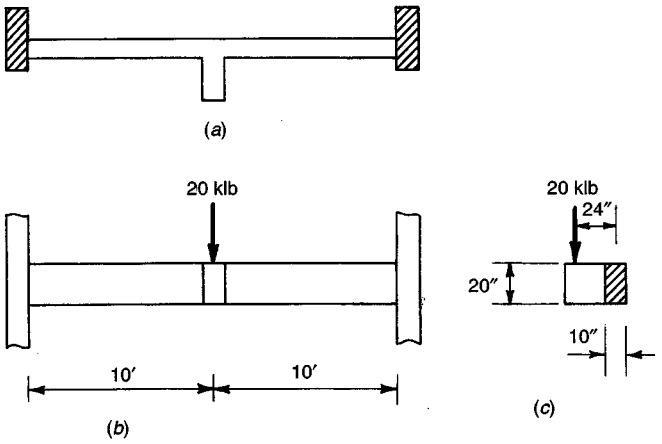


FIGURA P7.2
Viga de transferencia: (*a*) vista en planta; (*b*) vista en alzada; (*c*) vista lateral.

7.3. La viga que se muestra en sección transversal en la figura P7.3 es un elemento típico interior de un pórtico continuo de un edificio, con luces de 30 pies entre las caras de apoyo. Para las cargas mayoradas, esta viga sostendrá una carga vertical uniformemente distribuida de 3500 lb/pie, que actúa en forma simultánea con una torsión uniformemente distribuida de 3000 lb-pie/pie. El refuerzo transversal para cortante y torsión consistirá en estribos No. 4 como aparecen, con una distancia libre a todas las caras de concreto de 1.5 pulg. Tome la altura efectiva hasta el acero a flexión igual a 22.5 pulg, tanto para la región a flexión negativa como para la positiva. Diseñe el refuerzo transversal a cortante y torsión, y calcule el acero longitudinal que debe adicionarse al de flexión por efecto de la torsión. El refuerzo a torsión se colocará únicamente en el alma y no en las aletas, de manera que no es necesario contar con éstas para los cálculos de los efectos de torsión. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f_y = 4000$ lb/pulg^2.

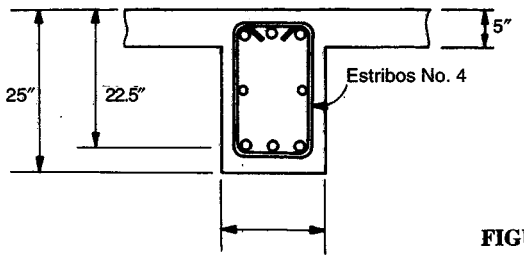


FIGURA P7.3

7.4. La viga T para un puente de una luz, descrita en el problema 3.14 del capítulo 3, está reforzada a flexión con cuatro barras No. 10 en dos filas, que continúan sin interrupción hasta los apoyos permitiendo soportar una carga viva de servicio de 1.50 klb/pie, además de la carga muerta de 0.93 klb/pie que incluye su peso propio. Suponga ahora que solamente actúa la mitad de esta carga viva pero que se aplica sobre la mitad del ancho del elemento, totalmente hacia la derecha de la línea central de la sección. Diseñe el refuerzo transversal a cortante y torsión, y calcule el acero longitudinal modificado que se necesita para esta condición de carga excéntrica. Puede proveerse refuerzo a torsión en la losa si se requiere, al igual que en el alma. Para los estribos se utilizarán barras No. 3 o No. 4 con distancias libres de 1.5 pulg hasta las caras de concreto. Los apoyos no suministran restricción contra rotaciones por flexión, pero sí proporcionan una restricción total contra torsión. Haga un esquema de su diseño final, con el despiece de todo el refuerzo. Las resistencias de los materiales son las mismas del problema 3.14.

CAPÍTULO



8 COLUMNAS CORTAS

8.1 INTRODUCCIÓN: COMPRESIÓN AXIAL

Las columnas se definen como elementos que sostienen principalmente cargas a compresión. En general, las columnas también soportan momentos flectores con respecto a uno o a los dos ejes de la sección transversal y esta acción de flexión puede producir fuerzas de tensión sobre una parte de la sección transversal. Aun en estos casos, se hace referencia a las columnas como elementos a compresión puesto que las fuerzas de compresión dominan su comportamiento. Además del tipo más común como son los elementos verticales de estructuras, los elementos a compresión incluyen elementos principales de arcos, de pórticos rígidos inclinados o no, elementos a compresión en cerchas, cascarones o porciones de éstas que soportan compresión axial y otras formas estructurales. En este capítulo se utilizará el término *columna* en forma intercambiable con el término *elemento a compresión*, por simplicidad y de conformidad con el uso general.

Se utilizan tres tipos de elementos a compresión de concreto reforzado:

1. Elementos reforzados con barras longitudinales y flejes transversales.
2. Elementos reforzados con barras longitudinales y espirales continuas.
3. Elementos compuestos a compresión reforzados longitudinalmente con perfiles de acero estructural o con tubos con o sin barras longitudinales adicionales, además de diferentes tipos de refuerzo transversal.

Los tipos 1 y 2 son los más comunes y la mayor parte del análisis en este capítulo se refiere a ellos.

El refuerzo principal en columnas es longitudinal, paralelo a la dirección de la carga y consta de barras dispuestas en forma de cuadrado, rectángulo o círculo, como se indicó en la figura 1.14. La figura 8.1 presenta trabajadores ajustando los flejes para el refuerzo principal en la construcción del edificio de Empresas Públicas ubicado en Medellín, Colombia. La relación del área de acero longitudinal A_{st} al área de la sección transversal bruta de concreto A_g está en el intervalo de 0.01 a 0.08, conforme al Código ACI 10.9.1. El límite inferior es necesario para garantizar una resistencia a momentos flectores no tenidos en cuenta en el análisis y para reducir los efectos del flujo plástico y de la retracción de fraguado del concreto sometido a compresión sostenida. Relaciones mayores que 0.08 no son solamente antieconómicas, sino que producen dificultades relacionadas con la congestión del refuerzo, en particular en las zonas de empalme del acero. Por lo general se utilizan barras de los diámetros más grandes para reducir los costos de colocación y para

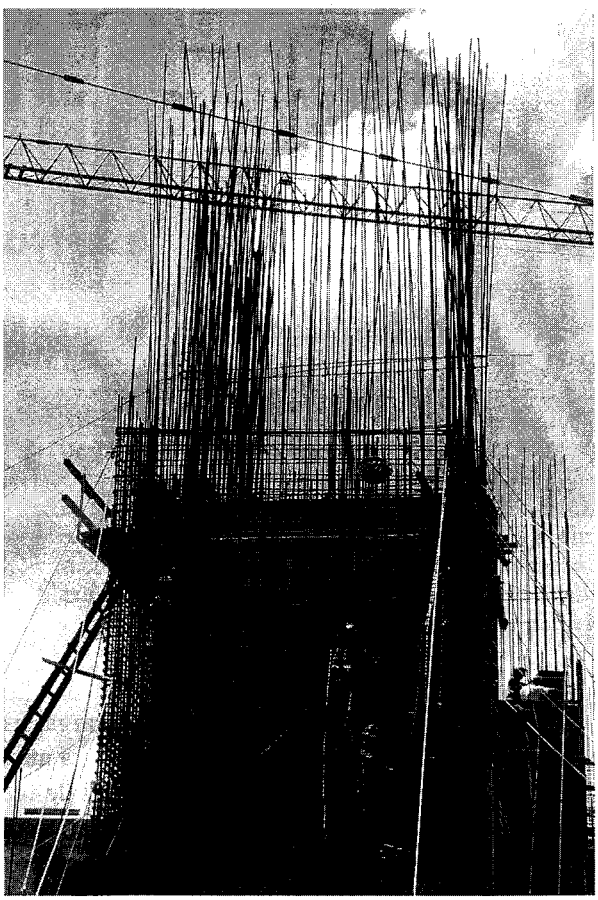


FIGURA 8.1
Refuerzo para una columna principal del edificio de Empresas Públicas, en Medellín, Colombia.

evitar una congestión innecesaria. Las barras Nos. 14 y 18 con diámetros grandes se producen en especial para ser utilizadas en columnas. Según el Código ACI 10.9.2, se requiere un mínimo de cuatro barras longitudinales cuando éstas están encerradas por flejes rectangulares o circulares regularmente espaciados y un mínimo de seis cuando las barras longitudinales están encerradas por una espiral continua.

Las columnas pueden dividirse en dos grandes categorías: las *columnas cortas*, en las cuales la resistencia se rige por la resistencia de los materiales y por la geometría de la sección transversal, y las *columnas esbeltas* en las cuales la resistencia puede reducirse en forma significativa por las deflexiones laterales. Hace algunos años, un estudio conjunto del ACI y la ASCE señalaba que el 90 por ciento de las columnas arriostradas contra desplazamiento lateral y el 40 por ciento de las no arriostradas podrían diseñarse como columnas cortas. El arriostramiento lateral efectivo, que evita el movimiento lateral relativo de los dos extremos de una columna, se proporciona a menudo mediante muros de cortante, núcleos de ascensores y de escaleras, arriostramiento diagonal o una combinación de éstos. Aunque las columnas esbeltas son ahora más comunes por el uso generalizado de materiales de alta resistencia y por el mejoramiento en los métodos para calcular las dimensiones de los elementos, resulta aún válido que, en la práctica corriente, la mayor parte de las columnas pueden considerarse columnas cortas. En este capítulo se analizará sólo lo relacionado con las columnas cortas; los efectos de la esbeltez en la reducción de la resistencia de las columnas se cubrirá en el capítulo 9.

El comportamiento de elementos a compresión cortos y cargados axialmente se estudió en la sección 1.9 para introducir los aspectos básicos del concreto reforzado. En este momento se recomienda hacer una revisión de ese material. En ese análisis se demostró que, para cargas bajas en las cuales los dos materiales se mantienen en su intervalo elástico de respuesta, el acero toma una

porción relativamente pequeña de la carga total. El esfuerzo en el acero f_s es igual a n veces el esfuerzo del concreto:

$$f_s = nf_c \tag{8.1}$$

donde $n = E_s/E_c$ es la relación modular. Para este intervalo de cargas, la carga axial P está dada por

$$P = f_c[A_g + (n-1)A_{st}] \tag{8.2}$$

donde el término entre paréntesis cuadrados es el área de la sección transformada. Las ecuaciones (8.2) y (8.1) pueden utilizarse para encontrar los esfuerzos en el concreto y en el acero respectivamente, para unas cargas dadas, teniendo en cuenta que los dos materiales permanecen en el intervalo elástico. Con el ejemplo 1.1 se demostró el uso de estas ecuaciones.

En la sección 1.9 se probó además, que la resistencia última nominal de una columna cargada axialmente puede encontrarse reconociendo la respuesta no lineal de los dos materiales, mediante

$$P_n = 0.85 f'_c A_c + A_{st} f_y \tag{8.3a}$$

o

$$P_n = 0.85 f'_c (A_g + A_{st}) + A_{st} f_y \tag{8.3b}$$

es decir, sumando las contribuciones a la resistencia de los dos componentes de la columna. Para este estado de cargas, el acero sostiene una fracción significativamente mayor de la carga que para el caso en que la carga total era menor.

El cálculo de la resistencia última nominal de una columna cargada axialmente se demostró en la sección 1.9.

Con respecto al Código ACI 10.3.5, la *resistencia de diseño* útil de una columna cargada axialmente debe determinarse con la ecuación (8.3*b*) con la introducción de coeficientes de reducción de resistencia. Los coeficientes del ACI son menores para columnas que para vigas; esto refleja la mayor importancia de las columnas en una estructura. En general, la falla de una viga afectará solamente una región de la estructura, mientras que la falla de una columna puede generar el colapso de la estructura completa. Además, estos coeficientes reflejan las diferencias en el comportamiento de columnas con flejes y de aquéllas reforzadas en espiral, tema que se analizará en la sección 8.2. Para columnas reforzadas en espiral se utiliza un coeficiente básico ϕ de 0.75 y para aquéllas con flejes, $\phi = 0.70$, en comparación con el valor de $\phi = 0.90$ para vigas.

El Código ACI 10.3.5 establece una limitación adicional en la resistencia de las columnas con el fin de compensar excentricidades accidentales de cargas no tratadas en el análisis. Esto podría lograrse especificando una excentricidad mínima (como se hizo en ediciones previas al Código) o más directamente, con la determinación de un límite superior en la capacidad, menor que la resistencia calculada de diseño. Este límite superior se toma igual a 0.85 veces la resistencia de diseño para columnas reforzadas en espiral y 0.80 veces la resistencia calculada para las columnas con flejes. Entonces, de acuerdo con el Código ACI 10.3.5, para columnas reforzadas en espiral

$$\phi P_{n(\max)} = 0.85\phi[0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \tag{8.4a}$$

con $\phi = 0.75$. Para columnas con flejes

$$\phi P_{n(\max)} = 0.80\phi[0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}] \tag{8.4b}$$

con $\phi = 0.70$.

8.2 FLEJES TRANSVERSALES Y ESPIRALES

La figura 1.14 presenta secciones transversales de los tipos más sencillos de columnas, reforzadas en espiral o con flejes transversales. Con frecuencia se puede encontrar otro tipo de estas secciones en edificios y puentes, algunas de las cuales aparecen en la figura 8.2. En general, para elementos con grandes fuerzas axiales y momentos pequeños, las barras longitudinales se distribuyen en forma más o menos uniforme alrededor del perímetro (ver las figuras 8.2*a* a 8.2*d*). Cuando los momentos flectores son grandes, la mayor parte del acero longitudinal se concentra en las caras de mayor compresión o tensión, es decir, a las máximas distancias del eje de flexión (ver las figuras 8.2*e* hasta 8.2*h*). En las referencias 8.1 y 8.2 se encuentran patrones específicos recomendados para muchas combinaciones y distribuciones de barras. En columnas fuertemente cargadas y reforzadas con grandes cuantías de acero, la utilización de una cantidad numerosa de barras, cada una de ellas ubicada y sostenida individualmente mediante flejes, produce congestión del acero en las formaletas y dificultad en el vaciado del concreto. En estos casos, a menudo se emplean barras en paquete, los cuales están conformados por tres o cuatro barras amarradas en contacto directo unidas con alambre o ajustadas de cualquier otra manera; éstas, por lo general, se colocan en las esquinas. Diversos ensayos demuestran que las barras empaquetadas de manera apropiada actúan como una unidad, es decir, pueden considerarse como si el paquete constituyera una sola barra de sección circular con un área igual a la suma de las áreas de las barras que componen el paquete.

El refuerzo transversal en forma de flejes individuales ampliamente espaciados o de una espiral continua poco espaciada, cumple diferentes funciones. En primer lugar, este refuerzo se requiere para mantener las barras longitudinales en su posición dentro de las formaletas mientras se vacía el concreto. Para este propósito, el acero longitudinal y el transversal se unen mediante alambres para conformar un entramado que se coloca después dentro de la formaleta y se ubica de manera adecuada antes del vaciado del concreto. Por otro lado, el refuerzo transversal se necesita para impedir que las barras longitudinales esbeltas sometidas a altos esfuerzos presenten pandeo hacia afuera, produciendo el descascaramiento del recubrimiento relativamente delgado del concreto.

Evidentemente las espirales poco espaciadas cumplen estas dos funciones. Por otro lado, los flejes, que pueden distribuirse y espaciarse de diferentes maneras, deben diseñarse para que cumplan estos dos propósitos. Esto significa que el espaciamiento debe ser suficientemente pequeño para evitar el pandeo entre flejes y que es necesario suministrar la cantidad suficiente de flejes en cualquier plano de amarre para posicionar y sostener todas las barras. De otra parte, para el caso de columnas con muchas barras longitudinales, si la sección de la columna está atravesada por demasiados flejes, éstos interfieren con el vaciado del concreto dentro de las formaletas. Para lograr un amarre efectivo, manteniendo la cantidad mínima de flejes, el Código ACI 7.10.5 da las siguientes reglas para la distribución de los flejes:

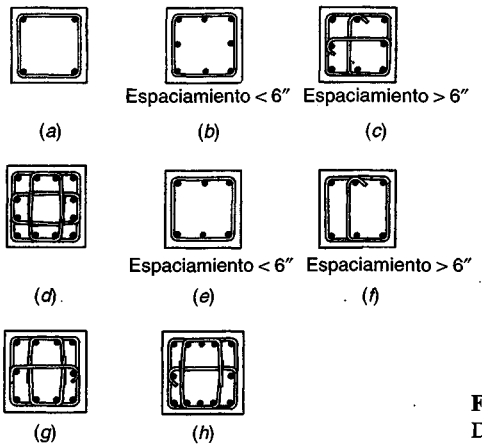


FIGURA 8.2
Distribución de flejes en columnas cuadradas y rectangulares.

Todas las barras de columnas deben estar encerradas por *flejes transversales* con tamaños por lo menos No. 3 para barras longitudinales hasta la No. 10, y con tamaños por lo menos No. 4 para las barras longitudinales Nos. 11, 14 y 18, y para las barras longitudinales en paquete. El espaciamiento de los flejes no debe exceder 16 diámetros de las barras longitudinales, 48 diámetros de las barras de los flejes ni la menor dimensión de la columna. Los flejes deben distribuirse de manera que cada barra longitudinal de esquina, lo mismo que cada barra interior de por medio, tengan un soporte lateral suministrado por la esquina de un fleje, con un ángulo de no más de 135°; además ninguna barra debe estar ubicada a más de 6 pulg de distancia libre a cada lado, de una de estas barras soportadas lateralmente. En vez de flejes pueden utilizarse alambrones corrugados o mallas electrosoldadas de alambrón de área equivalente. Cuando se coloquen barras alrededor de la periferia de un círculo, pueden utilizarse flejes circulares completos.

Las espirales deben constar de una barra o alambrón continuo no menor que $\frac{3}{8}$ pulg de diámetro y el espacio libre entre cada vuelta de la espiral no debe exceder 3 pulg ni ser menor que 1 pulg.

Asimismo, se impone una cuantía mínima de acero para la espiral, de manera que el comportamiento estructural de la columna se mejora en forma significativa con respecto tanto a la carga última como al tipo de falla, en comparación con una columna idéntica pero con flejes.

El efecto estructural de una espiral se puede visualizar fácilmente si se tiene en cuenta un modelo conformado por un tambor de acero lleno de arena (ver la figura 8.3). Cuando se coloca una carga sobre la arena, se ejerce una presión lateral de la arena sobre el tambor que ocasiona tensión circular en la pared de acero. La carga sobre la arena puede incrementarse hasta que la tensión circular sea suficientemente grande para hacer estallar el tambor. La sola pila de arena, si no estuviera confinada dentro del tambor, no sería capaz de resistir una carga considerable. Ahora, una columna de concreto cilíndrica sí tiene resistencia aun sin confinamiento lateral. A medida que se aplica la carga, la columna se acorta longitudinalmente y se expande en sentido lateral, dependiendo de la relación de Poisson. Una espiral poco espaciada que confine la columna, contrarresta esta expansión cumpliendo la misma función que la del tambor de acero del modelo anterior. Esto produce una tensión circular en la espiral y aumenta al mismo tiempo de modo considerable la capacidad de carga del concreto confinado en el núcleo. La falla se presenta sólo cuando el acero de la espiral fluye, lo cual disminuye sustancialmente el efecto de confinamiento, o cuando el acero llega hasta la rotura.

Una columna confinada con flejes falla para la carga determinada por la ecuación (8.3*a* o 8.3*b*). Para esta carga, el concreto falla por aplastamiento y por corte hacia afuera a lo largo de planos inclina-

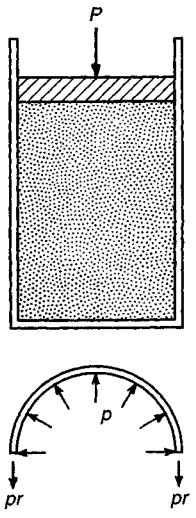


FIGURA 8.3
Modelo de acción de una espiral.

dos, mientras que el acero longitudinal lo hace por pandeo hacia afuera entre flejes (ver la figura 8.4). Para una columna reforzada en espiral, cuando se alcanza la misma carga, el acero longitudinal y el concreto dentro del núcleo no pueden fallar hacia afuera a causa de la presencia confinante de la espiral. Sin embargo, puesto que el concreto en el cascarón exterior no está confinado, sí presenta falla; es decir, el cascarón exterior se desprende cuando se alcanza la carga P_n. Para este estado de carga es que la acción confinante de la espiral tiene un efecto significativo y si se proporciona cantidad suficiente de acero en espiral, la carga que producirá la falla última de la columna mediante fluencia o fractura del acero en espiral puede ser mucho mayor que la carga para la cual se presentó la falla del cascarón. Además, el límite de deformación axial, cuando la columna falle, va a ser mucho mayor que antes; la tenacidad de la columna ha sido incrementada significativamente.

En contraste con la práctica en otros países, en los Estados Unidos se piensa que cualquier capacidad en exceso más allá de la carga para la cual se presenta el descascaramiento de la columna se desperdicia, puesto que aunque el elemento no falla en realidad, no se puede seguir considerando como funcional. Por esta razón, el Código ACI provee un refuerzo mínimo en espiral, en tal cantidad, que su contribución a la capacidad de carga es apenas ligeramente mayor que aquélla del cascarón de concreto. Esta situación se comprende mejor si se observa la figura 8.5, donde se compara el comportamiento de una columna con flejes con el de otra con refuerzo en espiral cuya carga de descascaramiento es igual a la carga última de la columna con flejes. La falla de la columna con flejes es abrupta y total. Esto es cierto, casi hasta el mismo grado, para una columna reforzada con una espiral tan liviana que su contribución a la resistencia es considerablemente menor que la resistencia que se pierde por el cascarón que falla. Lo contrario es cierto para una espiral pesada y la columna descascarada presentará falla frente a una carga mayor, con una deformación

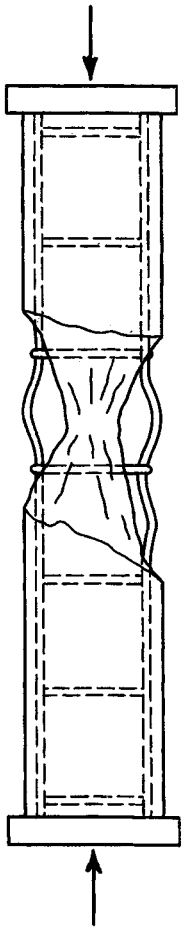


FIGURA 8.4
Falla de una columna con flejes.

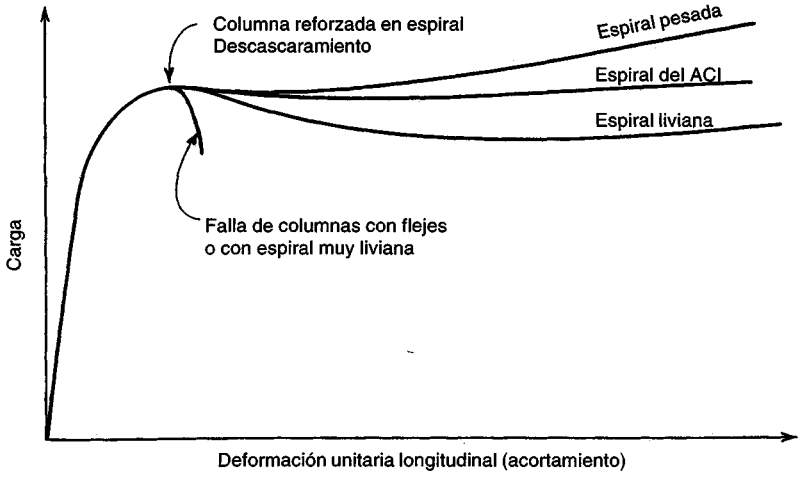


FIGURA 8.5
Comportamiento de columnas reforzadas en espiral y de columnas con flejes.

previa considerable. El refuerzo en "espiral del ACI", cuya contribución a la resistencia compensa de modo aproximado la pérdida del cascarón desprendido, aumenta muy poco la carga última; sin embargo, al evitar el aplastamiento instantáneo del concreto y el pandeo del acero, hace que la falla sea más gradual y dúctil, es decir, aumenta la tenacidad de la columna.

Experimentalmente se ha encontrado (ver las referencias 8.3 a 8.5) que el aumento en la resistencia a la compresión del núcleo de concreto en una columna, que se suministra mediante el efecto de confinamiento del acero en espiral, puede representarse muy bien mediante la ecuación

$$f_c^* - 0.85f'_c = 4.0f'_2 \qquad (a)$$

donde f_c^* = resistencia a la compresión del núcleo de concreto confinado en espiral
$0.85f'_c$ = resistencia a la compresión del concreto si no está confinado
f'_2 = esfuerzo de confinamiento transversal en el núcleo de concreto producido por la espiral

El esfuerzo de confinamiento f'_2 se calcula suponiendo que la espiral de acero llega a su esfuerzo de fluencia f_y cuando se alcanza eventualmente la falla de la columna. Con referencia a la figura 8.6, un análisis de la tensión circular del modelo idealizado de un segmento corto de columna confinada por un solo anillo de acero transversal, demuestra que

$$f'_2 = \frac{2A_{sp}f_y}{d_c s} \qquad (b)$$

donde A_{sp} = área de la sección transversal del alambre en espiral
f_y = resistencia a la fluencia del acero en espiral
d_c = diámetro exterior de la espiral
s = espaciamiento o paso del alambre en espiral

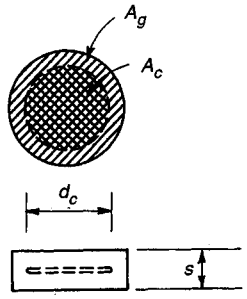


FIGURA 8.6
Confinamiento del núcleo de concreto a causa de la tensión circular.

La cuantía volumétrica se define como la relación entre el volumen del acero en espiral y el volumen del núcleo de concreto:

$$\rho_s = \frac{2\pi d_c A_{sp}}{2} \frac{4}{\pi d_c^2 s}$$

a partir de la cual

$$A_{sp} = \frac{\rho_s d_c s}{4} \tag{c}$$

Si se sustituye el valor de A_{sp} de la ecuación (*c*) en la ecuación (*b*), se obtiene

$$f_2' = \frac{\rho_s f_y}{2} \tag{d}$$

Para encontrar la cantidad adecuada de acero en espiral se calcula

$$\text{Contribución del cascarón a la resistencia} = 0.85 f_c'(A_g - A_c) \tag{e}$$

donde A_g y A_c son el área bruta y el área del núcleo del concreto, respectivamente. Luego, se sustituye el esfuerzo de confinamiento de la ecuación (*d*) en la ecuación (*a*) y se multiplica por el área del núcleo de concreto,

$$\text{Resistencia proporcionada por la espiral} = 2\rho_s f_y A_c \tag{f}$$

La base para el diseño de la espiral consiste en que la ganancia en la resistencia provista por la espiral, debe ser al menos igual a la pérdida de resistencia cuando se descascara el recubrimiento de concreto, de manera que al combinar las ecuaciones (*e*) y (*f*):

$$0.85 f_c'(A_g - A_c) = 2\rho_s f_y A_c$$

a partir de la cual

$$\rho_s = 0.425\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right)\frac{f_c'}{f_y} \tag{g}$$

Conforme al Código ACI, este resultado se redondea un poco hacia arriba y el Código ACI 10.9.3 establece que la cuantía de refuerzo en espiral no debe ser menor que

$$\rho_s = 0.45\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right)\frac{f_c'}{f_y} \tag{8.5}$$

Además, el Código ACI estipula que f_y no debe tomarse mayor que 60,000 lb/pulg^2.

De esta explicación se deduce que dos columnas cargadas concéntricamente y diseñadas con los requisitos del Código ACI, una con flejes y otra con refuerzo en espiral pero idénticas en los demás aspectos, fallarán aproximadamente a la misma carga, la primera de manera súbita y frágil, la segunda de manera gradual con pérdida previa del cascarón y con un comportamiento más dúctil. Esta ventaja de la columna con refuerzo en espiral es mucho menos evidente si la carga se aplica con una excentricidad considerable o cuando se presentan efectos de flexión por otras fuentes en forma simultánea con la carga axial. Por esta razón, aunque el Código ACI permite cargas de diseño un poco mayores para las columnas con refuerzo en espiral que para las columnas con flejes cuando los momentos son pequeños o nulos ($\phi = 0.75$ para columnas reforzadas en espiral *vs.* $\phi = 0.70$ para columnas con flejes), la diferencia no es muy grande y se ve aún más reducida para excentricidades considerables en las cuales ϕ se aproxima a 0.90 para los dos tipos de columnas.

El diseño del refuerzo en espiral, según las disposiciones del Código ACI, se puede reducir fácilmente a una forma tabular como aparece en la tabla A.14 del apéndice A.

8.3 COMPRESIÓN MÁS FLEXIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES

En edificios y otras estructuras resulta muy raro encontrar elementos cargados axialmente, es decir, concéntricamente a compresión. Algunos componentes, como las columnas y los arcos, sostienen ante todo cargas a compresión pero casi siempre está presente una flexión simultánea. Los momentos flectores se producen por continuidad, es decir, por el hecho de que las columnas son partes de pórticos monolíticos en los cuales los momentos en los apoyos de las vigas son resistidos en parte por las columnas de soporte, también bajo condiciones de cargas horizontales como fuerzas de viento, y frente a cargas aplicadas en forma excéntrica en ménsulas de columnas o en arcos donde el eje del arco no coincide con la línea de presión. Aún cuando los cálculos de diseño demuestren que un elemento está cargado axialmente, las imperfecciones inevitables de la construcción causarán excentricidades y la consecuente flexión en el elemento construido. Por esta razón, los elementos que deben diseñarse para compresión y flexión simultáneas son muy frecuentes en casi todos los tipos de estructuras de concreto.

Cuando un elemento está sometido a una compresión axial P combinada con un momento flector M, como en la figura 8.7*a*, por lo general es conveniente remplazar la carga axial y el momento flector por una carga equivalente de igual magnitud P aplicada con una excentricidad $e = M/P$, como en la figura 8.7*b*. Las dos situaciones de carga son estáticamente equivalentes. Todas las columnas pueden entonces clasificarse en términos de la excentricidad equivalente. Aquéllas con un valor de e relativamente pequeño se caracterizan en general por una compresión a lo largo de toda la sección de concreto y, si se sobrecargan, fallarán por aplastamiento del concreto junto con una fluencia del acero a compresión en el lado más cargado. Las columnas con excentricidades grandes se someten a tensión sobre, al menos, una parte de la sección y, cuando se sobrecargan, pueden fallar por fluencia del acero a tensión en el lado más alejado de la carga.

Para las columnas, los estados de carga previos al estado último por lo general no son de importancia. El agrietamiento del concreto, aun para columnas con excentricidades grandes, no es en general un problema serio y las deflexiones laterales para cargas de servicio rara vez son un factor digno de tener en cuenta. El diseño de columnas se basa, entonces, en el estado de sobrecargas mayoradas, para el cual la resistencia requerida no debe exceder, como de costumbre, la resistencia de diseño, es decir,

$$\phi M_n \geq M_u \tag{8.6a}$$

$$\phi P_n \geq P_u \tag{8.6b}$$

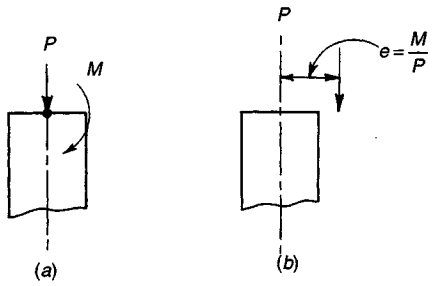


FIGURA 8.7
Excentricidad equivalente para la carga de una columna.

8.4 ANÁLISIS DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES Y DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN

La figura 8.8*a* presenta un elemento cargado en dirección paralela a la de su eje mediante una fuerza de compresión P_n y con una excentricidad e medida desde la línea central. La distribución de deformaciones unitarias en una sección *a-a* cualquiera y para un estado de falla inminente, se ilustra en la figura 8.8*b*. Si se supone que las secciones planas permanecen planas, las deformaciones unitarias en el concreto varían linealmente con la distancia desde el eje neutro, que se localiza a una distancia c desde el lado más cargado del elemento. Con compatibilidad total en las deformaciones, las del acero en cualquier sitio de la sección son las mismas que las deformaciones del concreto adyacente; así que, si la deformación última del concreto es ϵ_u, la de las barras más cercanas a la carga es ϵ'_s, mientras que la de las barras a tensión, en el lado más alejado, es ϵ_s. El acero a compresión con un área A'_s y el acero a tensión con un área A_s se localizan respectivamente a distancias d' y d medidas desde la cara en compresión.

Los esfuerzos y fuerzas correspondientes son los de la figura 8.8*c*. Al igual que para flexión simple, la distribución real de esfuerzos a compresión en el concreto se remplaza por una distribución rectangular equivalente con un espesor $a = \beta_1 c$. Gran cantidad de ensayos sobre columnas de varias formas demuestran que las resistencias últimas calculadas con base en lo anterior coinciden satisfactoriamente con los resultados de ensayos experimentales (ver la referencia 8.6).

El equilibrio entre fuerzas axiales internas y externas que se presenta en la figura 8.8*c*, exige que

$$P_n = 0.85 f'_c ab + A'_s f'_s - A_s f_s \tag{8.7}$$

También, el momento de los esfuerzos y fuerzas internas con respecto a la línea central de la sección debe ser igual y opuesto al momento de la fuerza externa P_n, de manera que

$$M_n = P_n e = 0.85 f'_c ab\left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2}\right) + A'_s f'_s \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2}\right) \tag{8.8}$$

Éstas son las dos ecuaciones básicas de equilibrio para elementos rectangulares sometidos a compresión excéntrica.

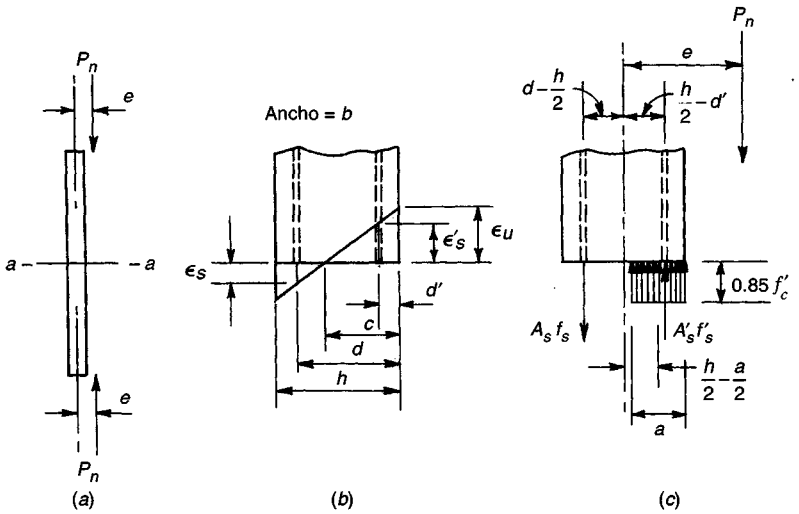


FIGURA 8.8
Columna sometida a compresión excéntrica: (*a*) columna cargada; (*b*) distribución de deformaciones en la sección *a-a*; (*c*) esfuerzos y fuerzas para la resistencia última nominal.

En las anteriores ecuaciones no se ha tenido en cuenta el hecho de que la presencia del refuerzo a compresión, A'_s, desplaza una cantidad correspondiente de concreto de área A'_s. En caso necesario, particularmente para grandes cuantías de acero, esto puede tenerse en cuenta en forma muy simple. En estas ecuaciones se incluye una fuerza de compresión en el concreto no existente, igual a $A'_s\,(0.85f'_c)$, que actúa en el concreto desplazado al nivel del acero a compresión. Esta fuerza en exceso puede eliminarse en las dos ecuaciones multiplicando A'_s por $f'_s - 0.85f'_c$ en vez de hacerlo por f'_s.

Para grandes excentricidades, la falla se inicia por la fluencia del acero a tensión A_s. De ahí que, para este caso, $f_s = f_y$. Cuando el concreto alcanza su deformación unitaria última ϵ_u, es posible que el acero a compresión fluya o no; esto debe determinarse con base en la compatibilidad de deformaciones. Para excentricidades pequeñas, el concreto alcanzará su deformación límite ϵ_u antes de que el acero a tensión empiece a fluir; de hecho, las barras en el lado de la columna más alejado de la carga pueden estar en compresión y no en tensión. Para excentricidades pequeñas, el análisis debe basarse también en la compatibilidad de las deformaciones entre el acero y el concreto adyacente.

Para una excentricidad determinada a partir del análisis del pórtico (es decir, $e = M_u/P_u$), es posible resolver las ecuaciones (8.7) y (8.8) para la carga P_n y para el momento M_n que producirán la falla, de la siguiente manera: en ambas ecuaciones, f'_s, f_s y a pueden expresarse en términos de una sola incógnita c, o sea la distancia hasta el eje neutro. Esto se hace con base en la geometría del diagrama de deformaciones, tomando ϵ_u igual a 0.003 como es usual y utilizando la curva esfuerzo-deformación del refuerzo. El resultado es que las dos ecuaciones contienen únicamente dos incógnitas, P_n y c, y pueden resolverse para estos valores de manera simultánea. Sin embargo, hacer esto en la práctica en forma algebraica resultaría demasiado complicado, en particular por la necesidad de incorporar el límite de f_y tanto en f'_s como en f_s.

Una mejor aproximación, si se tienen en cuenta las bases para el diseño práctico, consiste en construir un *diagrama de interacción de resistencia* que defina la carga y el momento de falla para determinada columna en el intervalo completo de excentricidades desde cero hasta el infinito. Para cualquier excentricidad, existe un solo par de valores de P_n y M_n que producirán un estado inminente de falla. Este par de valores puede dibujarse como un punto en un gráfico que relacione P_n y M_n, como en la figura 8.9. Una serie de cálculos similares, cada uno correspondiente a una excentricidad diferente, generará una curva que tiene la forma típica que aparece en la figura 8.9. En este diagrama, cualquier línea radial representa una excentricidad particular $e = M/P$. Para esta excentricidad, al aumentar gradualmente la carga se definirá una trayectoria de carga como se ilustra, y cuando esta trayectoria de carga alcance la curva límite se presentará la falla. Observe que el eje vertical corresponde a $e = 0$, y P_0 es la capacidad de la columna para carga concéntrica que puede determinarse con la ecuación (8.3*b*). El eje horizontal corresponde a un valor infinito de e, es decir, flexión pura con una capacidad a momento de M_0. Las excentricidades pequeñas producirán falla regida por compresión del concreto, mientras que las grandes llevarán a una falla iniciada por la fluencia del acero a tensión.

Para una columna seleccionada en forma tentativa, el diagrama de interacción puede construirse más fácilmente si se escogen valores sucesivos de la distancia al eje neutro c, desde el infinito (carga axial con excentricidad 0) hasta un valor muy pequeño encontrado por tanteos para obtener $P_n = 0$ (flexión pura). Para cada valor seleccionado de c, las deformaciones y los esfuerzos en el acero y las fuerzas en el concreto pueden calcularse fácilmente como se explica a continuación. Para el acero a tensión,

$$\epsilon_s = \epsilon_u \frac{d - c}{c} \tag{8.9}$$

$$f_s = \epsilon_u E_s \frac{d - c}{c} \quad \text{y} \quad \leq f_y \tag{8.10}$$

mientras que, para el acero a compresión,

$$\epsilon_s' = \epsilon_u \frac{c - d'}{c} \tag{8.11}$$

$$f_s' = \epsilon_u E_s \frac{c - d'}{c} \text{ y } \leq f_y \tag{8.12}$$

El bloque de esfuerzos del concreto tiene un espesor

$$a = \beta_1 c \text{ y } \leq h \tag{8.13}$$

y, en consecuencia, la resultante a compresión del concreto es

$$C = 0.85 f_c' ab \tag{8.14}$$

La fuerza axial P_n y el momento M_n, correspondientes a la localización seleccionada del eje neutro, pueden calcularse a partir de las ecuaciones (8.7) y (8.8), respectivamente, y, de esta manera, se establece un solo punto en el diagrama de interacción de resistencia. Estos cálculos se repiten para valores sucesivos de la distancia al eje neutro con el fin de establecer la curva que define los límites en la resistencia, como en la figura 8.9. Los cálculos, de naturaleza repetitiva, se pueden programar fácilmente en computador.

8.5 FALLA BALANCEADA

Como se indicó anteriormente, la línea de falla del diagrama de interacción se divide en un intervalo de falla a compresión y en un intervalo de falla a tensión. En este momento es útil definir el *modo de falla balanceada* y su excentricidad correspondiente e_b, con la carga P_b y el momento M_b que actúan en combinación para producir una falla, en la cual el concreto alcanza su deformación límite ϵ_u en el mismo instante en que el acero a tensión, en el lado alejado de la columna, logra su deformación de fluencia. Este punto en el diagrama de interacción es el divisorio entre la falla a compresión (excentricidades pequeñas) y la falla a tensión (excentricidades grandes).

Los valores de P_b y M_b pueden calcularse con referencia a la figura 8.8. Para la falla balanceada,

$$c = c_b = d \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} \tag{8.15}$$

y

$$a = a_b = \beta_1 c_b \tag{8.16}$$

Las ecuaciones (8.9) hasta la (8.14) pueden utilizarse entonces para obtener el esfuerzo en el acero y la resultante a compresión, después de lo cual se encuentran los valores de P_b y M_b a partir de las ecuaciones (8.7) y (8.8).

Puede observarse que, en contraste con el diseño de vigas, no es posible limitar el diseño de columnas para que el resultado de una sobrecarga sea siempre una falla por fluencia del acero en vez de una falla por aplastamiento del concreto. El tipo de falla de una columna depende del valor de la excentricidad e, que se define a su vez por el análisis de cargas del edificio o de cualquier otra estructura. Sin embargo, el punto de falla balanceada en el diagrama de interacción es una referencia muy útil en relación con las disposiciones de seguridad, como se analiza más adelante en la sección 8.9.

Es importante observar en la figura 8.9 que, para la región de falla a compresión, en cuanto mayor sea la carga axial P_n, menor será el momento M_n que la sección es capaz de resistir antes de la falla. Sin embargo, en la región de falla a tensión es válido lo contrario: cuanto mayor sea la carga axial, mayor será la capacidad simultánea a momento. Esto puede interpretarse fácilmente. En la región de falla a compresión, la falla ocurre por una sobredeformación del concreto; a mayor deformación a compresión del concreto causada por la sola carga axial, menor margen de

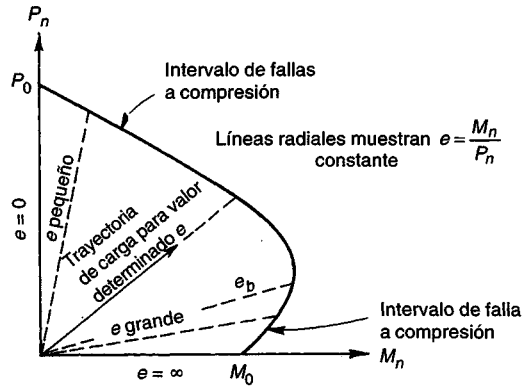


FIGURA 8.9
Diagrama de interacción para la resistencia nominal de una columna sometida a flexión y carga axial combinadas.

deformación adicional disponible para la compresión adicional ocasionada por la flexión. Por otro lado, en la región de falla a tensión, la fluencia del acero inicia la falla. Si el elemento se carga a flexión simple hasta el punto en el cual se inicia la fluencia del acero a tensión, y si se adiciona una carga axial en ese momento, los esfuerzos de compresión en el acero producidos por esta carga se superpondrán a los esfuerzos previstos de tensión. Esto reduce el esfuerzo total en el acero hasta un valor menor que su resistencia a la fluencia. En consecuencia, se puede resistir ahora un momento adicional con tal magnitud que la combinación de los esfuerzos en el acero generados por la carga axial y por el momento aumentado, alcance de nuevo la resistencia a la fluencia.

La forma característica del diagrama de interacción de una columna como la de la figura 8.9, tiene importantes implicaciones en el diseño. En la región de falla a tensión, una *reducción de las cargas axiales* puede producir la falla para determinado momento. Cuando se realice el estudio de un pórtico, el diseñador debe analizar todas las posibles combinaciones de carga, que incluye la que produzca la mínima carga axial simultánea con determinado momento. Para calcular la capacidad de una columna sometida a un momento, se debe utilizar únicamente la compresión que estará presente con certeza.

Ejemplo 8.1. Diagrama de interacción de resistencia de una columna. Una columna de 12 × 20 pulg está reforzada con cuatro barras No. 9, con un área de 1.0 pulg^2 cada una, una en cada esquina, como en la figura 8.10*a*. La resistencia del concreto determinada mediante cilindros es f'_c = 3500 lb/pulg^2 y la resistencia a la fluencia del acero es 50 klb/pulg^2. Determine (*a*) la carga P_b, el momento M_b y la excentricidad correspondiente e_b para la falla balanceada; (*b*) la carga y el momento para un punto representativo en la zona de falla a tensión de la curva de interacción; (*c*) la carga y el momento para un punto representativo en la zona de falla a compresión; (*d*) la resistencia a carga axial para excentricidad nula. Luego, (*e*) dibuje el diagrama de interacción de resistencia para esta columna; (*f*) dibuje el refuerzo transversal con base en las disposiciones del Código ACI.

Solución

(*a*) El eje neutro para la condición de falla balanceada puede encontrarse a partir de la ecuación (8.15) con ϵ_u = 0.003 y ϵ_y = 50/29,000 = 0.0017:

$$c_b = 17.5 \times \frac{0.003}{0.0047} = 11.1 \text{ pulg}$$

obteniéndose una altura del bloque de esfuerzos a = 0.85 × 11.1 = 9.44 pulg. Para la condición de falla balanceada, por definición, $f_s = f_y$. El esfuerzo en el acero a compresión se encuentra con la ecuación (8.12):

$$f'_s = 0.003 \times 29{,}000 \frac{11.1 - 2.5}{11.1} = 67.4 \text{ klb/pulg}^2 \text{ pero} \leq 50 \text{ klb/pulg}^2$$

confirmando que el acero a compresión está también en la fluencia. La fuerza resultante a compresión en el concreto es

$$C = 0.85 \times 3.5 \times 9.44 \times 12 = 337 \text{ klb}$$

La carga balanceada P_b puede encontrarse ahora a partir de la ecuación (8.7) y es igual a

$$P_b = 337 + 2.0 \times 50 - 2.0 \times 50 = 337 \text{ klb}$$

y el momento balanceado se encuentra con la ecuación (8.8) y es igual a

$$\begin{aligned} M_b &= 337(10 - 4.72) + 2.0 \times 50(10 - 2.5) + 2.0 \times 50(17.5 - 10) \\ &= 3280 \text{ klb-pulg} = 273 \text{ klb-pie} \end{aligned}$$

La excentricidad correspondiente de la carga es $e_b = 9.72$ pulg.

(*b*) Cualquier selección de *c menor que* $c_b = 11.1$ pulg genera un punto en la zona de falla a tensión de la curva de interacción, con una excentricidad mayor que e_b. Por ejemplo, seleccione $c = 5.0$ pulg. Por definición, $f_s = f_y$. El esfuerzo en el acero a compresión es igual a

$$f_s' = 0.003 \times 29{,}000\frac{5.0 - 2.5}{5.0} = 43.5 \text{ klb/pulg}^2$$

Con una altura del bloque de esfuerzos $a = 0.85 \times 5.0 = 4.25$, la resultante a compresión es $C = 0.85 \times 3.5 \times 4.25 \times 12 = 152$ klb. Entonces, a partir de la ecuación (8.7), la carga axial es

$$P_n = 152 + 2.0 \times 43.5 - 2.0 \times 50 = 139 \text{ klb}$$

y la capacidad a momento, con la ecuación (8.8), es

$$\begin{aligned} M_n &= 152(10 - 2.12) + 2.0 \times 43.5(10 - 2.5) + 2.0 \times 50(17.5 - 10) \\ &= 2598 \text{ klb-pulg} = 217 \text{ klb-pie} \end{aligned}$$

obteniéndose una excentricidad $e = 2598/139 = 18.69$ pulg, muy superior al valor balanceado.

(*c*) Ahora, seleccionando un valor de *c mayor que* c_b para demostrar un punto de falla a compresión en la curva de interacción, se toma un valor de $c = 18.0$ pulg, para el cual $a = 0.85 \times 18.0 = 15.3$ pulg. La resultante a compresión del concreto es $C = 0.85 \times 3.5 \times 15.3 \times 12 = 546$ klb. A partir de la ecuación (8.10), el esfuerzo del acero en el lado izquierdo de la columna es

$$f_s = 0.003 \times 29{,}000\frac{17.5 - 18.0}{18.0} = -2 \text{ klb/pulg}^2$$

Observe que el valor negativo de f_s indica en forma correcta que A_s está en compresión si c es mayor que d, como en este caso. El esfuerzo del acero a compresión se encuentra con la ecuación (8.12) y es igual a

$$f_s' = 0.003 \times 29{,}000\frac{18.0 - 2.5}{18.0} = 75 \text{ klb/pulg}^2 \text{ pero } \leq 50 \text{ klb/pulg}^2$$

Entonces, la capacidad de la columna es

$$P_n = 546 + 2.0 \times 50 + 2.0 \times 2 = 650 \text{ klb}$$

$$\begin{aligned} M_n &= 546(10 - 7.65) + 2.0 \times 50(10 - 2.5) - 2.0 \times 2(17.5 - 10) \\ &= 2000 \text{ klb-pulg} = 167 \text{ klb-pie} \end{aligned}$$

(*d*) La resistencia axial de la columna, si está cargada concéntricamente, corresponde a $c = \infty$ y $e = 0$. Para este caso,

$$P_n = 0.85 \times 3.5 \times 12 \times 20 \times 20 + 4.0 \times 50 = 914 \text{ klb}$$

Observe que tanto para éste como para los cálculos precedentes no se tiene en cuenta el concreto desplazado por el acero. Para efectos comparativos, si se hubiera realizado esta reducción en el último cálculo:

$$P_n = 0.85 \times 3.5(12 \times 20 - 4) + (4.0 \times 50) = 902 \text{ klb}$$

El error al no tener en cuenta esta deducción es apenas del uno por ciento para este caso; en general esta diferencia puede obviarse, excepto tal vez en columnas con cuantías de acero cercanas al tope máximo del 8 por ciento.

A partir de los cálculos que se acaban de presentar, además de otros similares y repetitivos que no se incluyen aquí, se construye la curva de interacción de resistencia de la figura 8.10*d*. Observe la forma característica descrita anteriormente, la localización del punto de falla balanceada, al igual que los puntos encontrados de "excentricidad pequeña" y "excentricidad grande" y la capacidad de carga axial.

(*e*) El diseño de los flejes transversales se lleva a cabo según las restricciones del Código ACI. Si se utilizan estribos de $\frac{3}{8}$ (diámetro mínimo permitido para barras longitudinales No. 9 con diámetro de $1\frac{1}{8}$ pulg) en una columna cuya menor dimensión es 12 pulg, el espaciamiento de los flejes no debe exceder:

$$48 \times \tfrac{3}{8} = 18 \text{ pulg}$$

$$16 \times \tfrac{9}{8} = 18 \text{ pulg}$$

$$b = 12 \text{ pulg}$$

La última de las restricciones controla en este caso y se utilizarán entonces flejes No. 3 con un espaciamiento de 12 pulg, detallados como aparecen en la figura 8.10*a*. Observe que el espaciamiento permitido (18 pulg), de acuerdo con el primero y segundo criterios, debe reducirse a causa de la dimensión de la columna de 12 pulg, indicando que podría obtenerse un ahorro en el acero de los flejes utilizando un diámetro menor; sin embargo, esto no cumpliría con la restricción del Código ACI relativa al diámetro mínimo de los flejes para este caso.

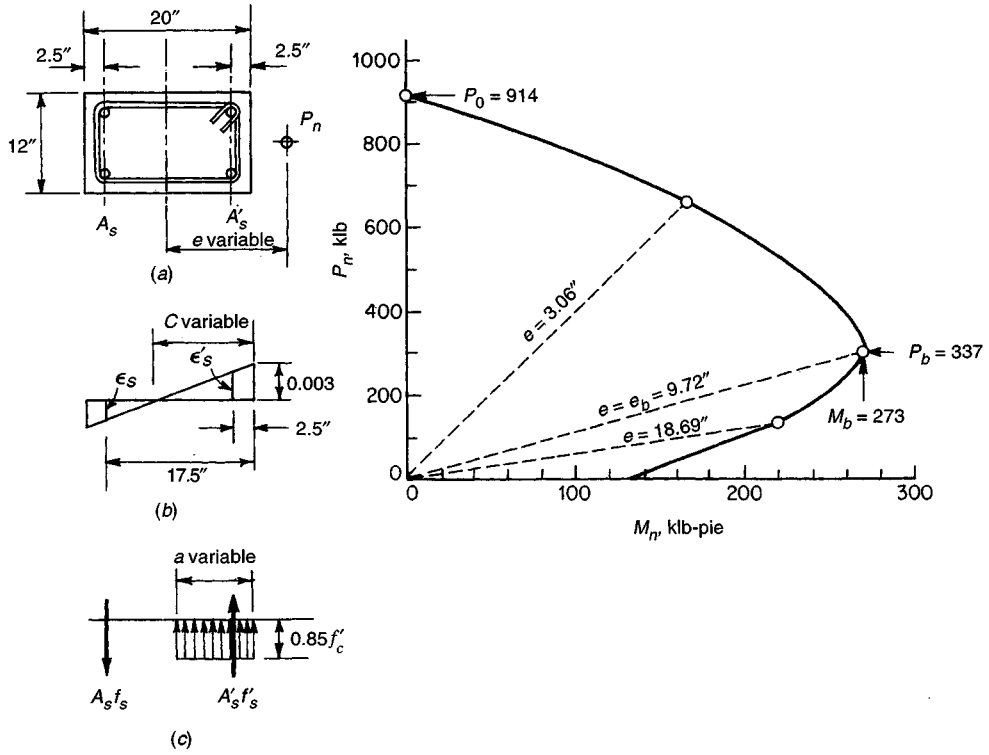


FIGURA 8.10
Diagrama de interacción para la columna del ejemplo 8.1: (*a*) sección transversal; (*b*) distribución de deformaciones; (*c*) esfuerzos y fuerzas; (*d*) diagrama de interacción de resistencias.

8.6 REFUERZO DISTRIBUIDO

Para columnas sometidas a grandes momentos flectores, es más económico concentrar todo, o la mayor parte del acero, a lo largo de las caras exteriores paralelas al eje de flexión. Esta distribución se expone en las figuras 8.2*e* hasta la 8.2*h*. De otra parte, para excentricidades pequeñas en las cuales la compresión axial prevalece y cuando se necesita una sección transversal pequeña, a menudo es ventajoso colocar el acero distribuido uniformemente alrededor del perímetro como aparece en las figuras 8.2*a* hasta la 8.2*d*. En este caso, debe prestarse especial atención a las barras intermedias, es decir, a aquellas que no están colocadas a lo largo de las dos caras sometidas a los mayores esfuerzos, esto debido a que cuando se alcanza la carga última, los esfuerzos para las barras intermedias son en general inferiores al valor de fluencia, aún cuando las barras a lo largo de una o de las dos caras externas pueden estar en fluencia. Esta situación puede examinarse como una simple y obvia extensión del análisis previo basado en la compatibilidad de deformaciones. Al igual que antes, puede construirse un diagrama de interacción de resistencia. La selección consecutiva de valores para la distancia al eje neutro resulta en un conjunto de pares de valores de P_n y M_n, cada uno correspondiente a una excentricidad particular en la carga.

Ejemplo 8.2. Análisis de una columna excéntrica con refuerzo distribuido. La columna de la figura 8.11*a* está reforzada con diez barras No.11 distribuidas alrededor del perímetro, como se muestra. La carga P_n se aplica con una excentricidad e con respecto al eje más fuerte. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 6000$ lb/pulg^2 y $f_y = 75$ klb/pulg^2. Encuentre la carga y el momento correspondientes al punto de falla con un eje neutro a $c = 18$ pulg desde la cara derecha.

Solución. Cuando el concreto alcanza su deformación unitaria límite de 0.003, la distribución de deformaciones unitarias es como la de la figura 8.11*b*. Las deformaciones para los cuatro grupos de barras

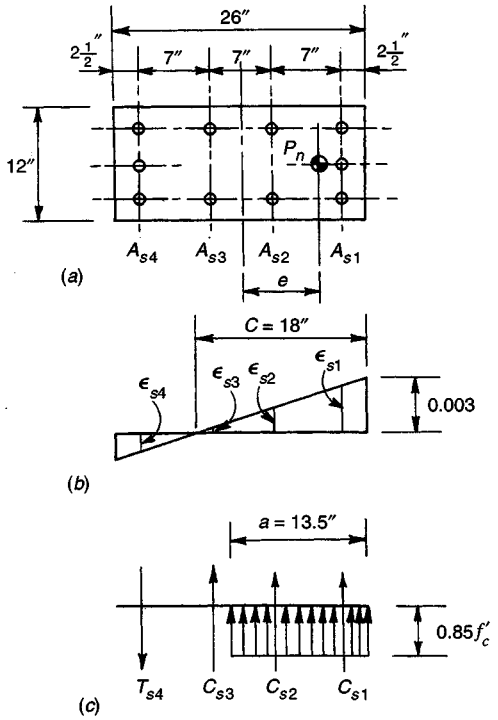


FIGURA 8.11
Columna del ejemplo 8.2: (*a*) sección transversal; (*b*) distribución de deformaciones; (*c*) esfuerzos y fuerzas.

se encuentran por semejanza de triángulos, después de lo cual los esfuerzos se encuentran con el producto de las deformaciones por E_s= 29,000 klb/pulg^2, teniendo en cuenta el valor límite igual a f_y:

$$\epsilon_{s1} = 0.00258 \qquad f_{s1} = 75.0 \text{ klb/pulg}^2 \text{ a compresión}$$
$$\epsilon_{s2} = 0.00142 \qquad f_{s2} = 41.2 \text{ klb/pulg}^2 \text{ a compresión}$$
$$\epsilon_{s3} = 0.00025 \qquad f_{s3} = 7.3 \text{ klb/pulg}^2 \text{ a compresión}$$
$$\epsilon_{s4} = 0.00091 \qquad f_{s4} = 26.4 \text{ klb/pulg}^2 \text{ a tensión}$$

Para f'_c = 6000 lb/pulg^2, $\beta_1 = 0.75$ y la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos es $a = 0.75 \times 18 = 13.5$ pulg. La resultante a compresión del concreto es $C = 0.85 \times 6.0 \times 13.5 \times 12 =$ 826 klb, y las fuerzas respectivas en el acero en la figura 8.11*c* son:

$$C_{s1} = 4.68 \times 75.0 = 351 \text{ klb}$$
$$C_{s2} = 3.12 \times 41.2 = 129 \text{ klb}$$
$$C_{s3} = 3.12 \times 7.3 = 23 \text{ klb}$$
$$T_{s4} = 4.68 \times 26.4 = 124 \text{ klb}$$

La carga axial y el momento que producirían la falla para el eje neutro a 18 pulg desde la cara derecha, se encuentran mediante las extensiones obvias de las ecuaciones (8.7) y (8.8):

$$P = 826 + 351 + 129 + 23 - 124 = 1205 \text{ klb}$$
$$M_n = 826(13 - 6.75) + 351(13 - 2.5) + 129(13 - 9.5) - 23(13 - 9.5) + 124(13 - 2.5)$$
$$= 10{,}520 \text{ klb-pulg}$$
$$= 877 \text{ klb-pie}$$

La excentricidad correspondiente es e = 10,520/1205 = 8.73 pulg. Otros puntos del diagrama de interacción pueden calcularse en forma similar.

A partir de este ejemplo se obtienen dos conclusiones generales:

1. Aun con una excentricidad relativamente pequeña, aproximadamente igual a un tercio de la altura de la sección, sólo las barras del grupo 1 alcanzan a llegar justo a su deformación de fluencia y, por tanto, a su esfuerzo de fluencia. Los demás grupos de barras, considerando el acero de alta resistencia relativa utilizado, están sometidos a esfuerzos muy por debajo de su resistencia a la fluencia, lo cual hubiera sido cierto también para el grupo 1 con una excentricidad ligeramente mayor. Se concluye que para columnas reforzadas en forma simétrica, la utilización de acero de alta resistencia, que es más costoso, resulta económica sólo para excentricidades muy pequeñas, es decir, para los pisos inferiores de edificios altos.
2. La contribución de las barras intermedias de los grupos 2 y 3 a los valores de P_n y M_n es muy pequeña como consecuencia de sus muy bajos esfuerzos. De nuevo, las barras intermedias, excepto que se necesiten para mantener los flejes en su sitio, son económicas únicamente para columnas con excentricidades muy pequeñas.

8.7 REFUERZO ASIMÉTRICO

La mayor parte de las columnas de concreto reforzado están reforzadas simétricamente con respecto al eje de flexión. Sin embargo, en algunos casos, como en las columnas de pórticos rígidos en los cuales los momentos son uniaxiales y la excentricidad es grande, es más económico utilizar un patrón asimétrico de barras con la mayor parte de éstas en el lado de tensión, como aparece en la figura 8.12. Estas columnas pueden analizarse mediante el mismo método descrito de compatibilidad de deformaciones. Sin embargo, para poder cargar concéntricamente una columna reforzada en forma asimétrica, la carga debe aplicarse en un punto conocido como el *centroide plástico*, el que se define como el punto de aplicación de la fuerza resultante de la sección transversal de la colum-

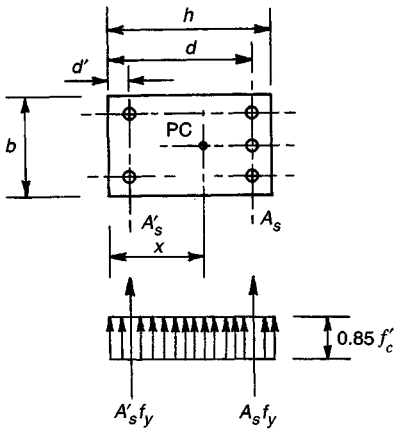


FIGURA 8.12
Centroide plástico de una columna reforzada asimétricamente.

na (que incluye las fuerzas en el concreto y en el acero) para el cual la columna se encuentra comprimida de manera uniforme hasta la deformación de falla $\epsilon_u = 0.003$ en toda la sección transversal. La excentricidad de la carga aplicada debe medirse con respecto al centroide plástico puesto que sólo entonces $e = 0$ corresponde a una carga axial pura sin momento. La localización del centroide plástico para la columna de la figura 8.12 se calcula con la resultante de las tres fuerzas internas que deben tenerse en cuenta. Su distancia desde la cara izquierda es

$$x = \frac{0.85f'_cbh^2/2 + A_sf_yd + A'_sf_yd'}{0.85f'_cbh + A_sf_y + A'_sf_y} \tag{8.17}$$

Naturalmente, para una sección transversal reforzada en forma simétrica, los centroides plástico y geométrico coinciden.

8.8 COLUMNAS CIRCULARES

En la sección 8.2 se mencionó que, cuando las excentricidades de la carga son pequeñas, las columnas reforzadas en espiral presentan mayor tenacidad, es decir, mayor ductilidad, que las columnas con flejes, aunque esta diferencia desaparece a medida que se incrementa la excentricidad. Por esta razón, como se analizó en la sección 8.2, el Código ACI permite un coeficiente de reducción más favorable de $\phi = 0.75$ para columnas reforzadas en espiral, en comparación con el valor de $\phi = 0.70$ para columnas con flejes. También la carga máxima de diseño que se estipula para elementos cargados axialmente o casi axialmente es mayor para aquéllos reforzados en espiral, que para los elementos comparables reforzados con flejes (ver la sección 8.9). Se concluye que las columnas reforzadas en espiral permiten una utilización más económica de los materiales, en particular para excentricidades pequeñas. Otras ventajas se refieren al hecho de que las espirales están disponibles en forma prefabricada, lo cual puede ahorrar mano de obra en la conformación de los armazones de acero para las columnas, ya que con frecuencia los arquitectos prefieren la forma circular.

La figura 8.13 muestra la sección transversal de una columna reforzada en espiral. Dependiendo del diámetro de la columna, se colocan de seis a diez o más barras de igual tamaño como refuerzo longitudinal. La distribución de deformaciones en el momento en el cual se alcanza la carga última se presenta en la figura 8.13*b*. Se puede observar que los grupos de barras 2 y 3 están sometidos a deformaciones mucho más pequeñas que los grupos 1 y 4. Los esfuerzos en los cuatro grupos de barras pueden determinarse fácilmente. Para cualquiera de las barras sometida a una

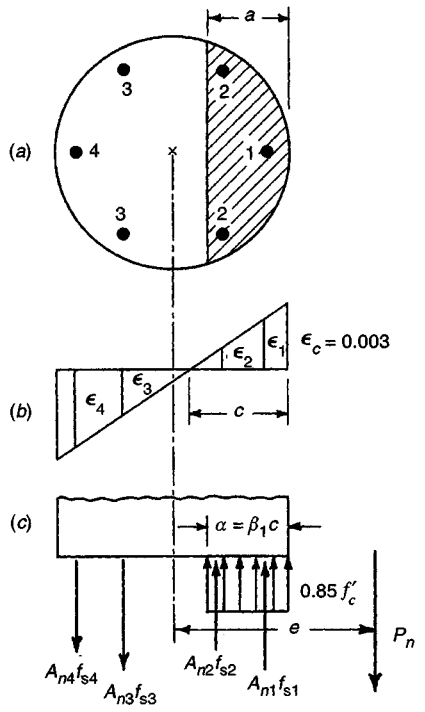


FIGURA 8.13
Columna circular sometida a compresión más flexión.

deformación superior a la de fluencia $\epsilon_y = f_s/E_s$, el esfuerzo en la falla evidentemente es el de fluencia de la barra. Para barras con deformaciones menores, el esfuerzo se determina a partir de $f_s = \epsilon_s E_s$.

Se tienen entonces las fuerzas internas que se ilustran en la figura 8.13*c*; éstas deben estar en equilibrio de fuerzas y de momentos con la resistencia nominal P_n. Es preciso observar que esta situación es análoga a la analizada en las secciones 8.4 a 8.6 para columnas rectangulares. Los cálculos pueden llevarse a cabo de manera idéntica a la expuesta en el ejemplo 8.1, excepto que para columnas circulares la zona a compresión de concreto sometida a la distribución rectangular equivalente de esfuerzos, tiene la forma del segmento de círculo sombreado en la figura 8.13*a*.

Aunque la configuración de la zona de compresión y la variación de las deformaciones en los diferentes grupos de barras hacen que los cálculos resulten dispendiosos y complicados, no se incluyen principios nuevos y es posible encontrar soluciones en computador.

El diseño o el análisis de columnas reforzadas en espiral se lleva a cabo, generalmente, mediante ayudas de diseño como las gráficas A.13 a A.16 del apéndice A. En la referencia 8.7 están disponibles tablas y gráficos ampliados y con mejores detalles. En el desarrollo de estas ayudas de diseño, el área total de acero se supone que está distribuida uniformemente en un anillo concéntrico, en vez de aparecer concentrada en la ubicación real de las barras; esto simplifica los cálculos sin que se afecten en forma apreciable los resultados.

Debe observarse que, con el fin de calificar para las disposiciones de seguridad más favorables de columnas reforzadas en espiral, la cuantía de acero de la espiral debe ser por lo menos igual a la determinada por la ecuación (8.5), según los argumentos analizados en la sección 8.2.

8.9 DISPOSICIONES DE SEGURIDAD DEL CÓDIGO ACI

Para columnas, al igual que para todos los demás elementos diseñados de acuerdo con el Código ACI, se establecen márgenes de seguridad apropiados mediante la aplicación de factores de so-

brecarga a las cargas de servicio y de coeficientes de reducción de resistencia a las resistencias últimas nominales. Así que, para columnas, $\phi P_n \geq P_u$ y $\phi M_n \geq M_u$ son los criterios básicos de seguridad. Para elementos sometidos a compresión axial o a compresión más flexión, el Código ACI establece coeficientes de reducción básicos:

$$\phi = 0.70 \text{ para columnas con flejes}$$

$$\phi = 0.75 \text{ para columnas reforzadas con espiral}$$

La diferencia entre estos dos valores refleja la seguridad adicional debida a la mayor tenacidad de las columnas reforzadas con espiral.

Existen varias razones que explican por qué los valores de ϕ para columnas son considerablemente inferiores con respecto a aquéllos para flexión o cortante (0.90 y 0.85, respectivamente). Una de ellas es que la resistencia de elementos a flexión subreforzados no se afecta en forma significativa por las variaciones de la resistencia del concreto, puesto que ésta depende esencialmente de la resistencia a la fluencia del acero, mientras que la resistencia de los elementos cargados en forma axial depende en gran medida de la resistencia a la compresión del concreto. Puesto que la resistencia del concreto determinada mediante el ensayo de cilindros en las condiciones de la obra está mucho menos controlada que la resistencia a la fluencia del acero producido en acerías, para el concreto debe permitirse una mayor deficiencia ocasional en la resistencia. Esto es particularmente evidente para columnas en las cuales el concreto, al ser vaciado desde la parte superior y al penetrar en la formaleta larga y en la angosta, tiene mayor tendencia a sufrir segregación que en las vigas vaciadas horizontalmente. Más aún, con frecuencia se ubican conductos eléctricos y otras instalaciones en las columnas de edificios, lo cual reduce su sección transversal efectiva, en algunos casos en magnitud desconocida para el diseñador, aunque se trata de una práctica deficiente y restringida por el Código ACI. Por último, las consecuencias de la falla de una columna, por ejemplo en un piso inferior, serán más catastróficas que la falla de una viga sencilla de un sistema de piso en el mismo edificio.

Además de los coeficientes básicos ϕ para columnas reforzadas con flejes o en espiral mencionados, el Código ACI incluye disposiciones especiales para los intervalos de excentricidades muy altas y muy bajas.

En el intervalo de falla a tensión con excentricidades desde e_b hasta el infinito (flexión pura), la tensión controla tanto más cuanto menor sea la fuerza axial. Finalmente, cuando la fuerza axial es cero, el elemento se convierte en una viga corriente sometida a flexión pura. El Código ACI establece que las vigas deben diseñarse de manera que estén subreforzadas; en este caso controla la tensión y $\phi = 0.90$. Se deduce entonces que debe haber una transición desde los valores de ϕ de 0.70 ó 0.75 para columnas, cuando controla la compresión, hasta valores de $\phi = 0.90$ para vigas sin carga axial, cuando controla la tensión. El Código ACI 9.3.2 establece entonces, que el valor de ϕ puede incrementarse de modo lineal hasta 0.90 a medida que ϕP_n disminuye desde $0.10 f'_c A_g$ o ϕP_b, el que sea menor, hasta cero. El valor de $0.10 f'_c A_g$ es una aproximación que evita el cálculo de ϕP_b que, por lo general, es un poco mayor.

En el otro extremo, para columnas con excentricidades calculadas muy pequeñas o nulas, el Código ACI reconoce que los desalineamientos accidentales en la construcción y otros factores no previsibles pueden producir excentricidades reales superiores a estos pequeños valores de diseño. También, la resistencia del concreto bajo cargas axiales altas y sostenidas puede ser un poco menor que la resistencia del cilindro a corto plazo. Por consiguiente, independientemente de la magnitud de la excentricidad calculada, el Código ACI 10.3.5 limita la máxima resistencia de diseño a 0.80 ϕP_0 para columnas con flejes (con $\phi = 0.70$) y a $0.85\phi P_0$ para columnas reforzadas con espiral (con $\phi = 0.75$). Aquí P_0 es la resistencia nominal de una columna cargada axialmente con excentricidad nula [ver la ecuación (8.4)].

Los efectos de las disposiciones de seguridad del Código ACI se presentan en la figura 8.14. La curva continua marcada con "resistencia nominal" es la misma de la figura 8.9 y representa la capacidad real de carga, tan precisa como es posible predecirla. La curva suave que aparece parcialmente punteada, luego continua y después punteada de nuevo, representa la resistencia de diseño básica obtenida mediante la reducción de las resistencias nominales P_n y M_n para cada excentricidad, por $\phi = 0.70$ para columnas con flejes y $\phi = 0.75$ para columnas reforzadas con espiral. El punto de corte horizontal en $\alpha\phi P_0$ representa la carga de diseño máxima estipulada por el Código ACI para pequeñas excentricidades, es decir, para cargas axiales grandes, como se analizó anteriormente. En el otro extremo, para excentricidades grandes, es decir, pequeñas cargas axiales, el Código ACI permite una transición lineal de ϕ desde 0.70 ó 0.75, aplicable a partir del menor valor entre ϕP_b o $0.10 f'_c A_s$, hasta 0.90 en $P = 0$. Esta transición se indica mediante la línea continua en el extremo inferior derecho de la curva de resistencias de diseño†.

8.10 AYUDAS DE DISEÑO

El diseño de columnas cargadas excéntricamente, de acuerdo con el método de análisis por compatibilidad de deformaciones ya descrito, requiere la selección de una columna de prueba. La columna de prueba se investiga entonces para determinar si es adecuada para resistir cualquier combinación de P_u y M_u, que pueda actuar sobre ella en caso de sobrecarga en la estructura, es decir, para observar si P_u y M_u resultantes del análisis de la estructura, caen dentro de la región limitada por la curva marcada como "resistencia de diseño del ACI", al dibujarlos en el diagrama de interacción de resistencias, como en la figura 8.14. Asimismo, un diseño económico exige que la combinación de P_u y M_u que controla esté muy cerca de la curva límite. Si no se cumplen estas condiciones, se debe seleccionar una nueva columna de prueba.

Aunque es posible desarrollar un programa de computador muy simple, basado en el análisis de compatibilidad de deformaciones, para calcular puntos en la curva de resistencia de diseño e incluso dibujar esta curva para cualquier columna de prueba, en la práctica se utilizan ayudas de diseño como las que están disponibles en manuales y volúmenes especiales publicados por el American Concrete Institute (ver la referencia 8.7) y por el Concrete Reinforcing Steel Institute (ver la referencia 8.8). Éstos comprenden los casos prácticos más frecuentes como columnas rectangulares o cuadradas reforzadas en forma simétrica y columnas circulares reforzadas con espiral. También están disponibles comercialmente una serie de programas de computador (por ejemplo PCACOL, Portland Cement Association, Skokie, Illinois, y HBCOLUMN, Concrete Reinforcing Steel Institute, Schaumburg, Illinois).

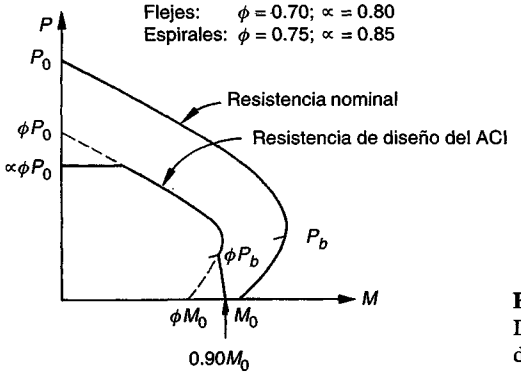


FIGURA 8.14
Disposiciones de seguridad del Código ACI superpuestas en el diagrama sobre la interacción de resistencia de una columna.

† Aunque la intención general de las disposiciones de seguridad del Código ACI relacionadas con columnas excéntricas es clara y fundamentalmente segura, el resultado final es un conjunto de diagramas de diseño para columnas con formas muy extrañas y que en apariencia no siguen ninguna ley física, como lo demuestran los gráficos A.5 a A.16 del apéndice A. Sería más simple y más racional utilizar disposiciones mejoradas de seguridad, que generen curvas de diseño más suaves y adecuadamente interrelacionadas con la curva de resistencia de las columnas.

Las gráficas. A.5 a A.16 del apéndice A son representativas de las gráficas de diseño de columnas encontradas en la referencia 8.7, en este caso para un concreto con $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y un acero con resistencia a la fluencia $f_y = 60$ klb/pulg^2 para diferentes espesores de recubrimiento; en la referencia 8.7 se incluyen estas gráficas para un intervalo amplio de resistencia de materiales. Las gráficas A.5 a A.8 son para columnas rectangulares con refuerzo distribuido alrededor del perímetro de la columna; las gráficas A.9 a A.12 son para columnas rectangulares con refuerzo a lo largo de dos caras opuestas. En las gráficas A.13 a A.16 se ilustran las columnas circulares con barras distribuidas en forma circular.

Las gráficas consisten en curvas de interacción de resistencia del tipo mostrado en la figura 8.14 y marcadas con "resistencia de diseño del ACI", es decir, que ya tienen incorporadas las disposiciones de seguridad del Código. Sin embargo, en lugar de dibujar ϕP_n *vs.* ϕM_n se utilizan parámetros correspondientes para hacer que las gráficas sean aplicables a casos más generales, esto es, la carga se dibuja como $\phi P_n/A_g$ mientras que el momento se expresa como $(\phi P_n/A_g)(e/h)$. Se dibujan varios grupos de curvas para diferentes valores de $\rho_g = A_{st}/A_g$; éstas se usan, en la mayor parte de los casos, en conjunto con un grupo de líneas radiales que representan diferentes relaciones de excentricidad e/h.

Gráficas como las mencionadas permiten el diseño directo de columnas cargadas excéntricamente para el intervalo corriente de resistencias y de variables geométricas. Éstas pueden utilizarse en cualquiera de las dos maneras que se explican a continuación. Para una carga mayorada P_u y una excentricidad equivalente $e = M_u/P_u$ dadas:

1. (*a*) Seleccionar unas dimensiones tentativas para la sección transversal b y h (referirse a la figura 8.8).
(*b*) Calcular la relación γ basada en los requisitos de recubrimiento hasta el centroide de las barras y seleccionar la gráfica correspondiente para el diseño de columnas.
(*c*) Calcular P_u/A_g y $M_u/A_g h$, donde $A_g = bh$.
(*d*) A partir de la gráfica y para los valores encontrados en (*c*), leer la cuantía de acero ρ_g que se requiere.
(*e*) Calcular el área total de acero $A_{st} = \rho_g bh$.

2. (*a*) Seleccionar la cuantía de acero ρ_g.
(*b*) Escoger un valor tentativo para h y calcular e/h y γ.
(*c*) De la gráfica correspondiente, leer P_u/A_g y calcular el área requerida A_g.
(*d*) Calcular $b = A_g/h$.
(*e*) Revisar el valor tentativo de h si se requiere obtener una sección bien proporcionada.
(*f*) Calcular el área total de acero $A_{st} = \rho_g bh$.

La utilización de las gráficas para diseño de columnas se ilustra en los ejemplos 8.3 y 8.4.

En las referencias 8.7 a 8.9 se encontrarán otras ayudas de diseño relacionadas con flejes transversales y espirales, al igual que recomendaciones para la práctica estándar.

Ejemplo 8.3. Selección del refuerzo para una columna con determinadas dimensiones. En una estructura de dos pisos debe diseñarse una columna exterior para una carga muerta de servicio de 142 klb, una carga viva máxima de 213 klb, un momento por cargas muertas de 83 klb-pie y un momento por cargas vivas de 124 klb-pie. La mínima carga viva compatible con el momento a causa de la carga viva total es 106 klb, obtenida para la condición en la cual no hay carga viva en la cubierta, pero la totalidad de la carga viva se aplica en el segundo piso. Las consideraciones arquitectónicas exigen que se utilice una columna rectangular con $b = 16$ pulg y $h = 20$ pulg.

(*a*) Encuentre el refuerzo exigido para la columna con la condición de que actúe la totalidad de la carga viva.
(*b*) Verifique si la columna es adecuada para la condición en la cual no se aplica la carga viva en la cubierta.

Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

Solución

(*a*) La columna se diseña inicialmente para la carga completa y luego se verifica si es apropiada cuando se retira parte de la carga viva. De acuerdo con las disposiciones de seguridad del Código ACI, la columna debe diseñarse para una carga mayorada $P_u = 1.4 \times 142 + 1.7 \times 213 = 561$ klb y un momento mayorado $M_u = 1.4 \times 83 + 1.7 \times 124 = 327$ klb-pie. En este caso se especifica una columna de 16 × 20 pulg con refuerzo distribuido alrededor de su perímetro. El recubrimiento de las barras se estima en 2.5 pulg desde la cara de la columna hasta el centroide del acero para cada barra. Los parámetros de la columna (si se supone flexión con respecto al eje más fuerte) son

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{561}{320} = 1.75 \text{ klb/pulg}^2$$

$$\frac{M_u}{A_g h} = \frac{327 \times 12}{320 \times 20} = 0.61 \text{ klb/pulg}^2$$

Con un recubrimiento de 2.5 pulg, el parámetro $\gamma = (20 - 5)/20 = 0.75$. Para esta geometría de columna y para las resistencias determinadas de los materiales se puede aplicar la gráfica A.7 del apéndice A. A partir de esta figura, con $\phi P_n/A_g = P_u/A_g = 1.75$ y $\phi M_n/A_g h = M_u/A_g h = 0.61$, se obtiene $\rho_g = 0.039$. Así que, el refuerzo necesario es $A_{st} = 0.039 \times 320 = 12.48$ pulg^2. Se utilizarán diez barras No. 10, cuatro en cada cara larga, más una barra intermedia en cada cara corta, que proveen un área total $A_{st} = 12.66$ pulg^2. La cuantía de acero está dentro del intervalo admisible de 0.01 a 0.08, según el Código ACI.

(*b*) Para la condición en la cual la carga viva de la cubierta está ausente, la columna sostendrá una carga mayorada $P_u = 1.4 \times 142 + 1.7 \times 106 = 379$ klb y un momento mayorado $M_u = 327$ klb-pie, como antes. Así que los parámetros de la columna para esta condición son

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{379}{320} = 1.18 \text{ klb/pulg}^2$$

$$\frac{M_u}{A_g h} = \frac{327 \times 12}{320 \times 20} = 0.61 \text{ klb/pulg}^2$$

y $\gamma = 0.75$, como antes. A partir de la gráfica A.7 se encuentra que una cuantía de acero $\rho_g = 0.032$ es suficiente para esta condición y es menor que la exigida en la parte (*a*), por lo cual no se requieren modificaciones.

Si se seleccionan tentativamente flejes No. 3, el espaciamiento máximo de éstos no debe exceder 48 × 0.375 = 18 pulg, 16 × 1.27 = 20.3 pulg o 16 pulg. El espaciamiento está controlado en este caso por la menor de las dimensiones de la columna y se utilizarán flejes No. 3 espaciados a 16 pulg, con la distribución expuesta en la figura 8.2*b*.

Ejemplo 8.4. Selección del tamaño de la columna para determinada cuantía de refuerzo. Debe diseñarse una columna para sostener una carga mayorada $P_u = 518$ klb y un momento mayorado $M_u = 530$ klb-pie. Se especifican materiales con resistencias $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 4000$ lb/pulg^2. Estudios de costos adelantados para la localización particular del edificio, indican que una cuantía de acero ρ_g aproximadamente de 0.03 es óptima. Determine las dimensiones requeridas b y h para la columna. La flexión ocurrirá con respecto al eje más fuerte y se utilizará una distribución del acero con barras concentradas en dos filas adyacentes a las caras exteriores de la columna y paralelas al eje de flexión.

Solución. En este caso resulta conveniente seleccionar una dimensión tentativa para la columna h, perpendicular al eje de flexión; si se escoge un valor de $h = 24$ pulg y se supone un recubrimiento de concreto de 3 pulg hasta los centros de las barras, resulta el parámetro $\gamma = 0.75$. En este caso se aplica la gráfica A.11 del apéndice A. Para las cargas determinadas, la excentricidad es $e = 530 \times 12/518 = 12.3$ pulg y $e/h = 12.3/24 = 0.51$. De la gráfica A.11, con $e/h = 0.51$ y $\rho_g = 0.03$, se obtiene $\phi P_n/A_g = P_u/A_g = 1.35$. En consecuencia, para la dimensión tentativa de $h = 24$ pulg, el ancho necesario para la columna es

$$b = \frac{P_u}{1.35h} = \frac{518}{1.35 \times 24} = 15.98 \text{ pulg}$$

Se utilizará una columna de 16 × 24 pulg, para la cual el área de acero requerida es $A_{st} = 0.03 \times 16 \times 24 = 11.52$ pulg^2. Se utilizarán ocho barras No. 11 que proporcionan un $A_{st} = 12.50$ pulg^2, distribuidas en dos filas de cuatro barras cada una, en forma similar al esquema de la gráfica A.11.

8.11 FLEXIÓN BIAXIAL

Los métodos analizados en las secciones anteriores permiten diseñar columnas rectangulares o cuadradas cuando la flexión está presente únicamente con respecto a uno de los ejes principales. Existen situaciones, de ninguna manera excepcionales, en las cuales la compresión axial está acompañada por flexión simultánea con respecto a los dos ejes principales de la sección. Éste es el caso, por ejemplo, de las columnas esquineras de edificios donde las vigas principales y las secundarias llegan hasta estas columnas en las direcciones de los dos muros y transfieren sus momentos extremos a la columna en dos planos perpendiculares. Situaciones similares de carga pueden ocurrir en columnas interiores, en particular si la planta de columnas es irregular.

La situación con respecto a la resistencia de columnas cargadas biaxialmente se ilustra en la figura 8.15. Sean X y Y las direcciones de los ejes principales de la sección transversal. En la figura 8.15*a*, la sección se somete a flexión sólo con respecto al eje Y, con una excentricidad de la carga e_x, medida en la dirección X. La curva correspondiente de interacción de resistencias aparece como Caso (*a*) en el esquema tridimensional de la figura 8.15*d* y se delinea en el plano definido por los ejes P_n y M_{ny}. Esta curva puede determinarse con los métodos corrientes para flexión uniaxial. De modo similar, la figura 8.15*d* muestra la flexión con respecto al eje X únicamente, con una excentricidad e_y medida en la dirección Y. La curva de interacción correspondiente es el Caso (*b*) en el plano de P_n y M_{nx} en la figura 8.15*d*. Para el Caso (*c*), que combina los ejes de flexión X y Y, la orientación de la excentricidad resultante se define mediante el ángulo λ:

$$\lambda = \arctan \frac{e_x}{e_y} = \arctan \frac{M_{ny}}{M_{nx}}$$

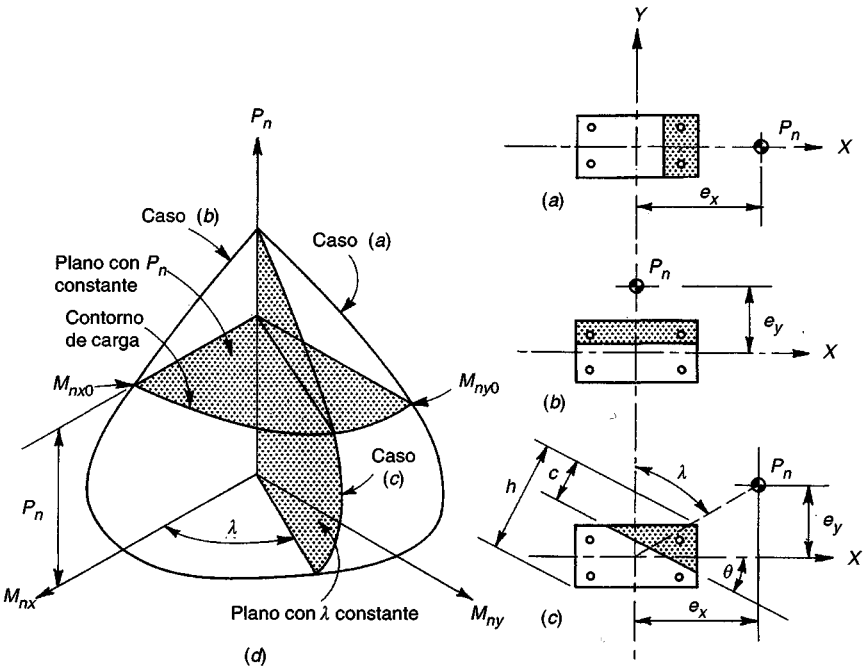


FIGURA 8.15
Diagrama de interacción para compresión y flexión biaxial: (*a*) flexión uniaxial con respecto al eje Y; (*b*) flexión uniaxial con respecto al eje X; (*c*) flexión biaxial con respecto a un eje diagonal; (*d*) superficie de interacción.

Para este caso, la flexión es con respecto a un eje definido mediante el ángulo θ con respecto al eje X. El ángulo λ de la figura 8.15*c* define un plano en la figura 8.15*d*, que pasa a través del eje vertical P_n conformando un ángulo λ con el eje de M_{nx}, como se indica. En este plano, la resistencia de la columna se define mediante la curva de interacción marcada como Caso (*c*). Para otros valores de λ se obtienen curvas similares para definir la *superficie de falla* para una situación de carga axial más flexión biaxial, como la de la figura 8.15*d*. La superficie es exactamente análoga a la *línea de falla* para carga axial más flexión uniaxial. Cualquier combinación de P_u, M_{ux} y M_{uy} que caiga dentro de la superficie puede aplicarse sobre la columna en forma segura, pero cualquier punto que esté por fuera de la superficie representaría la falla. Observe que la superficie de falla puede describirse bien sea mediante un conjunto de curvas definidas por planos radiales que pasan a través del eje de P_n, como lo señala el Caso (*c*), o por un conjunto de curvas definidas por intersecciones de planos horizontales, cada uno para una carga constante P_n definiendo así los contornos de carga.

La construcción de una superficie de interacción para determinada columna parecería ser una extensión obvia del análisis de flexión uniaxial. En la figura 8.15*c*, podrían seleccionarse opciones sucesivas de la distancia c al eje neutro para un valor seleccionado de θ. Para cada una de éstas, utilizando la compatibilidad de deformaciones y las relaciones esfuerzo-deformación para establecer las fuerzas en las barras y la resultante de compresión en el concreto, utilizando luego las ecuaciones de equilibrio para encontrar P_n, M_{nx} y M_{ny}, se podría determinar un solo punto en la superficie de interacción. Cálculos repetitivos, fácilmente realizados mediante computador, pueden establecer entonces una cantidad suficiente de puntos que definen la superficie. La zona de compresión, de forma triangular o trapezoidal como en la figura 8.15*c*, es una complicación y, por lo general, la deformación en cada barra de refuerzo será diferente, pero estas características pueden incorporarse en el análisis.

Sin embargo, la principal dificultad es que el eje neutro no va a ser, en general, perpendicular a la excentricidad resultante dibujada desde el centro de la columna hasta el punto de aplicación de la carga P_n. Para cada selección sucesiva del eje neutro, existen valores únicos de P_n, M_{nx} y M_{ny} y, sólo para casos especiales, la relación M_{ny}/M_{nx} será tal que la excentricidad resulte perpendicular al eje neutro seleccionado para los cálculos. El resultado es que, para selecciones sucesivas de c para determinado θ, el valor de λ en las figuras 8.15*c* y 8.15*d* variará. Los puntos en la superficie de falla establecidos de esta manera se desviarán de dicha superficie para valores crecientes de P_n y no representarán un plano de intersección, como en el Caso (*c*) de la figura 8.15*d*.

En la práctica, la carga mayorada P_u y los momentos mayorados M_{ux} y M_{uy}, que deben ser resistidos, se determinan mediante el análisis del pórtico de la estructura. Por consiguiente se establece el valor real de $\lambda = \arctan(M_{uy}/M_{ux})$ y se necesita únicamente la curva del Caso (*c*), figura 8.15*d*, para verificar si la columna de prueba es adecuada. En la sección 8.14 se describe un método de computador iterativo para establecer la línea de interacción para el valor particular de λ aplicable.

Como alternativa, se utilizan métodos aproximados más simples. Éstos se describen en las secciones 8.12 y 8.13.

8.12 MÉTODO DEL CONTORNO DE CARGA

El método del contorno de carga se basa en la representación de la superficie de falla de la figura 8.15*d*, mediante una familia de curvas correspondientes a valores constantes de P_n (ver la referencia 8.8). La forma general de estas curvas puede aproximarse mediante una ecuación de interacción adimensional:

$$\left(\frac{M_{nx}}{M_{nx0}}\right)^{\alpha 1} + \left(\frac{M_{ny}}{M_{ny0}}\right)^{\alpha 2} = 1.0 \qquad (8.18)$$

donde

$$\begin{aligned} M_{nx} &= P_n e_y \\ M_{nx0} &= M_{nx} \quad \text{cuando} \quad M_{ny} = 0 \\ M_{ny} &= P_n e_x \\ M_{ny0} &= M_{ny} \quad \text{cuando} \quad M_{nx} = 0 \end{aligned}$$

además α_1 y α_2 son exponentes que dependen de las dimensiones de la columna, de la cantidad y distribución del acero de refuerzo, de las características esfuerzo-deformación unitaria del acero y del concreto, de la cantidad de recubrimiento de concreto y del tamaño de los flejes transversales o espirales. Cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, las formas para estos contornos de interacción son como las mostradas en la figura 8.16 para valores específicos de α.

La introducción de los coeficientes ϕ del Código ACI para reducir a resistencias de diseño las resistencias a carga axial y a flexión, no presenta dificultad alguna. Se aplican los coeficientes ϕ apropiados a P_n, M_{nx} y M_{ny}, y se define una nueva superficie de falla, similar a la original pero dentro de ésta. Con la introducción de los coeficientes ϕ y con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, la ecuación (8.18) se transforma en

$$\left(\frac{\phi M_{nx}}{\phi M_{nx0}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{\phi M_{ny}}{\phi M_{ny0}}\right)^{\alpha} = 1.0 \tag{8.19}$$

Obviamente los coeficientes ϕ se cancelan en la ecuación (8.19), de manera que la figura 8.16 también puede utilizarse en la descripción de los contornos de carga para la superficie de *resistencias de diseño* cambiando los títulos de las coordenadas de acuerdo con dicha ecuación.

Los cálculos publicados por Bresler en la referencia 8.8 indican que los valores de α están en el intervalo de 1.15 a 1.55 para columnas cuadradas y rectangulares. Los valores cercanos al valor inferior de este intervalo son los más conservadores. En la referencia 8.7 se encuentran métodos y ayudas de diseño tendientes a una estimación más definida del valor de α.

En la práctica se conocen los valores de P_u, M_{ux} y M_{uy} a partir del análisis de la estructura. Para una sección de columna tentativa, los valores de ϕM_{nx0} y ϕM_{ny0} correspondientes a la carga P_u pueden encontrarse fácilmente mediante los métodos usuales para flexión uniaxial. Luego, remplazando a ϕM_{nx} con M_{ux} y a ϕM_{ny} con M_{uy} en la ecuación (8.19) o, como alternativa, dibujando M_{ux} y M_{uy} en la figura 8.16, se puede confirmar que una combinación particular de momentos

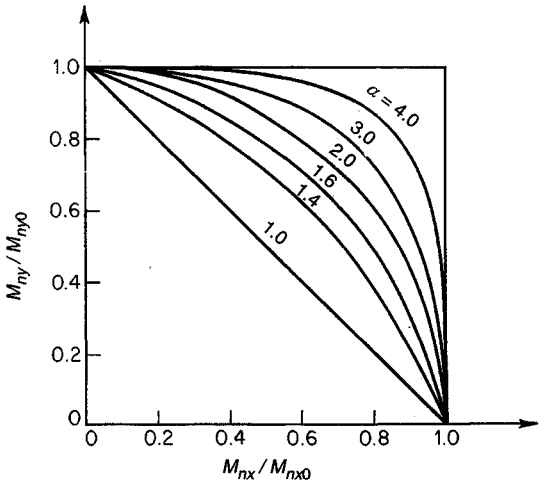


FIGURA 8.16
Contornos de interacción para valores constantes de P_n y diferentes valores de α (*adaptada de la referencia 8.10*).

mayorados cae dentro del contorno de carga (diseño seguro) o por fuera del contorno (falla) y es posible entonces modificar el diseño si es necesario.

En la referencia 8.11 se presenta un método aproximado relacionado con el método del contorno de carga, en el cual el contorno curvo de carga se remplaza por una aproximación bilineal. Esto conduce a un método de *diseño de prueba* en que los momentos de flexión biaxial se representan por un momento equivalente de flexión uniaxial. Gráficos de diseño basados en este método aproximado se encuentran en el ACI *Column Design Handbook* (ver la referencia 8.7). Los diseños tentativos que se obtienen de esta manera deben verificarse mediante el método del contorno de carga descrito anteriormente o con el método de la carga inversa que se presenta a continuación.

8.13 MÉTODO DE LA CARGA INVERSA

Un método de diseño simple y aproximado, desarrollado por Bresler (ver la referencia 8.8), se verificó satisfactoriamente mediante comparación con resultados de gran cantidad de ensayos y cálculos precisos (ver la referencia 8.12). Es preciso observar que la superficie de interacción de la columna de la figura 8.15*d* puede dibujarse alternativamente como una función de la carga axial P_n y de las excentricidades $e_x = M_{ny}/P_n$ y $e_y = M_{nx}/P_n$, como aparece en la figura 8.17*a*. La superficie S_1 de la figura 8.17*a* puede transformarse en una superficie de falla equivalente S_2, como se ilustra en la figura 8.17*b*, donde e_x y e_y se dibujan contra $1/P_n$ en vez de P_n. Así que, $e_x = e_y = 0$ corresponde al inverso de la capacidad de la columna si ésta se cargara concéntricamente, P_0; esta situación se representa con el punto C. Para $e_y = 0$ y para cualquier valor determinado de e_x, existe una carga P_{ny0} (correspondiente al momento M_{ny0}) que producirá la falla. El inverso de este valor de carga es el punto A. En forma similar, para $e_x = 0$ y para cualquier valor de e_y, existe algún valor de la carga P_{nx0} (correspondiente al momento M_{nx0}) que producirá la falla; el inverso de éste es el punto B. Los valores de P_{nx0} y P_{ny0} se determinan para excentricidades conocidas de la carga aplicada a determinada columna, utilizando los métodos establecidos anteriormente para flexión uniaxial o con las gráficas de diseño para flexión uniaxial.

Un plano oblicuo S'_2 se define mediante los tres puntos: A, B y C; este plano se utiliza como una aproximación a la superficie real de falla S_2. Observe que para cualquier punto en la superficie S_2 (es decir, para cualquier combinación de e_x y e_y) existe un plano correspondiente S'_2. Así que la

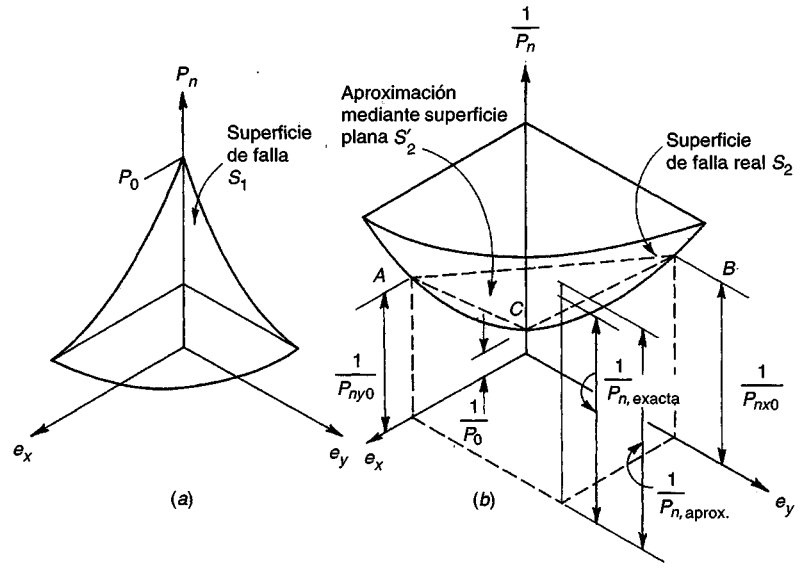


FIGURA 8.17
Superficies de interacción para el método de la carga inversa.

aproximación de la superficie real de falla S_2 incluye una cantidad infinita de planos S'_2 determinados mediante pares de valores particulares de e_x y e_y, es decir, con los puntos particulares A, B y C.

La ordenada vertical $1/P_{n,\text{exacta}}$, hasta la superficie de falla real, puede estimarse siempre en forma conservadora mediante la distancia $1/P_{n,\text{aprox}}$, hasta el plano oblicuo ABC (extendido), gracias a la forma de cascarón de huevo cóncavo hacia arriba de la superficie real de falla. En otras palabras, $1/P_{n,\text{aprox.}}$ siempre es mayor que $1/P_{n,\text{exacta}}$, lo cual significa que $P_{n,\text{aprox.}}$ siempre será menor que $P_{n,\text{exacta}}$.

La ecuación de la carga inversa de Bresler se deduce a partir de la geometría del plano aproximado. Puede demostrarse que

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{nx0}} + \frac{1}{P_{ny0}} - \frac{1}{P_0} \tag{8.20}$$

donde P_n = valor aproximado de la carga última en flexión biaxial con excentricidades e_x y e_y

P_{ny0} = carga última cuando sólo está presente la excentricidad e_x $(e_y = 0)$

P_{nx0} = carga última cuando sólo está presente la excentricidad e_y $(e_x = 0)$

P_0 = carga última para la columna cargada concéntricamente

La ecuación (8.20) es suficientemente precisa para propósitos de diseño, siempre y cuando $P_n \geq 0.10P_0$. No es confiable cuando predomina flexión biaxial acompañada por una fuerza axial menor que $P_0/10$. Para este caso, en que la flexión predomina fuertemente, la falla se inicia por fluencia en el acero de tensión y esta situación corresponde a la décima parte inferior del diagrama de interacción de la figura 8.15*d*. En este intervalo resulta conservador y bastante preciso ignorar por completo la fuerza axial y calcular la sección únicamente para flexión biaxial.

La introducción de los coeficientes de reducción de resistencia del ACI no cambia el desarrollo anterior de manera fundamental, siempre y cuando el coeficiente ϕ sea constante para todos los términos; para propósitos de diseño, la ecuación de Bresler puede reestructurarse así

$$\frac{1}{\phi P_n} = \frac{1}{\phi P_{nx0}} + \frac{1}{\phi P_{ny0}} - \frac{1}{\phi P_0} \tag{8.21}$$

Para el intervalo en el cual el método de Bresler es aplicable, por encima de $0.10P_0$, el valor de ϕ es constante excepto que, para excentricidades muy pequeñas, el Código ACI impone un límite superior en la resistencia máxima de diseño que tiene el efecto de aplanar la parte superior de la curva de interacción de resistencia de la columna (ver la sección 8.9 y las gráficas A.5 a A.16 del apéndice A). Cuando se utilice el método de Bresler para flexión biaxial, es necesario tomar la curva de resistencia uniaxial *sin* el corte horizontal (señalado mediante líneas punteadas en las gráficas del apéndice A) para obtener los valores que se van a utilizar en la ecuación (8.21). El valor de ϕP_n obtenido de esta manera debe entonces someterse a la restricción, al igual que para flexión uniaxial, que no exceda $0.80\phi P_0$ para columnas con flejes o $0.85\phi P_0$ para columnas reforzadas con espiral.

Para una situación común de diseño en que se dan las dimensiones y el refuerzo para la columna tentativa y las excentricidades e_y y e_x de la carga, las cargas últimas ϕP_{nx0} y ϕP_{ny0} para flexión uniaxial con respecto a los ejes X y Y, respectivamente, y la carga última ϕP_0 para cargas concéntricas, pueden encontrarse mediante cálculos o a partir de gráficos de diseño. Entonces, es posible calcular $1/\phi P_n$ a partir de la ecuación (8.21), y de allí se puede obtener ϕP_n. El requisito de diseño consiste en que la carga mayorada P_u, modificada mediante el corte horizontal mencionado anteriormente, no debe exceder ϕP_n, si es aplicable.

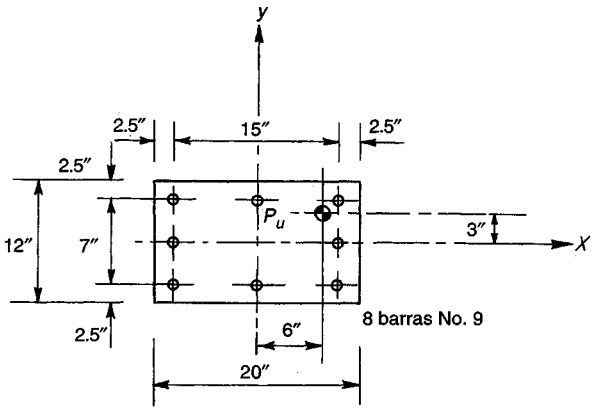


FIGURA 8.18
Sección transversal de la columna del ejemplo 8.5

Ejemplo 8.5. Diseño de una columna a flexión biaxial. La columna de 12 × 20 pulg que aparece en la figura 8.18 está reforzada con ocho barras No. 9 distribuidas alrededor del perímetro de la columna que suministran un área total de $A_{st} = 8.00$ pulg². Se va a aplicar una carga mayorada P_u de 275 klb con excentricidades $e_y = 3$ pulg y $e_x = 6$ pulg como se ilustra. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4$ klb/pulg² y $f_y = 60$ klb/pulg². Verifique si el diseño tentativo es adecuado: (*a*) con el método de carga inversa, y (*b*) con el método del contorno de carga.

Solución

(*a*) Mediante el método de la carga inversa se considera inicialmente la flexión con respecto al eje *Y*, $\gamma = 15/20 = 0.75$ y $e/h = 6/20 = 0.30$. Con una cuantía de refuerzo de $A_{st}/bh = 8.00/240 = 0.033$, el gráfico A.7 del apéndice A indica

$$\frac{\phi P_{ny0}}{A_g} = 1.75 \qquad \phi P_{ny0} = 1.75 \times 240 = 420 \text{ klb}$$

$$\frac{\phi P_0}{A_g} = 3.65 \qquad \phi P_0 = 3.65 \times 240 = 876 \text{ klb}$$

Luego, para la flexión con respecto al eje *X*, $\gamma = 7/12 = 0.58$ (tómese 0.60) y $e/h = 3/12 = 0.25$. El gráfico A.6 del apéndice A indica que

$$\frac{\phi P_{nx0}}{A_g} = 1.80 \qquad \phi P_{nx0} = 1.80 \times 240 = 432 \text{ klb}$$

$$\frac{\phi P_0}{A_g} = 365 \qquad \phi P_0 = 3.65 \times 240 = 876 \text{ klb}$$

Si se sustituyen estos valores en la ecuación (8.21), se obtiene

$$\frac{1}{\phi P_n} = \frac{1}{432} + \frac{1}{420} - \frac{1}{876} = 0.00356$$

a partir de la cual $\phi P_n = 281$ klb. Así que, según el método de Bresler, la carga de diseño de $P_u = 275$ klb puede aplicarse en forma segura sobre la columna.

(*b*) Según el método del contorno de carga para flexión con respecto al eje *Y* con $P_u = \phi P_n = 275$ klb y $\phi P_n/A_g = 275/240 = 1.15$, el gráfico A.7 del apéndice A indica que

$$\frac{\phi M_{ny0}}{A_g h} = 0.62$$

En consecuencia, $\phi M_{ny0} = 0.62 \times 240 \times 20 = 2{,}980$ klb-pulg. Entonces, para flexión con respecto al eje *X*, con $\phi P_n/A_g = 1.15$, como antes, a partir del gráfico A.6,

$$\frac{\phi M_{nx0}}{A_g h} = 0.53$$

De manera que $\phi M_{nx0} = 0.53 \times 240 \times 12 = 1530$ klb-pulg. Los momentos para cargas mayoradas con respecto a los ejes Y y X son, respectivamente,

$$M_{uy} = 275 \times 6 = 1650 \text{ klb-pulg}$$
$$M_{ux} = 275 \times 3 = 830 \text{ klb-pulg}$$

Para verificar si el diseño tentativo es adecuado se utiliza la ecuación (8.19) con un exponente α tomado en forma conservadora igual a 1.15. Entonces, con $\phi M_{nx} = M_{ux}$ y $\phi M_{ny} = M_{uy}$, esta ecuación indica

$$\left(\frac{830}{1530}\right)^{1.15} + \left(\frac{1650}{2980}\right)^{1.15} = 0.495 + 0.507 = 1.002$$

Este valor está muy cerca de 1.0 y, por consiguiente, puede considerarse que el diseño también es seguro utilizando el método del contorno de carga.

En la práctica actual, el valor utilizado de α en la ecuación (8.19) debe revisarse para la columna específica, puesto que los resultados de esta ecuación son muy sensibles a los cambios en el valor de α. En la referencia 8.11 se demuestra que $\alpha = \log 0.5\,\beta$, donde los valores de β pueden tabularse para diferentes geometrías de columnas, resistencias de materiales e intervalos de carga específicos (ver la referencia 8.7). En este ejemplo, puede confirmarse a partir de la referencia 8.7 que $\beta = 0.56$ y, por tanto, $\alpha = 1.19$, valor muy próximo al seleccionado.

En el ejemplo 8.5*a* se puede observar que una excentricidad en la dirección Y, igual al 50 por ciento de aquélla en la dirección X, generó una reducción del 33 por ciento de la capacidad, es decir, de 420 a 281 klb. Para casos en los cuales la relación de excentricidades es menor, es justificable ignorar los momentos flectores en dirección de la excentricidad menor para la práctica corriente en estructuras aporticadas. *En general, la flexión biaxial debe tenerse en cuenta cuando la relación de excentricidades estimadas se aproxima o excede de 0.2.*

8.14 ANÁLISIS POR COMPUTADOR PARA FLEXIÓN BIAXIAL DE COLUMNAS

Aunque los métodos del contorno de carga y el de carga inversa se utilizan ampliamente en la práctica, cada uno de ellos tiene importantes limitaciones. Con el de contorno de carga, la selección del valor apropiado para el exponente α se hace difícil por varios factores relacionados con la forma de la columna y con la distribución de las barras. En muchos casos la premisa usual de $\alpha_1 = \alpha_2$ es una aproximación bastante pobre. Hay ayudas de diseño disponibles, pero éstas introducen mayores aproximaciones, como la utilización de una representación bilineal para el contorno de la carga. El método de carga inversa es muy sencillo de utilizar, pero la representación de la superficie de falla curva mediante una aproximación plana no es confiable en el intervalo de excentricidades grandes, donde la falla se inicia por fluencia del acero.

Con la amplia disponibilidad de computadores personales es preferible utilizar métodos más simples para obtener soluciones rápidas y más exactas para el problema de las columnas cargadas biaxialmente. Una posibilidad es utilizar el método desarrollado por Ehsani (ver la referencia 8.13). En este método se establece una línea de interacción para la resistencia de la columna de prueba, en forma exactamente análoga a la curva para carga axial más flexión uniaxial, que se describió en las secciones 8.3 a 8.7. Sin embargo, la curva se genera para el valor particular del ángulo de excentricidad que es aplicable, determinado por la relación de M_{uy}/M_{ux} a partir del análisis estructural del pórtico [ver la curva (*c*) de la figura 8.15*d*]. Esto se lleva a cabo seleccionando valores sucesivos para la distancia hasta el eje neutro, medida en este caso a lo largo de una de las caras de la columna a partir de la esquina sometida a mayor compresión, desde un valor muy pequeño (excen-

tricidad grande) hasta uno muy grande (excentricidad pequeña), para luego calcular la fuerza axial P_n y los momentos M_{nx} y M_{ny}. Para cada distancia seleccionada del eje neutro se realiza una iteración con valores sucesivos del ángulo de orientación θ, figura 8.15*c*, hasta que $\lambda = \arctan M_{ny}/M_{nx}$ coincida con el valor de $\lambda = \arctan M_{uy}/M_{ux}$ resultante del análisis estructural del pórtico. De esta manera, se establece un punto en la curva (*c*) de la figura 8.15*d*. Luego se repite esta secuencia de cálculos: se hace otra selección de la distancia al eje neutro, se escoge un nuevo valor de θ, se calculan los valores de la fuerza axial y de los momentos, se determina λ y se itera con los valores de θ hasta obtener el valor correcto de λ. En consecuencia, se establece un nuevo punto y se continúa así hasta obtener la curva de interacción de resistencia completa para ese valor particular de λ. Las disposiciones de seguridad del Código ACI pueden entonces imponerse de la manera usual y así es posible verificar si el diseño propuesto es idóneo para las cargas y momentos conocidos, utilizando como base la curva de resistencia de diseño en la columna de prueba.

Obviamente, este método no es práctico para cálculos manuales, pero los pasos iterativos pueden llevarse a cabo en forma fácil y rápida con computadores personales que también permiten una presentación gráfica de los resultados. En la referencia 8.13 se encuentran detalles completos de lo anterior.

Diversos programas de computador para flexión biaxial están disponibles comercialmente, tales como BIAXCOL3 (American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan), PCA-COL (Portland Cement Association, Skokie, Illinois) y HBCOLUMN (Concrete Reinforcing Steel Institute, Schaumburg, Illinois).

8.15 EMPALME DE BARRAS EN COLUMNAS

El refuerzo vertical principal en las columnas se empalma, por lo general, justo encima de cada nivel de piso o algunas veces en pisos alternos. Esto permite la reducción progresiva del área de acero en la columna para los niveles superiores en un edificio, donde las cargas son cada vez menores, lo cual evita además el manejo y el soporte de barras de columnas demasiado largas. El acero de las columnas puede empalmarse por traslapo, con soldadura a tope, mediante varios tipos de conexiones mecánicas patentadas o por contacto directo en los extremos, utilizando dispositivos especiales para garantizar un alineamiento apropiado de las barras.

Debe prestarse especial atención al problema de la congestión de las barras en los empalmes. Los traslapos de las barras, por ejemplo, duplican efectivamente el área de acero en la sección transversal de la columna en el nivel donde se realiza el empalme, lo cual puede acarrear dificultades al vaciar el concreto o impedir el cumplimiento de los requisitos del Código ACI relativos a mínimo espaciamiento lateral entre barras (1.5 d_b o 1.5 pulg). Para evitar estas dificultades, los porcentajes de

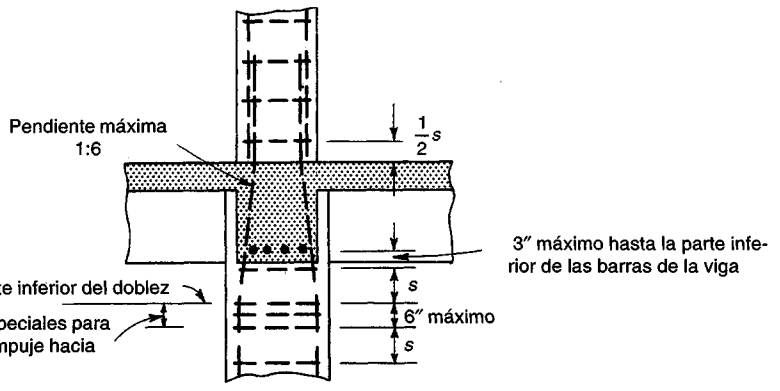


FIGURA 8.19
Detalle del empalme para una columna interior común.

acero en columnas se limitan algunas veces en la práctica a no más del cuatro por ciento aproximadamente o, como alternativa, las barras se extienden dos pisos y se utilizan empalmes escalonados.

El método más común para empalmar el acero de las columnas es el empalme simple por traslapo de barras, en el cual éstas están en contacto a lo largo de la longitud de traslapo. Doblar un poco las barras inferiores, como en la figura 8.19, se ha convertido en una práctica estándar que permite una ubicación ideal de las barras superiores. Con el fin de evitar el pandeo hacia afuera de las barras en el punto inferior del doblez, con el consecuente descascaramiento del recubrimiento de concreto, es necesario proveer refuerzo transversal especial en forma de flejes adicionales. De acuerdo con el Código ACI 7.8.1, la pendiente de la parte inclinada de una barra desalineada no debe exceder uno a seis, y es necesario proporcionar acero transversal para resistir una y media veces el componente horizontal de la fuerza calculada en la parte inclinada de la barra desalineada; este refuerzo especial debe colocarse a no más de 6 pulg del punto de doblamiento, como se señala en la figura 8.19. Para el resto de la columna, por encima y por debajo del piso, se aplican los requisitos usuales de espaciamiento descritos en la sección 8.2, excepto que la ubicación de los flejes debe iniciarse a no más de la mitad del espaciamiento normal por encima del nivel del piso. Cuando lleguen vigas desde las cuatro direcciones hasta una unión, como en la figura 8.19, los flejes pueden interrumpirse a no más de 3 pulg por debajo del refuerzo más bajo de la viga de menor altura, según el Código ACI 7.10.5. Si no hay vigas en los cuatro lados, como en el caso de columnas exteriores, los flejes deben colocarse con el espaciamiento usual, en sentido vertical a través de la altura del nudo hasta un nivel por debajo del refuerzo ubicado en la parte inferior de la losa que no supere la mitad del espaciamiento común.

En el Código ACI 7.10.4 se presentan requisitos análogos para columnas reforzadas con espiral, y éstos se ilustran en la referencia 8.9.

Esencialmente, los empalmes en columnas son a compresión aunque algunas combinaciones de carga que producen excentricidades entre moderadas y grandes, exigen que el empalme también transmita tensión. El Código ACI 12.17 permite los empalmes por traslapo, con soldadura a tope, mediante conectores mecánicos o por contacto entre extremos si los esfuerzos calculados para las cargas mayoradas varían de f_y para compresión a $0.5f_y$ para tensión, y exige que la resistencia a la tensión total que se proporciona en cada cara de la columna por los empalmes solos o por éstos en combinación con barras no empalmadas continuas actuando a f_y, sea por lo menos igual al doble de la tensión calculada en esa cara. Si el esfuerzo a tensión para cargas mayoradas excede $0.5f_y$, el empalme por traslapo debe desarrollar la resistencia completa f_y a tensión, o de lo contrario deben utilizarse empalmes totalmente soldados o conectores mecánicos. En cualquier caso, el Código exige que en las secciones donde se localicen los empalmes se provea una resistencia mínima a la tensión, en cada cara de la columna, igual a un cuarto de la capacidad del refuerzo vertical actuando a f_y.

Los requisitos para empalmes por traslapo, tanto a compresión como a tensión, se analizaron en la sección 5.11 y el diseño de un empalme a compresión para una columna común se ilustró en el ejemplo 5.4.

REFERENCIAS

8.1. *ACI Detailing Manual,* ACI Special Publication SP-66, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 1994.

8.2. *CRSI Handbook*, 7th ed., Concrete Reinforcing Steel Institute, Chicago, 1992.

8.3. F. E. Richart, A. Brandtzaeg, and R. L. Brown, "A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses", Univ. Ill. Eng. Exp. Stn. Bull. 185, 1928.

8.4. F. E. Richart, A. Brandtzaeg, and R. L. Brown, "The Failure of Plain and Spirally Reinforced Concrete in Compression", Univ. Ill. Eng. Exp. Stn. Bull. 190, 1929.

8.5. S. Martinez, A. H. Nilson, and F. O. Slate, "Spirally Reinforced High Strength Concrete Columns, *J. ACI,* vol. 81, no. 5, 1984, pp. 431-442.

8.6. A. H. Mattock, L. B. Kriz, and E. Hognestad, "Rectangular Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design", *J. ACI*, vol. 32, no. 8, 1961, pp. 875-928.

8.7. *Design Handbook*, vol. 2, *Columns,* ACI Special Publication SP-17, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 1990.

8.8. B. Bresler, "Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending", *J. ACI*, vol. 32, no. 5, 1960, pp. 481-490.
8.9. R. W. Furlong, "Ultimate Strength of Square Columns under Biaxially Eccentric Loads", *J. ACI*, vol. 32, no. 9, 1961, pp. 1129-1140.
8.10. F. N. Pannell, "Failure Surfaces for Members in Compression and Biaxial Bending", *J. ACI*, vol. 60, no. 1, 1963, pp. 129-140.
8.11. A. L. Parme, J. M. Nieves, and A. Gouwens, "Capacity of Reinforced Concrete Rectangular Members Subject to Biaxial Bending", *J. ACI*, vol. 63, no. 9, 1966, pp. 911-923.
8.12. L. N. Ramamurthy, "Investigation of the Ultimate Strength of Square and Rectangular Columns under Biaxially Eccentric Loads", in *Symp. Reinforced Concrete Columns*, ACI Publication SP-13, 1966, pp. 263-298.
8.13. M. R. Ehsani, "CAD for Columns", *Concr. Int.* vol. 8, no. 9, 1986, pp. 43-47.

PROBLEMAS

8.1. Una columna cuadrada de 16 pulg está reforzada con cuatro barras No. 14, una en cada esquina, con distancias de recubrimiento de 3 pulg hasta el centro del acero en cada dirección. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 5000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. Construya el diagrama de interacción que relaciona la resistencia axial P_n con la resistencia a la flexión M_n .La flexión será con respecto a un eje paralelo a una de las caras. Calcule las coordenadas para P_b, P_o y por lo menos otros tres puntos representativos de la curva.

8.2. Dibuje la curva de resistencia de diseño que relaciona ϕP_n con ϕM_n para la columna del problema 8.1. Diseñe y detalle el acero de los flejes que exige el Código ACI. ¿Es esta columna una buena selección para resistir una carga de $P_u = 540$ klb aplicada con una excentricidad de $e = 4.44$ pulg?

8.3. La columna corta que aparece en la figura P8.3 estará sometida a una carga excéntrica que causa una flexión uniaxial con respecto al eje Y. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60$ klb/pulg^2 y $f'_c = 6$ klb/pulg^2.

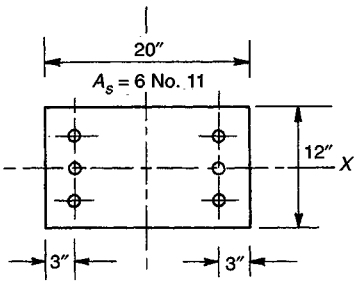


FIGURA P8.3

(*a*) Construya la curva de interacción de resistencia para esta columna calculando por lo menos cinco puntos. Incluya los correspondientes a flexión pura, carga axial pura y falla balanceada.
(*b*) Presente en el mismo dibujo la curva de resistencia de diseño obtenida mediante la introducción de los coeficientes f del Código ACI.
(*c*) Diseñe el refuerzo transversal para la columna indicando las dimensiones clave para los flejes.

8.4. La columna de la figura P8.4 está sometida a carga axial y a un momento flector que causa flexión con respecto a un eje paralelo al de las filas de las barras. ¿Cuál será el momento que produce la falla de la columna si una carga axial de 500 klb está aplicada simultáneamente? Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60$ klb/pulg^2.

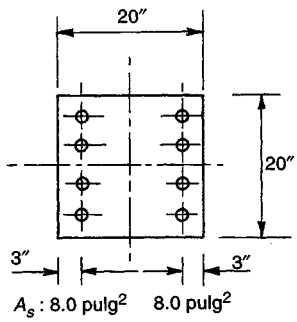


FIGURA P8.4

8.5. ¿Cuál es la resistencia M_n de la columna del problema 8.4 cuando ésta está cargada en flexión pura (fuerza axial = 0) con respecto a uno de los ejes principales?

8.6. Construya el diagrama de interacción que relaciona P_n con M_n para la columna de edificio que aparece en la figura P8.6. La flexión será con respecto al eje *a-a*. Calcule las coordenadas específicas para carga concéntrica ($e = 0$), para P_b, y al menos para tres puntos adicionales bien seleccionados sobre la curva. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 8000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. Señale también la curva de resistencia de diseño que relaciona ϕP_n con ϕM_n.

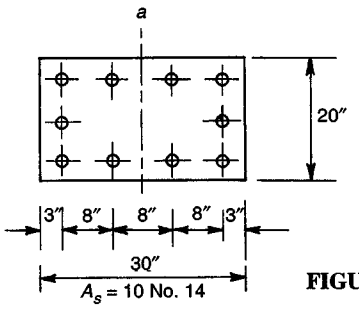


FIGURA P8.6

8.7. Una columna rectangular corta de concreto reforzado, como la de la figura P8.7, va a ser parte de un pórtico rígido de luces largas y estará sometida a momentos flectores altos combinados con cargas axiales relativamente bajas, causando flexión con respecto al eje más fuerte. Como consecuencia de la gran excentricidad, el acero se coloca asimétricamente como se muestra, con tres barras No. 14 cerca de la cara de tensión y dos barras No. 11 cerca de la cara de compresión. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 6$ klb/pulg^2 y $f_y = 60$ klb/pulg^2. Construya el diagrama de interacción de resistencia completo dibujando P_n *versus* M_n, y relacionando las excentricidades con el centroide plástico de la columna (no con el centroide geométrico). En el mismo diagrama, muestre la curva que relaciona ϕP_n con ϕM_n.

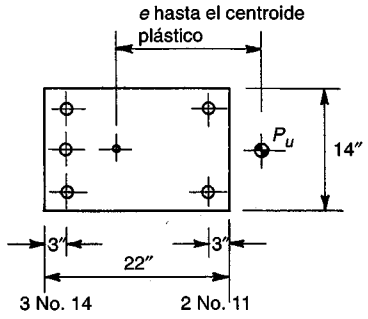


FIGURA P8.7

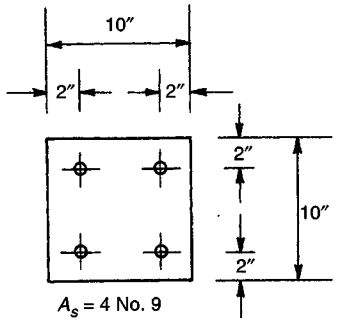


FIGURA P8.8

8.8. Construya el diagrama de interacción de resistencia y las curvas de resistencias de diseño para la columna cuadrada de la figura P8.8, si se sabe que la columna estará sometida a flexión biaxial con excentricidades iguales con respecto a los dos ejes principales. Tome $f_y = 60$ klb/pulg^2 y $f'_c = 4$ klb/pulg^2.

8.9. La columna cuadrada de la figura P8.9 es una columna de esquina sometida a carga axial y a flexión biaxial. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 6000$ lb/pulg^2.

(*a*) Determine la combinación única de P_n, M_{nx} y M_{ny} que producirá falla incipiente con el eje neutro localizado como se muestra en la figura. La zona de compresión aparece sombreada. Observe que se muestra la localización del eje neutro real y no el límite del bloque rectangular de esfuerzos equivalente; sin embargo, el bloque rectangular de esfuerzos puede utilizarse como base de los cálculos.

(*b*) Determine el ángulo entre el eje neutro y el eje de excentricidad, éste último definido como la línea entre el centro de la columna y el punto de aplicación de la carga.

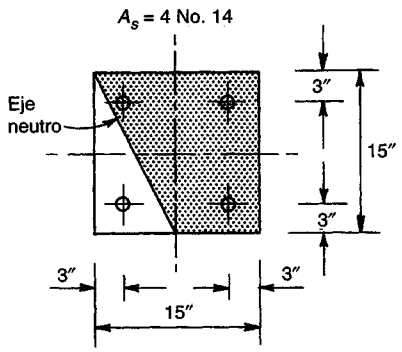


FIGURA P8.9

8.10. Para la carga axial P_n encontrada en el problema 8.9 y para la misma columna con la misma relación de excentricidades e_y/e_x determine los valores de M_{nx} y M_{ny} que producirían una falla incipiente, con el método del contorno de carga. Compare los resultados con los del problema 8.9. Tome $\alpha = 1.30$.

8.11. Para las excentricidades e_x y e_y encontradas en el problema 8.9, halle el valor de la carga axial P_n que produciría una falla incipiente, utilizando el método de la carga inversa (Bresler). Compare con los resultados de los problemas 8.9 y 8.10.

CAPÍTULO

9 COLUMNAS ESBELTAS

9.1 INTRODUCCIÓN

El material expuesto en el capítulo 8 hace referencia a *columnas cortas* cargadas concéntrica o excéntricamente, en las cuales la resistencia es controlada en su totalidad por la resistencia de los materiales y la geometría de la sección transversal. En la práctica actual, la mayor parte de las columnas están dentro de esta categoría. Sin embargo, con el incremento en la utilización de materiales de alta resistencia y con el desarrollo de los métodos para el cálculo de las dimensiones de los elementos, ahora es posible diseñar secciones transversales mucho más pequeñas que antes, para determinado valor de carga axial con o sin flexión simultánea. De esta manera, se obtienen elementos más esbeltos. Por esta razón, junto con la utilización de conceptos estructurales más innovadores, los procedimientos de diseño racionales y confiables para columnas esbeltas se han vuelto cada vez más importantes.

Se dice que una columna es *esbelta* si las dimensiones de su sección transversal son pequeñas en comparación con su longitud. El grado de esbeltez se expresa, generalmente, en términos de la relación de esbeltez l/r, donde l es la longitud y r es el radio de giro de su sección transversal, igual a $\sqrt{I/A}$. Para elementos cuadrados o circulares, el valor de r es el mismo con respecto a cualquiera de los ejes; para otras formas, r es mínimo con respecto al eje principal menor y este valor es por lo general el que debe utilizarse en la determinación de la relación de esbeltez de una columna libre.

Se sabe que un elemento con gran esbeltez colapsará ante una carga de compresión menor que la correspondiente para un elemento más corto con las mismas dimensiones de la sección transversal. Cuando un elemento relativamente poco esbelto (o robusto), por ejemplo, con $l/r = 10$ (como una columna cuadrada con longitud igual a aproximadamente tres veces la dimensión h de su sección transversal), está cargado en compresión axial, la falla se presenta para la carga determinada por la ecuación (8.3) puesto que para ésta, tanto el concreto como el acero están sometidos a esfuerzos equivalentes a los de su máxima capacidad de carga y fallan, respectivamente, por aplastamiento y por fluencia. Si un elemento con la misma sección transversal tiene una relación de

esbeltez $l/r = 100$ (por ejemplo, una columna cuadrada articulada en los dos extremos y con una longitud igual a aproximadamente 30 veces la dimensión de la sección), puede fallar bajo una carga axial igual a la mitad o menos de la carga que determine la ecuación (8.3). En este caso, el colapso se produce por pandeo, es decir, por un súbito desplazamiento lateral del elemento entre sus extremos, con el consecuente sobreesfuerzo del acero y del concreto causado por los de flexión que se superponen a los esfuerzos de compresión axial.

En la práctica, la mayoría de las columnas están sometidas a momentos flectores al igual que a cargas axiales, como se explicó en el capítulo 8. Estos momentos producen deflexión lateral entre los extremos del elemento y también pueden generar desplazamiento lateral relativo entre las uniones. Asociados a estos desplazamientos se producen *momentos de segundo orden* que se suman a los momentos primarios y que pueden ser bastante grandes para el caso de columnas esbeltas, generando en ciertos casos la falla de la columna. Una columna esbelta, según una definición práctica, es aquélla para la cual existe una reducción significativa de la capacidad a carga axial a causa de estos momentos de segundo orden. Por ejemplo, en el desarrollo de las disposiciones para columnas del Código ACI se considera significativa cualquier reducción mayor que lo cercano al cinco por ciento, requiriéndose en estos casos considerar los efectos de esbeltez.

El Código ACI y su comentario contienen disposiciones detalladas que regulan el diseño de columnas esbeltas. El Código ACI 10.11, 10.12 y 10.13 presenta un método aproximado para tener en cuenta la esbeltez mediante la utilización de *factores de amplificación de momento*. Estas disposiciones son bastante similares a las utilizadas para columnas de acero diseñadas según la especificación del American Institute of Steel Construction (AISC). Como opción, el Código ACI 10.10 considera una aproximación más fundamental en la cual el efecto de los desplazamientos laterales se tiene en cuenta de modo directo en el análisis del pórtico. Como consecuencia de la creciente complejidad del método de amplificación de momentos, con los refinamientos a que ha sido sometido en años recientes, la gran cantidad de requisitos detallados y ante la disponibilidad general de computadores en las oficinas de diseño, existe un interés creciente en los "análisis de segundo orden" como lo sugiere el Código ACI 10.10, en los cuales el efecto de los desplazamientos laterales se calcula directamente.

Como se anotó, en la práctica la mayor parte de las columnas siguen siendo cortas. El Código ACI incluye expresiones simples para determinar si los efectos de esbeltez deben tenerse en cuenta en el diseño. Éstas se presentarán en la sección 9.4 luego de desarrollar la información básica de las secciones 9.2 y 9.3, relacionada con el pandeo de las columnas y con los efectos de esbeltez.

9.2 COLUMNAS CARGADAS CONCÉNTRICAMENTE

La información básica relacionada con el comportamiento de columnas rectas y esbeltas, cargadas concéntricamente, fue desarrollada por Euler hace más de 200 años. En forma generalizada, ésta establece que este tipo de elemento fallará por pandeo para una carga crítica igual a:

$$P_c = \frac{\pi^2 E_t I}{(kl)^2} \tag{9.1}$$

Puede observarse que la carga de pandeo disminuye con prontitud con el aumento en la *relación de esbeltez* kl/r (ver la referencia 9.1).

Para el caso más simple de una columna articulada en los dos extremos y construida de material elástico, E_t simplemente es el módulo de Young y kl es igual a la longitud real l de la columna. Para la carga dada por la ecuación (9.1), el elemento originalmente recto se pandea con una forma de media onda sinusoidal, como aparece en la figura 9.1*a*. En esta configuración pandeada actúan momentos flectores Py en cualquier sección como la a; y es la deflexión en esta sección. Estas deflexiones continúan aumentando hasta que el esfuerzo por flexión causado por el momento creciente, simultáneamente con el esfuerzo original de compresión, producen un sobreesfuerzo y la falla del elemento.

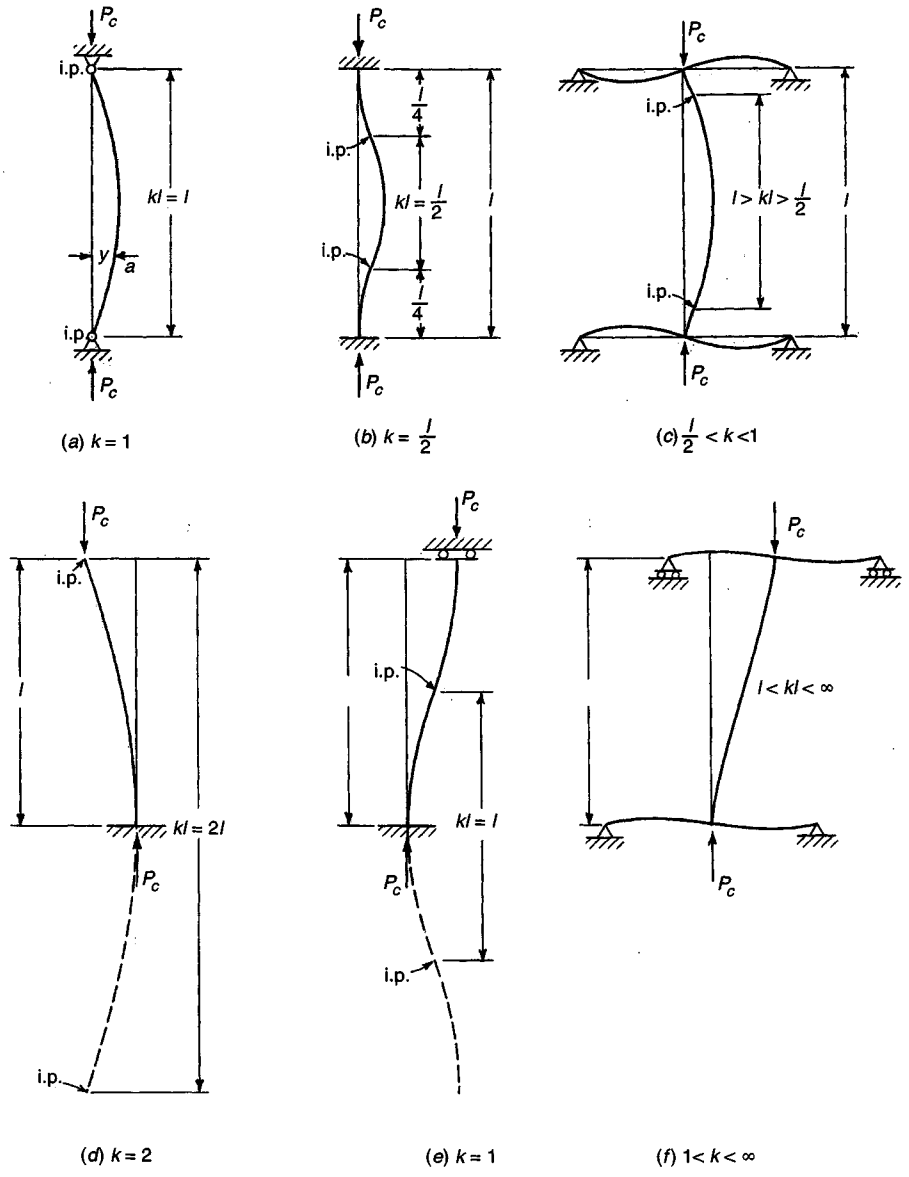


FIGURA 9.1
Pandeo y longitud efectiva de columnas cargadas axialmente.

Si la curva esfuerzo-deformación unitaria de una probeta corta en determinado elemento tiene la forma de la figura 9.2*a*, como en el caso de las columnas de concreto reforzado, E_t es igual al módulo de Young, siempre y cuando el esfuerzo de pandeo P_c/A esté por debajo del límite de proporcionalidad f_p. Si es mayor que f_p, el pandeo ocurre en el intervalo inelástico. En este caso, en la ecuación (9.1) E_t es el módulo tangente, es decir, la pendiente de la tangente a la curva esfuerzo-deformación unitaria. A medida que el esfuerzo aumenta, E_t disminuye. Una gráfica de la carga de pandeo *versus* la relación de esbeltez, llamada curva de la columna, tiene entonces la forma de la figura 9.2*b*, que señala la reducción de la resistencia al pandeo con el aumento de la esbeltez. Para columnas muy poco esbeltas (o muy robustas) se encuentra que el valor de la carga de pandeo, calculado a partir de la ecuación (9.1), excede la resistencia directa al aplastamiento determinada por la ecuación (8.3). Esto también aparece en la figura 9.2*b*. Por tanto, existe una relación de esbeltez límite $(kl/r)_{\text{lím}}$. Para valores menores que este límite, la falla ocurre por simple aplasta-

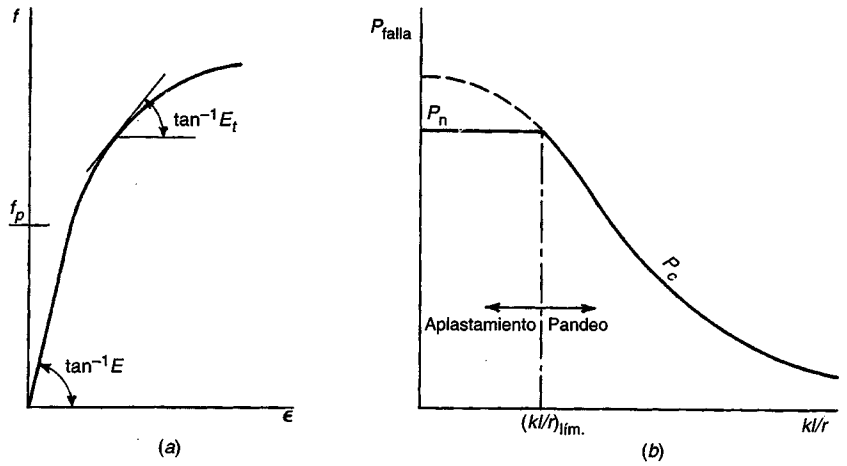


FIGURA 9.2
Efecto de la esbeltez sobre la resistencia de columnas cargadas axialmente.

miento, independientemente del valor de kl/r; para valores mayores que $(kl/r)_{\text{lím}}$, la falla ocurre por pandeo, con una disminución en la carga o esfuerzo de pandeo a medida que aumenta la esbeltez.

Si un elemento está fijo contra rotaciones en los dos extremos, se pandea con la forma que aparece en la figura 9.1*b*, con puntos de inflexión (p.i.) como se señalan. La porción entre los puntos de inflexión está exactamente en la misma situación que la columna con extremos articulados de la figura 9.1*a* y, en consecuencia, la *longitud efectiva* kl de la columna con extremos empotrados, es decir, la distancia entre puntos de inflexión, se puede observar que es $kl = l/2$. La ecuación (9.1) muestra que una columna elástica empotrada en los dos extremos soportará cuatro veces más carga axial de compresión que cuando se encuentra articulada en los extremos.

Las columnas en las estructuras reales rara vez están empotradas o articuladas, pero tienen extremos parcialmente restringidos contra rotación mediante elementos confinantes. Esto se ilustra en forma esquemática en la figura 9.1*c*, donde puede apreciarse que para estos elementos la longitud efectiva kl, es decir, la distancia entre puntos de inflexión, tiene un valor entre l y $l/2$. El valor preciso depende del grado de restricción del extremo, o sea, de la relación entre la rigidez EI/l de la columna y la suma de las rigideces EI/l de los elementos de restricción en ambos extremos.

En las columnas de las figuras 9.1*a*, *b* y *c*, se asume que uno de los extremos estaba impedido para moverse lateralmente con respecto al otro, mediante arriostramiento horizontal o cualquier otro mecanismo. En este caso, es posible observar que la longitud efectiva kl es siempre menor que (o máximo igual) a la longitud real l.

Si una columna está empotrada en un extremo y totalmente libre en el otro (columna en voladizo o poste), ésta se pandea como en la figura 9.1*d*. Es decir, el extremo superior se mueve lateralmente con respecto al inferior y causa una deformación conocida como *desplazamiento lateral*. Este pandeo tiene forma de un cuarto de onda sinusoidal y es, por consiguiente, análogo a la mitad superior de la columna articulada de la figura 9.1*a*. Los puntos de inflexión, uno en el extremo de la columna real y el otro en una extensión imaginaria de la onda sinusoidal, están espaciados a una distancia de $2l$, de manera que la longitud efectiva es $kl = 2l$.

Si la columna está fija contra rotación en los dos extremos pero uno de ellos puede moverse lateralmente con respecto al otro, ésta se pandea como en la figura 9.1*e*, con una longitud efectiva $kl = l$. Si se compara esta columna empotrada en los dos extremos pero libre de desplazarse lateralmente, con otra de extremos empotrados y arriostrada contra desplazamiento lateral (ver la figura 9.1*b*), se observa que la longitud efectiva de la primera es el doble de la segunda. Si se considera la ecuación (9.1), esto significa que la resistencia al pandeo de una columna elástica doblemente empotrada, que está libre para desplazarse lateralmente, apenas es la cuarta parte de aquélla para la misma columna cuando está arriostrada contra desplazamiento lateral. Esto ilustra el hecho de

que *los elementos a compresión libres de pandearse con el mecanismo de desplazamiento lateral siempre son considerablemente más débiles que cuando están arriostrados contra dicho desplazamiento.*

De nuevo, los extremos de las columnas en las estructuras reales se encuentran con poca frecuencia articulados, empotrados o totalmente libres, puesto que en general están restringidos por elementos confinantes. Si no se limita el desplazamiento lateral, el pandeo ocurre como en la figura 9.1*f* y la longitud efectiva, al igual que antes, depende del grado de restricción. Si las vigas transversales son muy rígidas en comparación con la columna, el caso se aproxima al de la figura 9.1*e* y kl es apenas ligeramente mayor que l. De otra parte, si los elementos de restricción son muy flexibles, la situación se aproxima a una condición articulada en los dos extremos. Evidentemente, una columna articulada en los dos extremos y libre para desplazarse en forma lateral es inestable; ésta simplemente se caerá puesto que es incapaz de resistir cualquier carga.

En estructuras de concreto reforzado rara vez se trabaja con elementos individuales, se prefieren más bien los pórticos rígidos de varias configuraciones. El pórtico simple de la figura 9.3, con cargas aplicadas concéntricamente en las columnas, ilustra la manera mediante la cual las relaciones descritas afectan el comportamiento de pórticos con relación al pandeo. Si el desplazamiento lateral está restringido, como se indica en forma esquemática con el arriostramiento de la figura 9.3*a*, la configuración de pandeo es como se ilustra. La forma de pandeo de la columna corresponde a la de la figura 9.1*c*, excepto que el extremo inferior está articulado. Se observa que la longitud efectiva kl es menor que l. Por otra parte, si se considera un pórtico idéntico equivalente sin ningún arriostramiento contra el desplazamiento lateral, el pandeo ocurre como en la figura 9.3*b*. La columna está en una situación similar a la figura 9.1*d*, pero invertida, excepto que el extremo superior no está empotrado, sino apenas restringido en forma parcial por la viga. Se observa que la longitud efectiva kl excede el valor de $2l$ en una cantidad que depende del grado de restricción. La resistencia al pandeo depende de kl/r de la manera expuesta en la figura 9.2*b*. En consecuencia, aunque los pórticos son idénticos en cuanto a dimensiones, los no arriostrados presentarán pandeo a una carga radicalmente menor que los pórticos arriostrados.

En síntesis, puede anotarse lo siguiente:

1. La resistencia de columnas cargadas concéntricamente disminuye al aumentar la relación de esbeltez kl/r.
2. En columnas que están *arriostradas contra desplazamiento lateral* o que forman parte de pórticos arriostrados contra tales desplazamientos, la longitud efectiva kl, es decir, la distancia entre puntos de inflexión, está entre $l/2$ y l, según el grado de restricción en el extremo.
3. Las longitudes efectivas de columnas que *no estén arriostradas contra desplazamiento lateral* o que forman parte de pórticos no arriostrados contra ellos, siempre son mayores que l, tanto más cuanto menor sea la restricción en el extremo. En consecuencia, la carga de pandeo de un pórtico no arriostrado contra desplazamiento lateral será siempre sustancialmente menor que la del mismo pórtico arriostrado.

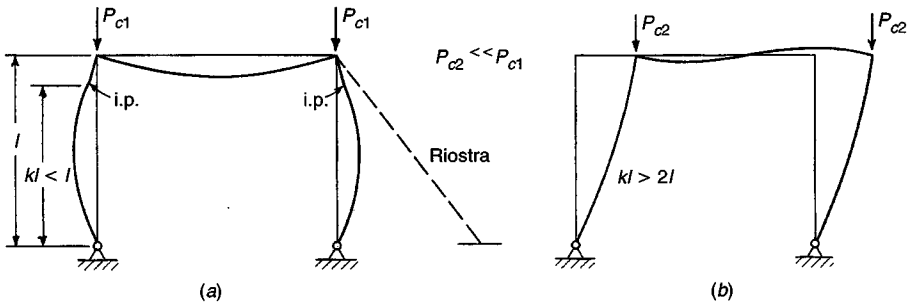


FIGURA 9.3
Pandeo de un pórtico rígido: (*a*) arriostrado lateralmente; (*b*) sin arriostramiento.

9.3 COMPRESIÓN MÁS FLEXIÓN

La mayor parte de elementos de concreto reforzado que se someten a compresión también están sujetos a flexión simultánea producida por cargas transversales o por momentos en los extremos ocasionados por continuidad. El comportamiento de elementos sometidos a estas combinaciones de carga también depende, en forma considerable, de su esbeltez.

La figura 9.4*a* presenta un elemento cargado axialmente con la carga P y sometido a flexión por momentos iguales en los extremos M_e. Si la carga axial no estuviera presente, el momento M_o en el elemento sería constante a lo largo de éste e igual al momento de los extremos M_e; esto se ilustra en la figura 9.4*b*. Para esta situación, es decir, flexión simple sin carga axial de compresión, el elemento se deflecta como se indica en la curva punteada de la figura 9.4*a*, donde y_o representa la deflexión en cualquier punto causada sólo por la flexión. Cuando se aplica la carga P, el momento en cualquier punto se incrementa en una cantidad igual a P veces su brazo de palanca. Los aumentos en los momentos producen deflexiones adicionales, de manera que la curva de deflexión bajo la acción simultánea de P y de M_o es la curva continua de la figura 9.4*a*. Entonces, en cualquier punto, el momento total ahora es

$$M = M_o + Py \tag{9.2}$$

es decir, el momento total consiste en el momento M_o que actúa en presencia de P y en el momento adicional producido por P, igual a P veces la deflexión lateral. Ésta es una ilustración del llamado efecto $P\Delta$.

En la figura 9.4*c* se presenta una situación similar donde la flexión es producida por la carga transversal H. Cuando la carga P está ausente, el momento en cualquier punto x es $M_o = Hx/2$, con un valor máximo en el centro de la luz igual a $Hl/4$. El diagrama correspondiente de M_o es el de la figura 9.4*d*. Cuando se aplica la carga P, de nuevo se producen momentos adicionales Py, distribui-

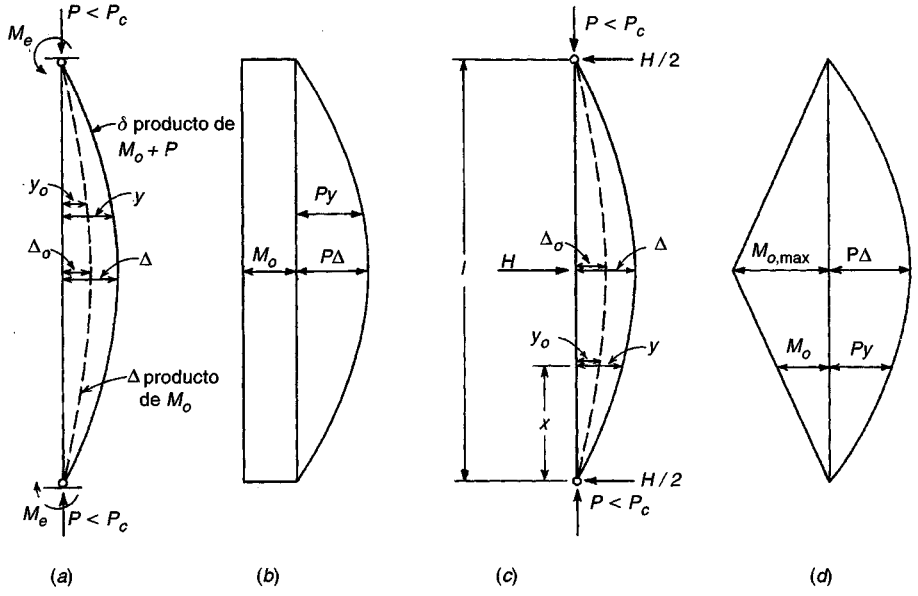


FIGURA 9.4
Momentos en elementos esbeltos que se someten a compresión más flexión, deflectados en curvatura simple.

dos como se muestra, y el momento total en cualquier punto del elemento consta de las mismas dos partes como en la ecuación (9.2).

Las deflexiones y de columnas elásticas del tipo expuesto en la figura 9.4 pueden calcularse con las deflexiones y_o, es decir, a partir de las deflexiones de la correspondiente viga sin carga axial, utilizando la siguiente expresión (ver por ejemplo, la referencia 9.1).

$$y = y_o \frac{1}{1 - P/P_c} \tag{9.3}$$

Sea Δ la deflexión en el punto de máximo momento $M_{\max}$, como en la figura 9.4. Entonces, de las ecuaciones (9.2) y (9.3):

$$M_{\max} = M_o + P\Delta = M_o + P\Delta_o \frac{1}{1 - P/P_c} \tag{9.4}$$

Es posible demostrar (ver la referencia 9.2) que la ecuación (9.4) puede formularse como

$$M_{\max} = M_o \frac{1 + \psi P/P_c}{1 - P/P_c} \tag{9.5}$$

donde ψ es un coeficiente que depende del tipo de carga y varía aproximadamente entre ± 0.20 para la mayor parte de los casos prácticos. Si se tiene en cuenta que P/P_c siempre es significativamente menor que 1, se observa que el segundo término en el numerador de la ecuación (9.5) resulta muy pequeño en comparación con 1. Despreciando este término, se obtiene una ecuación de diseño simplificada

$$M_{\max} = M_o \frac{1}{1 - P/P_c} \tag{9.6}$$

donde $1/(1 - P/P_c)$ se conoce como el *factor de amplificación de momento*, que refleja la cantidad mediante la cual el momento M_o se amplifica por la presencia de una fuerza axial P simultánea.

Puesto que P_c disminuye al aumentar la relación de esbeltez, se observa que a partir de la ecuación (9.6) el momento M en el elemento se incrementa con la relación de esbeltez kl/r. Dicha situación se ilustra en forma esquemática en la figura 9.5. Ésta indica que, para determinada carga transversal (es decir, para un valor dado de M_o), una fuerza axial P produce un momento adicional mayor en un elemento esbelto que en uno relativamente poco esbelto.

En los dos elementos de la figura 9.4, el mayor momento producido por P, llamado $P\Delta$ se adiciona directamente al valor máximo de M_o; por ejemplo,

$$M_o = \frac{Hl}{4}$$

en la figura 9.4*d*. A medida que la carga P aumenta, el momento máximo en el centro de la luz aumenta a una tasa mayor que la de la carga P de la manera determinada por las ecuaciones (9.2) y (9.6) e ilustrada en la figura 9.6. El elemento fallará cuando los valores simultáneos de P y M sean iguales a P_n y M_n, es decir, la resistencia última de la sección transversal en el sitio de máximo momento.

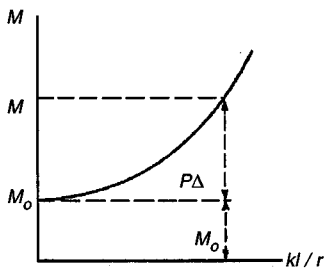


FIGURA 9.5
Efectos de la esbeltez sobre los momentos de las columnas.

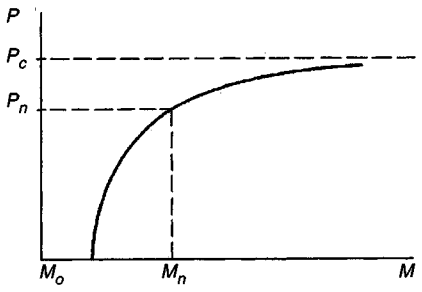


FIGURA 9.6
Efecto de la carga axial sobre los momentos de las columnas.

Esta adición directa del momento máximo producido por P con el momento máximo que genera la carga transversal (obviamente la situación más desfavorable), no se presenta para todos los casos de deformaciones. Por ejemplo, el elemento de la figura 9.7*a*, con momentos en los extremos iguales pero opuestos, tiene el diagrama de M_o señalado en la figura 9.7*b*. Las deflexiones producidas por sólo M_o, de nuevo se ven amplificadas cuando se aplica una carga axial P. En este caso, estas deflexiones bajo flexión y compresión simultáneas pueden aproximarse (según la referencia 9.1) por

$$y = y_o \frac{1}{1 - P/4P_c} \tag{9.7}$$

Si se compara con la ecuación (9.3), se observa que para este caso la amplificación en la deflexión es mucho menor.

Los momentos adicionales Py producidos por la carga axial se distribuyen como en la figura 9.7*c*. Aunque los momentos M_o son máximos en los extremos, los momentos Py son máximos a cierta distancia de los extremos. Dependiendo de sus magnitudes relativas, los momentos totales $M = M_o + Py$ se distribuyen como aparece en una de las figuras 9.7*d* o 9.7*e*. En el primer caso, el momento máximo continúa actuando en el extremo y es igual a M_e; la presencia de la fuerza axial no produce entonces ningún incremento en el momento máximo. Como alternativa, en el caso de la figura 9.7*e*, el momento máximo está localizado a cierta distancia del extremo; en este punto, M_o es significativamente menor que su valor máximo M_e, y por esta razón el momento adicionado Py genera un aumento en el momento máximo hasta un valor apenas un poco mayor que M_e.

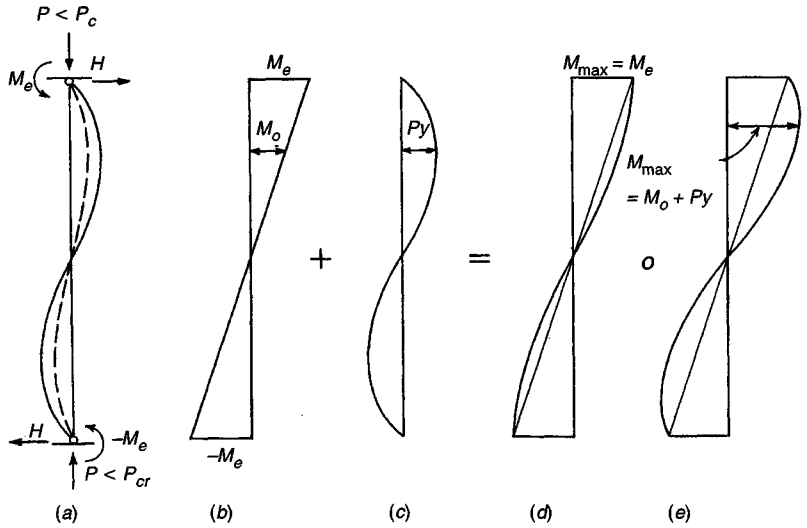


FIGURA 9.7
Momentos en elementos esbeltos sometidos a compresión más flexión, deflectados en curvatura doble.

Al comparar las figuras 9.4 y 9.7 se puede hacer la siguiente generalización: el momento M_o va a ser amplificado más fuertemente cuando el punto donde M_o es máximo coincide con aquél donde la deflexión y_o también es máxima. Esto es válido para elementos deflectados en curvatura simple por cargas simétricas o por momentos iguales en los extremos. Si los dos momentos en los extremos de la figura 9.4*a* son diferentes pero con el mismo signo, es decir, producen curvatura simple, el valor de M_o se amplificará aún en forma importante aunque no tanto como para el caso de momentos iguales en los extremos. De otra parte, como se hace evidente en la figura 9.7, posiblemente no se va a presentar amplificación o ésta será pequeña si los momentos en los extremos son de signos opuestos y producen un punto de inflexión a lo largo del elemento.

Puede demostrarse (ver la referencia 9.2) que la amplificación del momento depende de la magnitud relativa de los dos momentos en los extremos (como en las figuras 9.4*a* y 9.7) y que esta relación se expresa mediante una modificación de la ecuación (9.6):

$$M_{\max} = M_o \frac{C_m}{1 - P/P_c} \tag{9.8}$$

donde

$$C_m = 0.6 + 0.4\frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \tag{9.9}$$

Aquí M_1 y M_2 son los momentos de los extremos menor y mayor, respectivamente; entonces, por definición, $M_o = M_2$. La fracción M_1/M_2 se define como positiva si los momentos de los extremos producen curvatura simple, y negativa si producen curvatura doble. Se observa que cuando $M_1 = M_2$, como en la figura 9.4*a*, $C_m = 1$, de manera que la ecuación (9.8) se convierte en la ecuación (9.6), como debe ser. Es preciso observar que la ecuación (9.9) *es aplicable únicamente a elementos arriostrados contra desplazamiento lateral.* A partir del análisis que sigue, resultará claro que para elementos no arriostrados contra desplazamiento lateral se presenta por lo general la máxima amplificación del momento, es decir, $C_m = 1$.

Los elementos arriostrados contra desplazamiento lateral incluyen columnas que forman parte de estructuras en las cuales el desplazamiento lateral está impedido en una de estas formas: mediante muros suficientemente fuertes y rígidos en su propio plano, para evitar el desplazamiento horizontal; mediante arriostramientos especiales en planos verticales; en edificios, por el diseño del núcleo de servicios para resistir las cargas horizontales y proporcionar arriostramiento a los pórticos; o por arriostramiento del pórtico contra cualquier otro punto de apoyo esencialmente inmóvil.

Si no se suministra tal arriostramiento, *el desplazamiento lateral puede ocurrir únicamente para el pórtico completo en forma simultánea* y no para columnas individuales en el pórtico. Si éste es el caso, el efecto combinado de la flexión y de la carga axial es un poco diferente de aquél en columnas arriostradas. Como ilustración, considérese el pórtico sencillo de la figura 9.8*a* sometido a una carga horizontal H, por ejemplo una carga de viento, y a fuerzas de compresión P, como pueden ser

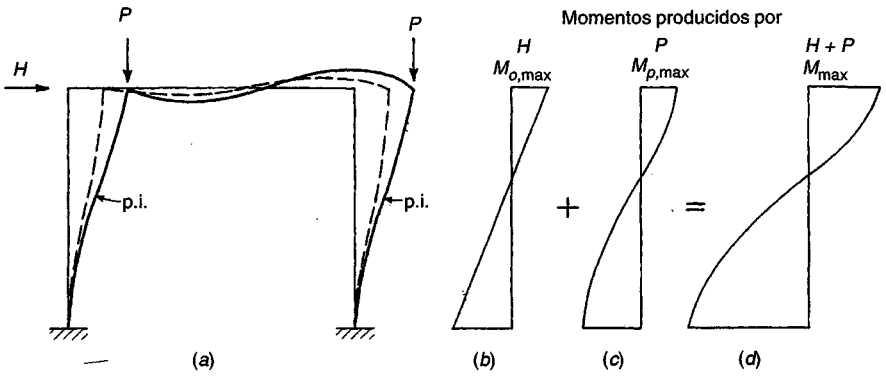


FIGURA 9.8
Pórtico empotrado y sin arriostramiento lateral.

las cargas gravitacionales. Los momentos M_o producidos por H sola, en ausencia de P, aparecen en la figura 9.8*b*; la deformación correspondiente del pórtico la determina la curva punteada. Una vez que se adiciona la carga P, se producen momentos horizontales adicionales que generan deformaciones amplificadas, señaladas mediante las curvas continuas y cuyo diagrama de momentos es el de la figura 9.8*c*. Se observa que los valores máximos de M_o, positivos y negativos, y los valores máximos de los momentos adicionales M_P del mismo signo, ocurren en el mismo sitio, de hecho, en los extremos de las columnas. Éstos son, por tanto, totalmente aditivos y producen una amplificación considerable en los momentos. En contraste, si el pórtico de la figura 9.8 está arriostrado lateralmente y se aplica carga vertical, la figura 9.9 muestra que los valores máximos de los dos momentos ocurren en sitios diferentes; la amplificación de los momentos, si es que ocurre, es por consiguiente mucho menor como lo expresa de manera correcta el valor de C_m.

Debe observarse que los momentos que producen el desplazamiento lateral del pórtico no necesariamente son originados por cargas horizontales como en la figura 9.8. Las asimetrías, bien sea en la configuración del pórtico o en las cargas verticales o en ambas, también ocasionan desplazamientos laterales. En este caso la presencia de cargas axiales en las columnas produce la misma deflexión y amplificación de momentos que antes.

En resumen, puede afirmarse lo siguiente:

1. En elementos a flexión, la aplicación de compresión axial produce deflexiones y momentos adicionales Py. Mientras las otras variables permanezcan iguales, los momentos adicionales aumentan con incrementos en la relación de esbeltez kl/r.
2. En *elementos arriostrados contra desplazamiento lateral* y deflectados en curvatura sencilla, los máximos de ambos tipos de momentos, M_o y Py, ocurren en el mismo lugar o en sitios muy cercanos y se suman totalmente; esto acarrea grandes amplificaciones en los momentos. Si los momentos M_o producen curvatura doble (es decir, se presenta un punto de inflexión), lo opuesto es cierto y ocurre muy poca o ninguna amplificación del momento.
3. En *elementos de pórticos no arriostrados contra desplazamiento lateral*, los momentos máximos de ambas clases, M_o y Py, ocurren casi siempre en los mismos sitios: los extremos de las columnas. Éstos se adicionan en forma total, independientemente de la presencia o ausencia de un punto de inflexión. Aquí también, mientras las otras variables permanezcan iguales, las deflexiones adicionales y los momentos correspondientes aumentan con el incremento de kl/r.

Este análisis es una presentación simplificada de un tema bastante complejo. Las disposiciones del Código ACI relacionadas con columnas esbeltas se basan en el comportamiento y en las ecuaciones correspondientes que se expusieron con anterioridad. Éstas tienen en cuenta, de manera aproximada, las complejidades adicionales que surgen del hecho de que el concreto no es un

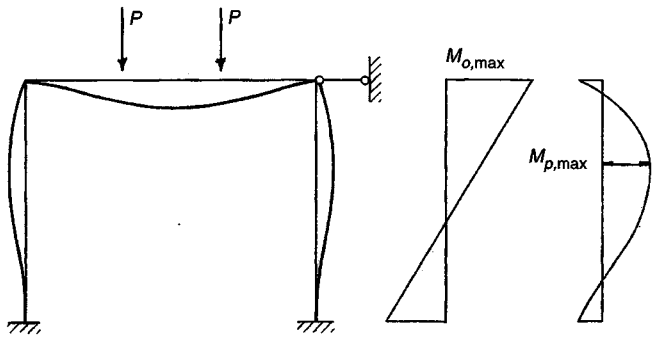


FIGURA 9.9
Pórtico empotrado y arriostrado lateralmente.

material elástico, que el agrietamiento a tensión produce cambios en el momento de inercia del elemento y que bajo carga sostenida el flujo plástico aumenta las deflexiones a corto plazo y, en consecuencia, los momentos causados por estas deflexiones.

9.4 CRITERIOS DEL CÓDIGO ACI PARA NO TENER EN CUENTA LOS EFECTOS DE ESBELTEZ

El procedimiento para diseñar columnas esbeltas resulta inevitablemente muy extenso en particular porque incluye un proceso de ensayo y error. Al mismo tiempo, estudios realizados sobre estructuras existentes demuestran que la mayor parte de las columnas en los edificios reales son suficientemente robustas, de manera que los efectos de esbeltez reducen su capacidad apenas en un pequeño porcentaje. Como se explicó en el capítulo 8, un estudio llevado a cabo por el ACI y la ASCE indica que el 90 por ciento de las columnas arriostradas contra desplazamiento lateral, y el 40 por ciento de las no arriostradas, podrían diseñarse como columnas cortas, es decir, serían capaces de desarrollar esencialmente toda la capacidad de la sección transversal con una muy pequeña o ninguna reducción por los efectos de esbeltez (ver la referencia 9.3). Asimismo, el arriostramiento lateral lo proveen muros de cortante, núcleos de ascensores, escaleras u otros elementos para los cuales la resistencia a las deflexiones laterales es mucho mayor que la de las columnas en un pórtico de edificio. Es posible sintetizar que los efectos de esbeltez pueden ignorarse en la mayor parte de los casos de edificios de concreto reforzado.

Para permitirle al diseñador prescindir de los análisis complicados que se requieren para el diseño de columnas esbeltas en casos corrientes, el Código ACI 10.12.2 y 10.13.2 establece límites de esbeltez, por debajo de los cuales los efectos de esbeltez no son significativos y pueden despreciarse. Estos límites se ajustan para que generen una reducción máxima no prevista en la capacidad de la columna de no más del cinco por ciento. Se aplican límites independientes para pórticos arriostrados y no arriostrados, referidos en el Código ACI en forma alternativa como pórticos *sin y con desplazamiento lateral,* respectivamente. Las disposiciones del Código son las siguientes:

1. Para elementos a compresión en pórticos arriostrados contra desplazamiento lateral, los efectos de esbeltez pueden despreciarse cuando $kl_u/r \leq 34 - 12M_1/M_2$, donde M_1/M_2 no debe tomarse menor que –0.5.
2. Para elementos a compresión no arriostrados contra desplazamientos laterales, los efectos de esbeltez pueden despreciarse cuando kl_u/r sea menor que 22.

En estos requisitos, k es el factor de longitud efectiva (ver la sección 9.2); l_u es la longitud no soportada que se toma como la distancia libre entre losas de entrepisos, vigas u otros elementos que proporcionan soporte lateral; M_1 es el menor de los momentos extremos mayorados en el elemento a compresión, positivo si el elemento se deflecta en curvatura simple y negativo si se deflecta en curvatura doble; y M_2 es el mayor de los momentos extremos mayorados en el elemento a compresión, siempre positivo.

El radio de giro r para columnas rectangulares puede tomarse igual a $0.30h$, donde h es la dimensión total de la sección transversal en dirección en la cual se está considerando la estabilidad. Para elementos circulares, puede tomarse como 0.25 veces el diámetro. Para otras formas, r se calcula para la sección bruta de concreto.

De acuerdo con el Código ACI 10.12.1, para pórticos sin desplazamiento horizontal el valor de k debe tomarse como 1.0, a menos que se justifique un valor inferior mediante análisis. Para pórticos con desplazamiento horizontal, de acuerdo con el Código ACI 10.13.1, el valor de k debe determinarse mediante análisis en todos los casos. Los criterios del Código ACI para determinar k tanto para columnas arriostradas como para no arriostradas se presentan en la sección 9.6

9.5 CRITERIOS DEL CÓDIGO ACI PARA DEFINICIÓN DE PÓRTICOS ARRIOSTRADOS *VERSUS* NO ARRIOSTRADOS

A partir del análisis de la sección 9.3 resulta claro que existen importantes diferencias entre el comportamiento de las columnas esbeltas en pórticos arriostrados (sin desplazamiento lateral) y el de las columnas correspondientes en pórticos no arriostrados (con desplazamiento lateral). Las disposiciones del Código ACI y los lineamientos que determina el comentario para el diseño aproximado de columnas esbeltas reflejan este hecho y en cada uno de ellos se presentan disposiciones separadas, relacionadas con los parámetros más importantes para pórticos arriostrados *versus* no arriostrados, que incluyen los factores de amplificación de momentos y los de longitud efectiva.

En las estructuras reales es raro que un pórtico esté completamente arriostrado o no arriostrado. Es necesario determinar de manera anticipada si el arriostramiento que suministran los muros de cortante, los núcleos de ascensores y servicios, las escaleras u otros elementos, es adecuado para darle rigidez al pórtico contra desplazamientos laterales significativos. Tanto el Código ACI como el comentario ofrecen algunas guías a este respecto.

Tal como lo sugiere el comentario del ACI 10.11.4, un elemento a compresión puede suponerse como arriostrado cuando está localizado en un piso en el cual los elementos que proporcionan arriostramiento (muros de corte, etc.) tienen una rigidez suficiente para limitar la deflexión lateral hasta el punto en que la resistencia de la columna no se vea afectada en forma sustancial; esta determinación puede realizarse normalmente mediante inspección. Si no es así, el Código ACI 10.11.4 proporciona dos criterios alternativos para determinar si las columnas y los pisos se consideran como arriostrados o no arriostrados.

El primer criterio exige que para considerar una columna como arriostrada o sin desplazamiento lateral, el aumento en el momento en el extremo de la columna por efectos de segundo orden, no debe exceder el cinco por ciento de los momentos en los extremos de primer orden. El diseñador está en libertad de seleccionar el método para dicha determinación.

Como alternativa, el Código permite considerar un piso como arriostrado cuando el *índice de estabilidad*

$$Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_o}{V_u l_c} \tag{9.10}$$

para un piso no es mayor que 0.05, donde ΣP_u y V_u son la carga vertical mayorada total y el cortante total del piso, respectivamente; Δ_o es la deflexión relativa de primer orden entre la parte superior e inferior del piso causada por V_u; y l_c es la longitud del elemento a compresión medida centro a centro entre los nudos del pórtico. El comentario del ACI 10.11.4 ofrece una guía referente a que ΣP_u debe basarse en la carga lateral que maximiza los valores de ΣP_u; el caso de $V_u = 0$ no se incluye. En la mayoría de los casos, este cálculo involucra las combinaciones de factores de carga de la tabla 1.2 en las primeras ecuaciones que aparecen para viento, sismo o presión de tierra (por ejemplo, $0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W)$.

Tal como se demuestra en las referencias 9.3 y 9.4, para valores de Q inferiores a 0.6, el índice de estabilidad se aproxima a la relación P/P_c utilizada en los cálculos de los factores de amplificación de momentos, de manera que $1/(1 - P/P_c)$ puede remplazarse por $1/(1 - Q)$. De esta manera, para $Q = 0.05$, $M_{\max} \approx 1.05 M_o$†.

† La equivalencia cercana de y Q a P/P_{cr} para columnas de concreto reforzado puede demostrarse mediante una columna con desplazamiento horizontal en uno de los extremos y con extremos restringidos a la rotación, como se presenta en la figura 9.1*e*. Para esta columna, $Q = P_u \Delta_o / V_u l_c$. Dado que V_u/Δ_o = la rigidez lateral de la columna $12EI/l_c^3$, el índice de estabilidad puede expresarse como $Q = P_u/(12EI/l_u^2)$. Para una longitud no soportada de la columna (la longitud utilizada para calcular P_c) $l_u = 0.9l_c$ y $P = P_w$ $Q = P_u/(9.72\,EI/l_u^2)$ que se compara con $P/P_c = P_u/(\pi^2 EI/l_u^2) = P_u/(9.87EI/l_u^2)$.

De acuerdo con el Código ACI 10.11.1, las propiedades de las secciones de los elementos del pórtico utilizadas para calcular Q deben tener en cuenta los efectos de las cargas axiales, las zonas fisuradas a lo largo del elemento y la duración de las cargas. Como alternativa, las propiedades de la sección pueden representarse utilizando el módulo de elasticidad E_c dado en la ecuación (2.3) y las siguientes propiedades de las secciones:

Momentos de inercia

Vigas	$0.35\,I_g$
Columnas	$0.70\,I_g$
Muros no fisurados	$0.70\,I_g$
Muros fisurados	$0.35\,I_g$
Losas planas y placas planas	$0.25\,I_g$
Área	$1.0\,A_g$

Los momentos de inercia deben dividirse por $(1 + \beta_d)$ cuando actúan cargas laterales sostenidas o en los casos de verificación de estabilidad (según Código ACI 10.13.6, descrito en la sección 9.7).

donde I_g y A_g se calculan con base en la sección bruta de concreto, despreciando el refuerzo, y el valor de β_d para el cálculo de Δ_o en la ecuación (9.10) es la relación entre el cortante sostenido mayorado máximo dentro de un piso y el cortante mayorado total en ese piso, para considerar los efectos del flujo plástico. Como se establece en la sección 11.5, el valor de I_g para vigas T puede estimarse como dos veces el valor de I_g para el alma. Los valores reducidos de I dados anteriormente están diseñados para tener en cuenta el efecto del comportamiento no lineal del material en la rigidez efectiva del elemento. La referencia 9.3 demuestra que los valores del Código para el momento de inercia subestiman los momentos de inercia verdaderos y sobreestiman de manera conservadora los efectos de segundo orden entre el 20 y el 25 por ciento para pórticos de concreto reforzado.

9.6 MÉTODO DE AMPLIFICACIÓN DE MOMENTO DEL CÓDIGO ACI PARA PÓRTICOS NO ARRIOSTRADOS

Una columna esbelta de concreto reforzado alcanza el límite de su resistencia cuando la combinación de P y M en la sección sometida al máximo esfuerzo produce la falla de la sección. En general, P es constante en la longitud del elemento. Esto significa que la columna se aproxima a la falla cuando, en la sección sometida al mayor esfuerzo, la fuerza axial P se combina con un momento $M = M_{max}$, determinado mediante la ecuación (9.8), de tal manera que esta combinación llega a ser igual a P_n y M_n, valores que van a producir la falla de la sección. Esto se puede visualizar fácilmente en la figura 9.10.

Para una columna con determinada sección transversal, la figura 9.10 presenta una curva típica de interacción. Para simplificar, suponga que la columna se deflecta en curvatura simple con excentricidades iguales en los dos extremos. Para esta excentricidad, la resistencia de la sección transversal la determina el punto A en la curva de interacción. Si la columna es suficientemente robusta de modo que la amplificación del momento es muy pequeña y, por tanto, despreciable, entonces $P_{n,\,\text{robusta}}$ en el punto A representa la resistencia de la columna bajo la acción simultánea del momento $M_{n,\,\text{robusta}} = e_o P_{n,\,\text{robusta}}$.

Por otro lado, si la misma columna es lo suficientemente esbelta, se producirá una amplificación significativa del momento a medida que se incrementa la carga P. Entonces, el momento en la

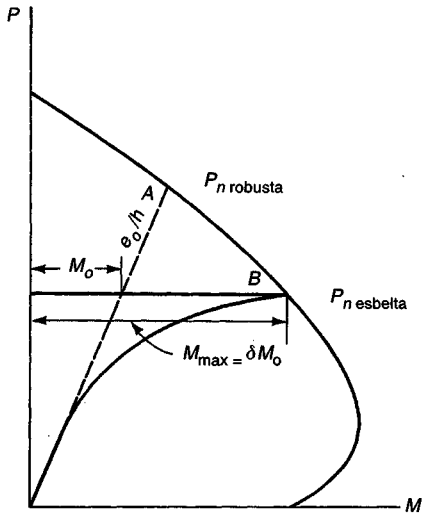


FIGURA 9.10
Efecto de la esbeltez en la capacidad de carga.

sección sometida al mayor esfuerzo es M_{max}, determinado con la ecuación (9.8), con $C_m = 1$ puesto que las excentricidades en los extremos son iguales. La curva continua de la figura 9.10 presenta un incremento no lineal de M_{max} a medida que P aumenta. El punto donde esta curva intercepta la curva de interacción, es decir el punto B, define la resistencia del elemento $P_{n,\text{esbelta}}$ de la columna esbelta, en combinación con los momentos en los extremos aplicados de manera simultánea $M_o = e_o P_{n,\text{esbelta}}$. Si los momentos de los extremos son diferentes, debe incluirse el factor C_m como se observó en la sección 9.3.

El Código ACI 10.11.1 especifica que las cargas axiales y los momentos en los extremos de columnas pueden determinarse mediante un análisis convencional elástico de los pórticos (ver el capítulo 11), utilizando las propiedades de la sección transversal dadas en la sección 9.5. El elemento se diseña entonces para la combinación de esta carga axial y el momento en la columna amplificado.

Para un pórtico arriostrado contra desplazamiento lateral, la ecuación del Código ACI para la amplificación del momento que actúa en forma simultánea con la carga axial mayorada P_u, puede formularse de la siguiente manera:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \tag{9.11}$$

donde el factor de amplificación del momento es

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u/0.75P_c} \geq 1 \tag{9.12}$$

En las ecuaciones (9.11) y (9.12) el subíndice *ns* indica un pórtico arriostrado. El término 0.75 en la ecuación 9.12 es el *factor de reducción de resistencia*, diseñado para proporcionar un estimativo conservador de P_c.

De acuerdo con la ecuación 9.1, la carga crítica P_c está dada por

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \tag{9.13}$$

donde l_u se define como la longitud no soportada del elemento a compresión. El valor de k en la ecuación 9.13 debe ser igual a 1.0 a menos que se calcule utilizando los valores de E_c e I dados en la sección 9.5 y los procedimientos que se describen más adelante en esta sección.

En la ecuación (9.12) el valor de C_m está dado, como antes, por la ecuación (9.9):

$$C_m = 0.6 + 0.4\frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \tag{9.9}$$

para elementos arriostrados contra desplazamiento lateral y sin cargas transversales entre apoyos. Aquí M_2 es el mayor de los dos momentos de los extremos y M_1/M_2, es positivo cuando los momentos en los extremos generan curvatura simple y negativo cuando la generan doble. La variación de C_m con M_1/M_2 se presenta en la figura 9.11. En la ecuación (9.12), un valor calculado de δ_{ns} menor que 1 indica que el mayor de los dos momentos en los extremos, M_2, es el momento más grande en la columna, situación que se describe en la figura 9.7*d*.

De esta manera, el Código ACI tiene en cuenta los efectos de la esbeltez en la reducción de la capacidad de pórticos arriostrados mediante el factor de amplificación de momentos δ_{ns}. Sin embargo, se sabe muy bien que para columnas sin momentos aplicados o con momentos muy pequeños, es decir, columnas cargadas axial o casi axialmente, un aumento en la esbeltez también disminuye su resistencia. Para esta situación, el Código ACI 10.12.3.2 establece que el momento mayorado M_2 en la ecuación 9.11 no debe tomarse menor que

$$M_{2,\min} = P_u(0.6 + 0.03h) \tag{9.14}$$

alrededor de cada eje por separado, donde 0.6 y h están en pulgadas. Para elementos en los cuales $M_{2,\min}$ es superior a M_2, el valor de C_m en la ecuación 9.9 debe tomarse igual a 1.0 o debe calcularse con base en la relación de los momentos en los extremos calculados M_1 y M_2.

La rigidez EI utilizada en la ecuación 9.13 para calcular P_c para un elemento aislado, debe ser tanto precisa como razonablemente conservadora para considerar la mayor variabilidad inherente en las propiedades de columnas aisladas, en comparación con las propiedades del pórtico de concreto reforzado como un todo. Los valores de EI dados en la sección 9.5 son adecuados para análisis general de pórticos pero no para determinar el valor de P_c para columnas aisladas.

En elementos elásticos homogéneos, como las columnas de acero, la rigidez EI se obtiene fácilmente del módulo de Young y del momento de inercia corriente. Sin embargo, las columnas de concreto reforzado no son homogéneas puesto que constan de acero y de concreto. Mientras que el acero es básicamente elástico, el concreto no lo es y, además, está sometido a flujo plástico y a agrietamiento cuando ocurre tensión en el lado convexo de la columna. Todos estos factores afectan la rigidez efectiva EI de un elemento de concreto reforzado. Es posible, mediante métodos de computador, calcular rigideces efectivas bastante realistas teniendo en cuenta todos estos factores; estos cálculos todavía no son más precisos que las premisas en que se fundamentan. Con base en estudios elaborados, tanto analíticos como experimentales (ver la referencia 9.5), el Código ACI permite determinar el valor de EI mediante

$$EI = \frac{0.2E_cI_g + E_sI_{se}}{1 + \beta_d} \tag{9.15}$$

o con una expresión más sencilla

$$EI = \frac{0.4E_cI_g}{1 + \beta_d} \tag{9.16}$$

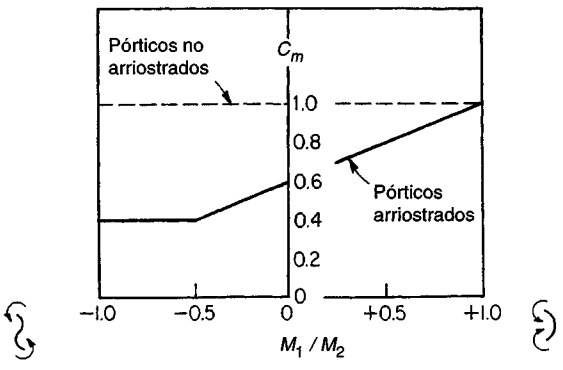


FIGURA 9.11
Valores de C_m para columnas esbeltas en pórticos arriostrados y no arriostrados.

donde E_c = módulo de elasticidad del concreto, lb/pulg^2
I_g = momento de inercia de la sección bruta de la columna, pulg^4
I_{se} = momento de inercia del refuerzo con respecto al eje centroidal de la sección transversal del elemento, pulg^4
E_s = módulo de elasticidad del acero = 29,000,000 lb/pulg^2
β_d = relación entre la carga muerta axial mayorada máxima y la carga total axial mayorada máxima (esta definición es diferente de la usada en la sección 9.5 para calcular Δ_o).

El factor β_d tiene en cuenta, aproximadamente, los efectos del flujo plástico. Es decir, en cuanto mayores sean las cargas muertas sostenidas, mayores serán las deformaciones por flujo plástico y sus respectivas curvaturas. En consecuencia, en cuanto mayores sean las cargas sostenidas con relación a las cargas temporales, menor será la rigidez efectiva, así como lo reflejan en forma correcta las ecuaciones (9.15) y (9.16). Sin embargo, de los dos materiales, sólo el concreto está sometido a flujo plástico, lo que no sucede con el acero de refuerzo en la forma como se utiliza regularmente, por lo cual puede argumentarse que el parámetro de flujo plástico $1 + \beta_d$ debería aplicarse solamente al término $0.2E_cI_g$ de la ecuación 9.15. Sin embargo, como se explica en el comentario del ACI 10.12.3, el parámetro de flujo plástico se aplica a los dos términos debido a la posibilidad de fluencia prematura del acero de las columnas bajo carga sostenida.

Tanto la ecuación (9.15) como la (9.16) son límites inferiores conservadores para una gran cantidad de elementos reales investigados (ver la referencia 9.3). La ecuación (9.16), más simple pero más conservadora, no es irracional para elementos con poco refuerzo, pero subestima en forma considerable el efecto del refuerzo para elementos con mayor cantidad del mismo, es decir, para el rango de valores altos de ρ. La ecuación (9.15) es más confiable para el intervalo completo de valores de ρ y en definitiva es preferible para valores medios y altos de ρ (ver la referencia 9.6).

Es esencial una determinación precisa del factor k de longitud efectiva en relación con las ecuaciones (9.11) y (9.13). En la sección 9.2 se demostró que para pórticos arriostrados contra desplazamiento lateral, k varía de $\frac{1}{2}$ hasta 1, mientras que para pórticos no arriostrados lateralmente, varía de 1 a ∞ según el grado de restricción rotacional en los dos extremos; esto se ilustró en la figura 9.1. Para pórticos rígidos se conoce que este grado de restricción rotacional depende de si las rigideces de las vigas que llegan a la columna en la parte superior y en la inferior son grandes o pequeñas en comparación con la rigidez de la columna misma. Una forma aproximada pero en general satisfactoria para determinar k es mediante *nomogramas*, que se basan en el aislamiento de la columna determinada, con todos los elementos que le llegan en las partes superior e inferior, así como aparece en la figura 9.12. El grado de restricción en cada uno de los extremos lo determina $\psi = \Sigma(EI/l$ de las columnas$) \div \Sigma(EI/l$ de los elementos de piso$)$. Sólo deben incluirse los elementos del piso que están en un plano en cualquiera de los extremos de la columna. Así, el valor de k puede leerse directamente de los nomogramas de la figura 9.13, como lo ilustran las líneas punteadas†.

Observe que el valor de k debe conocerse antes de estimar las dimensiones de las columnas del pórtico. Aun así, k depende de la rigidez EI/l tanto de los elementos que deben dimensionarse como de los elementos de restricción. Así que, el proceso de definir dimensiones incluye necesariamente iteraciones; es decir, se deben suponer los tamaños de los elementos, calcular las rigideces y los correspondientes valores de k, y después, con base en estos valores de k, calcular con mayor precisión, hasta que las dimensiones de los elementos supuestos y finales coincidan o sean satisfactoriamente próximas. La rigidez EI/l debe calcularse con base en los valores de E_c e I dados en la sección 9.5, y las longitudes de la luz de los elementos, l_c, deben medirse centro a centro de los nudos.

† Alternativamente a la utilización de los nomogramas, existen ecuaciones para la determinación de los factores k de longitud efectiva, que se desarrollan en las referencias 9.7, 9.8 y 9.9, y se presentan en el comentario del Código ACI 10.12.1. La referencia 9.10 presenta expresiones aún más precisas para k. Las ecuaciones son más convenientes en el desarrollo de soluciones por computador.

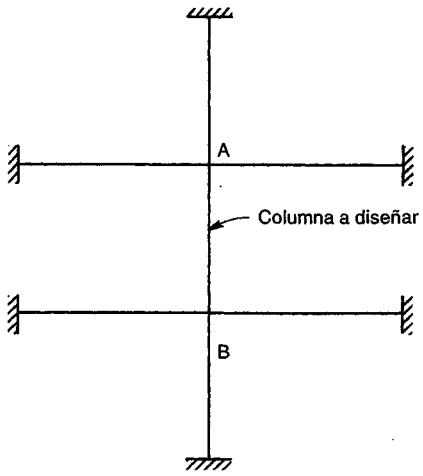
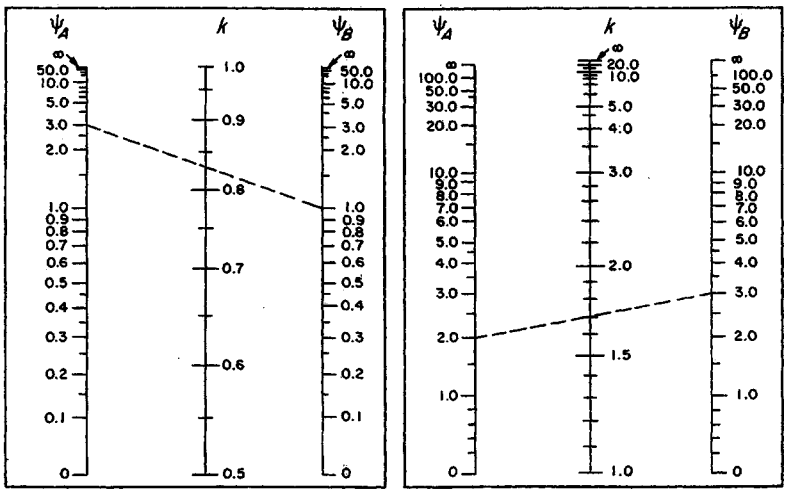


FIGURA 9.12
Sección de un pórtico rígido que incluye la columna a diseñar.



(*a*) Pórticos arriostrados (*b*) Pórticos no arriostrados

FIGURA 9.13
Nomogramas para calcular los factores de longitud efectiva k.

Entonces, la secuencia general de diseño para columnas esbeltas es necesariamente un procedimiento iterativo porque las dimensiones del elemento y el refuerzo, desconocidas en principio, afectan los parámetros clave como el momento de inercia, los factores de longitud efectiva y las cargas críticas de pandeo. Un esquema de los diferentes pasos en el procedimiento de análisis y diseño para pórticos arriostrados seguirá los siguientes lineamientos:

1. Se seleccionan las dimensiones tentativas de una columna que vaya a soportar la carga mayorada P_u y el momento $M_u = M_2$, a partir del análisis elástico de primer orden del pórtico, suponiendo un comportamiento de columna corta y según los procedimientos del capítulo 8.
2. Se determina si el pórtico se considera arriostrado o no, según el criterio de la sección 9.5.
3. Se encuentra la longitud no soportada l_u.
4. Para la columna tentativa, se verifica si se pueden ignorar los efectos de esbeltez según el criterio de la sección 9.4 con un valor estimado de $k = 1.0$.
5. Si se encuentra tentativamente que la esbeltez es importante, se refinan los cálculos de k con base en los nomogramas de la figura 9.13*a*, teniendo en cuenta las rigideces de los elementos

EI/l (ver la sección 9.5) y los factores de restricción ψ con base en las dimensiones tentativas de los elementos. Se verifican de nuevo los criterios de esbeltez.

6. Si los momentos obtenidos en el análisis del pórtico son pequeños, se verifica si los momentos mínimos a partir de la ecuación 9.14 controlan el diseño.
7. Se calcula el factor para momento uniforme equivalente C_m a partir de la ecuación (9.9).
8. Se calcula β_d, EI a partir de la ecuación (9.15) o la (9.16) y P_c de la ecuación (9.13) para la columna tentativa.
9. Se calcula el factor de amplificación de momentos δ_{ns} con la ecuación (9.12) y el momento amplificado M_c a partir de la ecuación (9.11).
10. Se verifica si la columna es adecuada para resistir la carga axial y el momento amplificado, utilizando los gráficos de diseño de columnas del apéndice A del modo usual. Si es necesario se modifica la sección de la columna y el refuerzo.
11. Si las dimensiones de las columnas se modifican, se repiten los cálculos para k, ψ y P_c con base en la nueva sección transversal. Se determina el factor revisado de amplificación de momentos y se verifica la conveniencia del nuevo diseño.

Ejemplo 9.1. Diseño de una columna esbelta en un pórtico arriostrado. La figura 9.14 presenta una vista en elevación del pórtico de un edificio de concreto de varios pisos, con vigas de 48 pulg de ancho y 12 pulg de altura, en todas las líneas de columna que sostienen losas de entrepiso y de cubierta en dos direcciones. La altura libre de las columnas es de 13 pies. Las columnas interiores se han predimensionado tentativamente de 18 × 18 pulg y las exteriores de 16 × 16 pulg. El pórtico está arriostrado efectivamente contra desplazamiento lateral mediante los núcleos de escaleras y de ascensores, que incluyen muros de concreto monolíticos con los entrepisos, localizados en las esquinas del edificio (no aparecen en la figura). La estructura se va a someter a cargas verticales muertas y vivas. Los cálculos tentativos y adelantados mediante análisis de primer orden indican que la distribución de cargas vivas de la figura 9.14, si se tiene en cuenta una distribución completa de la carga en la cubierta y en los pisos superiores, y con una distribución en forma de tablero de ajedrez en la zona adyacente a la columna *C*3, produce los máximos momentos con curvatura simple en esta columna y casi la máxima carga axial. Las cargas muertas actúan sobre todas las luces. Los valores de cargas de servicio para las fuerzas axiales y los momentos causados por las cargas muertas y vivas para la columna interior típica *C*3 son los siguientes:

Carga muerta	*Carga viva*
P = 230 klb	P = 173 klb
M_2 = 2 klb-pie	M_2 = 108 klb-pie
M_1 = –2 klb-pie	M_1 = 100 klb-pie

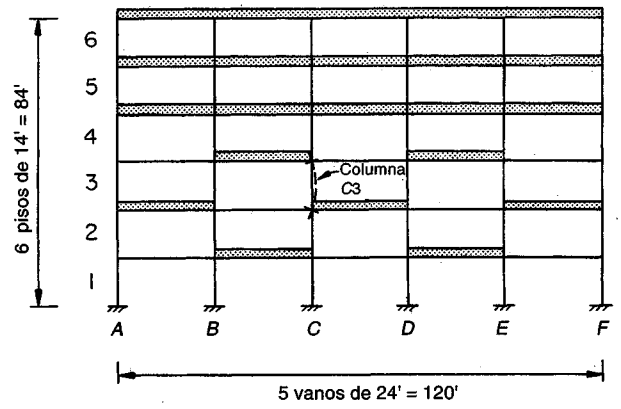


FIGURA 9.14
Pórtico de concreto del edificio del ejemplo 9.1.

La columna queda sometida a curvatura doble cuando actúa la carga muerta sola y a curvatura simple cuando actúa la carga viva.

Diseñe la columna *C*3 según el método de amplificación de momentos del Código ACI. Utilice $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

Solución. Inicialmente se diseña la columna como corta, ignorando los efectos de esbeltez. Se aplican los coeficientes usuales de carga

$$P_u = 1.4 \times 230 + 1.7 \times 173 = 616 \text{ klb}$$
$$M_u = 1.4 \times 2 + 1.7 \times 108 = 186 \text{ klb-pie}$$

Para una columna de 18 × 18 pulg, con una distancia libre de 1.5 pulg hasta el acero exterior, con estribos No. 3 y con acero longitudinal No. 10 (supuesto):

$$\gamma = (18.00 - 2 \times 1.50 - 2 \times 0.38 - 1.27)/18 = 0.72$$

Se utilizará el gráfico A.7 para $\gamma = 0.75$, con barras distribuidas alrededor del perímetro de la columna. Entonces,

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{616}{324} = 1.90 \text{ klb/pulg}^2$$
$$\frac{M_u}{A_g h} = \frac{186 \times 12}{324 \times 18} = 0.38 \text{ klb/pulg}^2$$

y a partir del gráfico, $\rho_g = 0.02$. Este valor es suficientemente bajo para permitir un incremento en el área de acero si se hace necesario al tener en cuenta los efectos de esbeltez y, de esta manera, se mantienen las dimensiones del concreto de 18 × 18 pulg.

Para una revisión inicial de la esbeltez, se utiliza un valor estimado del factor $k = 1.0$ de longitud efectiva. Entonces,

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.0 \times 13 \times 12}{0.3 \times 18} = 28.9$$

Para un pórtico arriostrado, el límite superior de comportamiento para una columna corta es

$$34 - 12\frac{M_1}{M_2} = 34 - 12\,\frac{1.4 \times (-2) + 1.7 \times 100}{1.4 \times 2 + 1.7 \times 108} = 23.3$$

El valor calculado de 28.9 lo excede, de modo que la esbeltez debe incluirse en el diseño. Se requiere entonces un cálculo más refinado del factor k de longitud efectiva.

Puesto que E_c es el mismo para las columnas y para las vigas, se cancela en los cálculos de rigidez. En este paso, el momento de inercia de la columna es $0.7I_g = 0.7 \times 18 \times 18^3/12 = 6124$ pulg^4, obteniéndose $I/l_c = 6124/(14 \times 12) = 36.5$ pulg^3. Para las vigas, el momento de inercia se toma como $0.35I_g$, donde I_g es dos veces el momento de inercia bruto del alma. Entonces, $0.35I_g = 0.35 \times 2 \times 48 \times 12^3/12 = 4838$ pulg^4 e $I/l_c = 4838/(24 \times 12) = 16.8$ pulg^3. Los factores de restricción rotacional en la parte superior e inferior de la columna *C*3 son los mismos y resultan iguales a

$$\psi_a = \psi_b = \frac{36.5 + 36.5}{16.8 + 16.8} = 2.17$$

A partir de la figura 9.13*a* para los pórticos arriostrados, el valor de k es 0.87 en vez de 1.0 como se utilizó previamente. En consecuencia,

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{0.87 \times 13 \times 12}{0.3 \times 18} = 25.1$$

Este valor está aún por encima del valor límite de 23.3, confirmando que deben tenerse en cuenta los efectos de esbeltez.

En seguida se realiza una revisión del momento mínimo. De acuerdo con la ecuación (9.14), $M_{2,\min} = 616 \times (0.6 + 0.03 \times 18)/12 = 58$ klb-pie. Se observa que este valor no controla.

El coeficiente C_m ahora puede encontrarse a partir de la ecuación (9.9) con $M_1 = 1.4 \times (-2) + 1.7 \times 100 = 167$ klb-pie y $M_2 = 1.4 \times 2 + 1.7 \times 108 = 186$ klb-pie:

$$C_m = 0.6 + 0.4\frac{167}{186} = 0.96$$

Después se determina el factor β_d con base en la relación de las cargas axiales muerta y total, ambas mayoradas:

$$\beta_d = \frac{1.4 \times 230}{1.4 \times 230 + 1.7 \times 173} = 0.52$$

Para una cuantía relativamente baja de acero en una columna, que se estima en el intervalo de 0.02 a 0.03, se utiliza la ecuación (9.16), más precisa para el cálculo de EI, y

$$EI = \frac{0.4 \times 3.60 \times 10^6 \times 18 \times 18^3/12}{(1 + 0.52)} = 8.29 \times 10^9 \text{ lb-pulg}^2$$

La carga crítica de pandeo se encuentra con la ecuación (9.13) y es igual a

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 8.29 \times 10^9}{(0.87 \times 13 \times 12)^2} = 4.44 \times 10^6 \text{ lb}$$

El factor de amplificación de momentos se determina a partir de la ecuación (9.12).

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u/0.75P_c} = \frac{0.96}{1 - 616/0.75 \times 4440} = 1.18$$

Así, la resistencia axial requerida para la columna es P_u = 616 klb (como antes) y el momento de diseño amplificado es $M_c = \delta_{ns}M_2 = 1.18 \times 186 = 219$ klb-pie. De nuevo con referencia a la gráfica de diseño de columnas A.7, con

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{616}{324} = 1.90 \text{ klb/pulg}^2$$

$$\frac{M_u}{A_g h} = \frac{219 \times 12}{324 \times 18} = 0.45 \text{ klb/pulg}^2$$

se observa que la cuantía de acero requerida se incrementa desde 0.020 hasta 0.026 a causa de los efectos de esbeltez. El área de acero que se requiere ahora es igual a

$$A_{st} = 0.026 \times 324 = 8.42 \text{ pulg}^2$$

que puede suministrarse adecuadamente con cuatro barras No. 10 y cuatro barras No. 9 (A_{st} = 9.06 pulg^2), distribuidas como aparecen en la figura 9.15. Se utilizarán flejes No. 3 con un espaciamiento que no exceda la menor dimensión de la columna (18 pulg), 48 diámetros de la barra del fleje (18 pulg) o 16 diámetros de barra (18 pulg). Los flejes simples espaciados a 18 pulg, como se presenta en la figura 9.15, cumplen los requisitos del Código ACI.

Normalmente podrían realizarse refinamientos adicionales en el diseño, revisando la carga crítica de pandeo mediante la ecuación 9.15. Este paso adicional no se justifica aquí debido a que la esbeltez de la columna está apenas por encima del límite superior con respecto al comportamiento como columna corta y la amplificación del momento no es considerable.

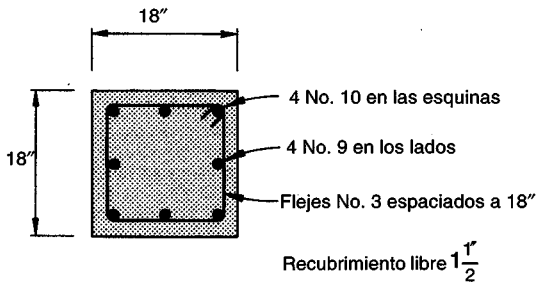


FIGURA 9.15
Sección transversal para la columna *C*3 del ejemplo 9.1.

9.7 MÉTODO DE AMPLIFICACIÓN DE MOMENTO DEL CÓDIGO ACI PARA PÓRTICOS ARRIOSTRADOS

Las diferencias importantes entre el comportamiento de columnas arriostradas contra desplazamiento lateral y el de columnas para las cuales es posible el desplazamiento lateral, se analizaron en las secciones 9.2 y 9.3. La carga crítica para una columna, P_c, depende de la longitud efectiva kl_u, y aunque el factor k de longitud efectiva se encuentra entre 0.5 y 1.0 para columnas arriostradas, está entre 1.0 e ∞ para columnas no arriostradas (ver las figuras 9.1 y 9.13). En consecuencia, una columna no arriostrada presentará pandeo a una carga mucho menor que otra columna idéntica pero arriostrada.

Las columnas sujetas a desplazamientos laterales normalmente no se encuentran aisladas sino que son parte de un sistema estructural que incluye pisos y cubierta. Los pisos y las cubiertas usualmente son muy rígidos en su propio plano. En consecuencia, todas las columnas en determinado nivel de piso de una estructura se someten a desplazamientos laterales iguales, es decir, el desplazamiento lateral de un piso particular sólo puede ocurrir en forma simultánea en todas las columnas del piso. Es evidente que todas las columnas en un nivel deben tratarse en forma conjunta para la evaluación de los efectos de esbeltez relacionados con el desplazamiento lateral.

Por otro lado, también es posible que una sola columna en un pórtico no arriostrado se pandee de modo individual bajo cargas gravitacionales, cuando los extremos de la misma están restringidos al movimiento lateral relativo por otras columnas más rígidas localizadas en el mismo piso. Esta posibilidad, que genera amplificaciones de momentos ocasionados por cargas gravitacionales sin desplazamiento lateral, también debe considerarse en el análisis y diseño de columnas esbeltas en pórticos no arriostrados.

El método de amplificación de momento del Código ACI puede utilizarse todavía, pero es necesario ahora tener en cuenta que, según el Código ACI 10.13.3, en pórticos sujetos a desplazamiento lateral las cargas que actúan sobre la estructura deben separarse en dos categorías: cargas que no producen desplazamientos laterales considerables y cargas que generan desplazamientos laterales de consideración. Obviamente, se requieren dos análisis independientes del pórtico, uno para cada tipo de carga. En general, las cargas gravitacionales que actúan en pórticos razonablemente simétricos producen muy poco desplazamiento lateral y los efectos de las cargas gravitacionales pueden entonces clasificarse en la primera categoría. Esto se confirma mediante ensayos y análisis (ver la referencia 9.11) que demuestran que la amplificación por desplazamiento lateral de los momentos producidos por cargas gravitacionales, mediante el multiplicador por desplazamiento lateral, no es justificable.

Los máximos momentos amplificados, causados por cargas que producen desplazamientos laterales, ocurren en los extremos de las columnas, pero los que generan cargas gravitacionales pueden presentarse en algún sitio de la región central de la columna, y la ubicación exacta varía en función de los momentos en los extremos. Debido a que los momentos gravitacionales amplificados y los momentos por desplazamiento lateral amplificados en la mayoría de los casos no ocurren en el mismo sitio, puede establecerse que no debe aplicarse amplificación a los momentos gravitacionales cuando se consideran momentos por desplazamiento lateral; es decir, es poco probable que el momento máximo real exceda la suma de los momentos gravitacionales no amplificados y los momentos por desplazamiento lateral amplificados. En consecuencia, para casos que incluyen desplazamientos laterales, la ecuación (9.11) se remplaza por

$$M_1 = N_{1ns} + \delta_s M_{1s} \tag{9.17}$$

$$M_2 = N_{2ns} + \delta_s M_{2s} \tag{9.18}$$

en la cual

M_1 = menor momento mayorado en el extremo del elemento a compresión
M_2 = mayor momento mayorado en el extremo del elemento a compresión
M_{1ns} = momento mayorado en el extremo del elemento a compresión en el cual actúa M_1, como consecuencia de cargas que no producen desplazamiento lateral apreciable, calculado de un análisis de pórtico elástico de primer orden
M_{2ns} = momento mayorado en el extremo del elemento a compresión en el cual actúa M_2, como consecuencia de cargas que no producen desplazamiento lateral apreciable, calculado de un análisis de pórtico elástico de primer orden
M_{1s} = momento mayorado en el extremo del elemento a compresión en el cual actúa M_1, como consecuencia de cargas que sí producen desplazamiento lateral apreciable, calculado de un análisis de pórtico elástico de primer orden
M_{2s} = momento mayorado en el extremo del elemento a compresión en el cual actúa M_2, como consecuencia de cargas que sí producen desplazamiento lateral apreciable, calculado de un análisis de pórtico elástico de primer orden
δ_s = factor de amplificación de momentos en pórticos no arriostrados contra desplazamiento lateral para reflejar la deriva lateral que resulta de las cargas laterales (y algunas veces de las cargas gravitacionales).

La necesidad de calcular M_1 al igual que M_2 se explica brevemente a continuación.

El Código ACI 10.13.4 proporciona tres métodos alternos para el cálculo de los momentos por desplazamiento lateral amplificados, $\delta_s M_s$.

Con la primera alternativa, los momentos en los extremos de la columna se calculan utilizando un análisis de segundo orden con base en las rigideces de los elementos dadas en la sección 9.5.

Con la segunda alternativa, los momentos por desplazamiento lateral amplificados se calculan como

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - Q} \geq M_s \tag{9.19}$$

donde Q es el índice de estabilidad calculado con la ecuación (9.10). El Código ACI limita la aplicación de la ecuación (9.19) a valores de $\delta_s = 1/(1 - Q) \leq 1.5$. Uno de los otros dos métodos alternos debe utilizarse para valores de δ_s mayores.

En la tercera alternativa, el Código ACI permite calcular los momentos por desplazamiento lateral amplificados mediante

$$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1 - \Sigma P_u / 0.75 \Sigma P_c} \geq M_s \tag{9.20}$$

en la cual ΣP_u es la carga axial total en todas las columnas y ΣP_c es la carga de pandeo crítica total para todas las columnas en el piso en consideración. Al igual que para la ecuación (9.12), el factor 0.75 de la ecuación (9.20) es un factor de reducción de rigidez que permite obtener un estimativo conservador de la carga crítica de pandeo P_c. Los valores individuales de P_c se calculan mediante la ecuación (9.13) con los factores k de longitud efectiva para pórticos no arriostrados y los valores de EI a partir de la ecuación (9.15) o (9.16).

En los tres métodos alternos para calcular $\delta_s M_s$, el factor β_d se define en forma diferente que para pórticos arriostrados contra desplazamiento lateral. Como se explicó anteriormente en la sección 9.5, para pórticos no arriostrados β_d es la relación del cortante mayorado máximo sostenido dentro del piso y del cortante total mayorado en el mismo piso. Así, para la mayoría de las aplicaciones $\beta_d = 0$ cuando se trata de calcular $\delta_s M_s$. Para situaciones poco usuales, ocurrirá que $\beta_d \neq 0$, como en el caso de un edificio ubicado en una pendiente, y sometido a presión de tierra en uno de los lados (ver la referencia 9.13).

El comentario del ACI 10.13.4 anota que el procedimiento de amplificación de momentos puede subestimar el momento amplificado para columnas en estructuras que están sometidas a desplazamiento torsional considerable bajo el efecto de las cargas laterales. Esta discrepancia es máxima para las columnas más alejadas del centro de torsión. El comentario sugiere que en estos casos se realice un análisis tridimensional de segundo orden.

Las ecuaciones (19.17) y (19.18) están basadas en la suposición de que el momento máximo para columnas de pórticos no arriostrados está ubicado en los extremos. Sin embargo, como se indica en la figura (9.7*e*), el momento máximo puede ocurrir en cualquier punto a lo largo de la columna. Como se describe en la referencia (9.14), para valores de

$$\frac{l_u}{r} > \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f'_c A_g}}} \tag{9.21}$$

el momento máximo puede exceder el valor calculado con la ecuación (9.18) en más del cinco por ciento. Para considerar esta amplificación adicional de momentos, el Código ACI 10.13.5 exige que bajo las condiciones representadas por la ecuación (9.21), las columnas deben diseñarse como columnas arriostradas con base en las ecuaciones (9.11), (9.13) y (9.9), con M_1 y M_2 calculados según las ecuaciones (9.17) y (9.18), respectivamente. El menor momento, M_1, se utiliza en la ecuación (9.9) para calcular C_m. El valor de β_d se define para la combinación de carga que se considera y k se define para un *pórtico arriostrado*.

El Código ACI 10.13.6 establece restricciones adicionales para pórticos no arriostrados, para protegerlos del pandeo lateral de todo un piso bajo cargas gravitacionales solas. Las restricciones dependen del método utilizado para calcular $\delta_s M_s$:

1. Cuando $\delta_s M_s$ se calcula con base en un análisis elástico de segundo orden, la relación de las deflexiones laterales de segundo orden y las deflexiones laterales de primer orden para la combinación $1.4D + 1.7L$ no debe exceder 2.5.
2. Cuando $\delta_s M_s$ se calcula con la ecuación (9.19), el valor de Q, que utiliza ΣP_u para $1.4D + 1.7L$, no debe exceder 0.60 [esto corresponde a $\delta_s = 1/(1 - Q) = 2.5$]
3. Cuando $\delta_s M_s$ se calcula con la ecuación (9.20), el valor de δ_s calculado con ΣP_u y ΣP_c correspondiente a $1.4D + 1.7L$, debe ser positivo y no debe exceder 2.5

Para los tres métodos de verificación de inestabilidad lateral bajo cargas gravitacionales, β_d se calcula para todo el piso como la relación de la carga axial mayorada máxima sostenida y la carga axial mayorada total para el piso, en lugar de la relación de la fuerza cortante mayorada máxima sostenida dentro del piso a la fuerza cortante mayorada total en el piso, y la carga gravitacional ΣP_u se basa en $1.4D + 1.7L$, en lugar de $0.75(1.4D + 1.7L)$. El método (1) incluye dos análisis, uno de primer orden y otro de segundo orden, para la estructura sometida a las cargas gravitacionales mayoradas y a las cargas laterales. En el análisis puede utilizarse cualquier distribución razonable de cargas laterales. La relación entre la deflexión resultante del análisis de segundo orden y la deflexión resultante del análisis de primer orden se limita a un valor de 2.5.

En el método (2), el valor de Q calculado en la ecuación (9.10) puede modificarse en forma conservadora al ser utilizado en la verificación de estabilidad multiplicándolo por $(1 + \beta_{dA})/0.75$ $(1 + \beta_{dV})$, donde los subíndices A y V representan β_d basado en la carga axial total del piso y en el cortante total del piso, respectivamente, y el factor de 0.75 considera la diferencia en las cargas gravitacionales utilizadas en los dos análisis. El comentario del ACI 10.13.6 establece que si Q calculado con la ecuación (9.10) es menor o igual a 0.2, la verificación de estabilidad es adecuada. Este límite conservador en Q calculado con la ecuación (9.10) se basa en valores supuestos de $\beta_{dV} = 0$ y $+ \beta_{dA} = 1$ (es decir, todas las cargas axiales sostenidas). Así $0.2(1 + 1)/0.75(1 + 0) = 0.53$, cumpliéndose con el límite superior, $Q = 0.6$, de acuerdo con el Código ACI 10.13.6.

Para el método (3), δ_s puede calcularse a partir de δ_s de la ecuación (19.20), multiplicando el término original $\Sigma P_u/\Sigma P_c$ por $(1 + \beta_{dA})/0.75(1 + \beta_{dV})$. El comentario del ACI 10.13.6 establece que, aunque $\delta_s = 2.5$ es muy alto, se selecciona este valor para balancear la seguridad inherente al procedimiento de amplificación de momentos. En cualquier caso, si no se cumple la restricción apropiada, la estructura debe rigidizarse.

La secuencia de pasos para diseño de columnas esbeltas en pórticos no arriostrados es similar a la expuesta en la sección 9.6 para pórticos arriostrados, excepto por el requerimiento de separar las cargas en cargas gravitacionales, que se supone no producen desplazamiento lateral, y cargas horizontales que generan desplazamientos laterales. Se exige que se realicen análisis independientes del pórtico y deben aplicarse factores k de longitud equivalente y coeficientes de flujo plástico β_d diferentes, simultáneamente con verificaciones adicionales especificadas para la ecuación (9.21) y para la posibilidad de inestabilidad lateral bajo cargas gravitacionales. De acuerdo con el Código ACI 9.2 (ver también la tabla 1.2 del capítulo 1), debe tenerse en cuenta que si los efectos del viento, W, se incluyen en el diseño, deben aplicarse tres posibles combinaciones de cargas mayoradas:

$U = 1.4D + 1.7L$
$U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W)$ con L igual a su valor total y a cero
$U = 0.9D + 1.3W$

Disposiciones similares se incluyen para los casos en que deben considerarse cargas sísmicas. Esto representa una complicación considerable en el análisis de pórticos sujetos a desplazamientos laterales; sin embargo, las cargas mayoradas pueden separarse en efectos gravitacionales y en efectos de desplazamiento lateral, según se requiera, y se pueden adelantar análisis separados para cada uno de ellos.

Es importante anotar que para pórticos no arriostrados contra desplazamiento lateral, *las vigas deben diseñarse para los momentos amplificados totales en los extremos de los elementos a compresión que llegan a las uniones*. Aunque las columnas sean muy rígidas, en caso de que se formen rótulas plásticas en las vigas de restricción adyacentes a las uniones, la longitud efectiva de la columna aumentaría considerablemente y las cargas críticas de las columnas se reducirían en forma apreciable.

La selección de cuál de los tres métodos alternos se debe utilizar para calcular $\delta_s M_s$ depende del nivel deseado de precisión y de las herramientas analíticas disponibles.

Los análisis de segundo orden (discutidos con más detalle en la sección 9.8) son el método más preciso para estimar los momentos por desplazamiento lateral amplificados pero exigen la utilización de técnicas más sofisticadas. Si el diseñador cuenta con estas capacidades, el esfuerzo adicional involucrado debe redundar en un mejor diseño. La segunda alternativa, la ecuación (9.19), es en la mayoría de los casos la más fácil de utilizar debido a que se emplea análisis matricial en prácticamente todos los pórticos para determinar las fuerzas en los elementos bajo cargas gravitacionales y laterales. Este tipo de análisis genera en forma automática los valores de Δ_o, las deflexiones relativas de primer orden para un piso, permitiendo así calcular el valor de Q para cada piso de la estructura. La tercera alternativa, la ecuación (9.20), proviene de versiones anteriores del Código ACI con modificaciones menores. Como se demuestra en el siguiente ejemplo, los cálculos que utiliza la ecuación (9.20) son más tediosos que los requeridos con la ecuación (9.19) pero no requieren el conocimiento de Δ_o. El Código limita la aplicación de la ecuación (9.19) a valores de $\delta_s \leq 1.5$. Para $\delta_s > 1.5$, la aplicación de la ecuación (9.20) es obligatoria si no se tiene disponible la capacidad para adelantar análisis de segundo orden.

Ejemplo 9.2. Diseño de una columna esbelta en pórticos no arriostrados. Considere ahora que el pórtico del edificio de concreto del ejemplo 9.1 *no está arriostrado* en el plano mostrado, al quitar los núcleos de las escaleras y ascensores descritos anteriormente. Se lleva a cabo una evaluación inicial

con las mismas dimensiones y refuerzo de elementos dados en el ejemplo 9.1. El refuerzo de las columnas interiores de 18 × 18 pulg, de la figura 9.15, está conformado por cuatro barras No. 10 en las esquinas y cuatro barras No. 9 en el centro de cada lado. El refuerzo para las columnas exteriores de 16 × 16 pulg, está conformado por ocho barras No. 8 distribuidas de manera similar que el refuerzo longitudinal que se aprecia en la figura 9.15. El edificio estará sometido a cargas gravitacionales muertas y vivas y a cargas horizontales de viento. Un análisis elástico de primer orden adelantado para el pórtico con las cargas de servicio (todos los factores de carga = 1.0) y utilizando los valores de E e I definidos en la sección 9.5 da los siguientes resultados para el tercer piso:

	Cols. *A*3 y *F*3	Cols. *B*3 y *E*3	Cols. *C*3 y *D*3
P_{muerta}	115 klb	230 klb	230 klb
P_{viva}	90 klb	173 klb	173 klb
P_{viento}	±30 klb	±18 klb	±6 klb
V_{viento}	5.5 klb	11 klb	11 klb
$M_{2,}$ muerta			2 klb-pie
$M_{2,}$ viva			100 klb-pie
$M_{2,}$ viento			±84 klb-pie
$M_{1,}$ muerta			–2 klb-pie
$M_{1,}$ viva			100 klb-pie
$M_{1,}$ viento			±70 klb-pie

La deflexión lateral relativa para el tercer piso para el cortante total de viento V_{viento} = 55 klb es 0.76 pulg.

Debe diseñarse la columna *C*3 para la condición crítica de carga, utilizando f'_c = 4000 lb/pulg² y f_y = 60,000 lb/pulg² como antes.

Solución. Las dimensiones de la columna y el refuerzo deben satisfacer los requisitos para cada una de las tres combinaciones de carga indicadas anteriormente.

En primer lugar, se realiza una verificación para ver si se requiere un análisis de pórtico no arriostrado. El cortante mayorado es V_u= 0.75 × 1.7 × V_{viento} = 0.75 × 1.7 × 55 = 70.1 klb. La deflexión correspondiente es Δ_o = 0.75 × 1.7 × 0.76 = 0.97 pulg. La fuerza axial total mayorada en el piso se obtiene utilizando la tabla de cargas.

Columnas *A*3 y *F*3: $P_u = 0.75(1.4 \times 115 + 1.7 \times 90) = 236$ klb
Columnas *B*3, *C*3, *D*3 y *E*3: $P_u = 0.75(1.4 \times 230 + 1.7 \times 173) = 462$ klb

Observe que en este caso no se consideran los valores de P_{viento} en las columnas debido a que éstos se cancelan entre sí al considerar el piso en su totalidad. Así, $\Sigma P_u = 2 \times 236 + 4 \times 462 = 2320$ klb y el índice de estabilidad es

$$Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_o}{V_u l_c} = \frac{2320 \times 0.97}{70.1 \times 14 \times 12} = 0.19$$

debido a que $Q > 0.05$, se requiere el análisis de pórtico no arriostrado para este piso.

a. Sólo cargas gravitacionales. Todas las columnas de pórticos no arriostrados deben considerarse inicialmente como columnas arriostradas sometidas a cargas gravitacionales solas, es decir, para $U = 1.4D + 1.7L$. Esta verificación ya se realizó para la columna *C*3 en el ejemplo 9.1.

b. Cargas gravitacionales más cargas de viento. Cuando se incluyen los efectos del viento deben tenerse en cuenta dos combinaciones de carga: $U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W)$ y $U = 0.9D + 1.3W$. La combinación $U = 0.9D + 1.3W$ es muy poco probable que controle en este caso puesto que para la columna *C*3 las fuerzas de levantamiento generadas por el viento son muy pequeñas en comparación con la carga muerta. Por tanto, esta condición no se incluirá más. A partir del ejemplo 9.1, $\psi_a = \psi_b = 2.17$. Con referencia al nomograma de la figura 9.13*b*, el factor de longitud efectiva para un pórtico no arriostrado es $k = 1.64$ y

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{1.64 \times 13 \times 12}{0.3 \times 18} = 47.4$$

Este valor está muy por encima del valor límite de 22 para un comportamiento de columna corta en un pórtico no arriostrado (esto no es sorprendente ya que $kl_u/r = 25.1$ para la columna $C3$ en la condición arriostrada). Para el análisis de pórticos con desplazamiento lateral las cargas deben separarse en cargas gravitacionales y en aquellas que producen desplazamiento lateral, y además deben calcularse los factores de amplificación apropiados para aplicarse a los momentos de desplazamiento lateral. Los momentos mayorados en los extremos que generan las cargas que no producen desplazamiento lateral sobre la columna $C3$:

$$M_{1ns} = 0.75[1.4 \times (-2) + 1.7 \times 100] = 125 \text{ klb-pie}$$
$$M_{2ns} = 0.75(1.4 \times 2 + 1.7 \times 108) = 140 \text{ klb-pie}$$

Los efectos del desplazamiento lateral producen una amplificación de los momentos

$$M_{1s} = 0.75[1.7 \times (-70)] = -89 \text{ klb-pie}$$
$$M_{2s} = 0.75(1.7 \times 84) = 107 \text{ klb-pie}$$

Para efectos comparativos se calculan ahora los momentos amplificados por desplazamiento lateral con base en Q (ecuación 9.19) y $\Sigma P_u/\Sigma P_c$ (ecuación 9.20).

Utilizando la ecuación (9.19),

$$\delta_s M_{1s} = \frac{M_{1s}}{1-Q} = \frac{-89}{1-0.19} = -110 \text{ klb-pie}$$
$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1-Q} = \frac{107}{0.81} = 132 \text{ klb-pie}$$

Para utilizar la ecuación (9.20) deben calcularse las cargas críticas para cada una de las columnas de la manera siguiente. Para las columnas $A3$ y $F3$,

Columnas: $I = 0.7I_g = 0.7 \times 16 \times 16^3/12 = 3823 \text{ pulg}^4$
y $I/l_c = 3823/(14 \times 12) = 22.8 \text{ pulg}^3$
Vigas: $I = 4838 \text{ pulg}^4$ y $I/l_c = 16.8 \text{ pulg}^3$

En este caso los factores de restricción rotacional, con dos columnas y una viga que llegan a la unión son

$$\psi_a = \psi_b = \frac{22.8 + 22.8}{16.8} = 2.71$$

que con referencia al nomograma para pórticos no arriostrados, arroja un valor de $k = 1.77$. Para cargas de viento $\beta_d = 0$. Debido a que el refuerzo ya ha sido seleccionado inicialmente para una columna, se calculará el valor de EI mediante la ecuación (9.15).

$$EI = 0.2E_cI_g + E_sI_{se} = 0.2 \times 3.6 \times 10^6 \times 16 \times 16^3/12 + 29 \times 10^6 \times 6 \times 0.79 \times 6^2$$
$$= 8.88 \times 10^9 \text{ lb-pulg}^2$$

Entonces la carga crítica es

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 8.88 \times 10^9}{(1.77 \times 13 \times 12)^2} = 1.15 \times 10^6 \text{ lb}$$

Para las columnas $B3$, $C3$, $D3$ y $E3$, a partir de los cálculos previos para la columna $C3$, $k = 1.64$ en el caso de carga que incluye desplazamientos laterales. Para estas columnas,

$$EI = 0.2 \times 3.6 \times 10^6 \times 18 \times 18^3/12 + 29 \times 10^6(4 \times 1.27 \times 5.86^2 + 2 \times 1.0 \times 5.94^2)$$
$$= 13.4 \times 10^9 \text{ lb-pulg}^2$$

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 13.4 \times 10^9}{(1.64 \times 13 \times 12)^2} = 2.02 \times 10^6 \text{ lb}$$

Así, para todas las columnas en este nivel de la estructura

$$\Sigma P_c = 2 \times 1150 + 4 \times 2020 = 10{,}380 \text{ klb}$$

y, finalmente, los momentos amplificados para el caso de desplazamiento lateral tanto para la parte superior como para la inferior de la columna *C*3 son

$$\delta_s M_{1s} = \frac{M_{1s}}{1 - \Sigma P_u/0.75\Sigma P_c} = \frac{-89}{1 - 2320/(0.75 \times 10{,}380)} = -127 \text{ klb-pie}$$

$$\delta_s M_{2s} = \frac{M_{2s}}{1 - \Sigma P_u/0.75\Sigma P_c} = \frac{107}{1 - 0.298} = 152 \text{ klb-pie}$$

Los valores de $\delta_s M_s$ son considerablemente mayores con base en $\Sigma P_u/\Sigma P_c$ que cuando están basados en Q (152 klb-pie *versus* 132 klb-pie para $\delta_s M_{2s}$), lo cual confirma la naturaleza conservadora del método de amplificación de momentos basado en la ecuación (9.20). El diseño continúa utilizando el valor menos conservador de $\delta_s M_s$.

Los momentos amplificados totales son:

$$M_1 = 125 - 110 = 15 \text{ klb-pie}$$
$$M_2 = 140 + 132 = 272 \text{ klb-pie}$$

que se combinan con una carga axial mayorada de $P_u = 469$ klb (incluyendo ahora $0.75 \times 1.7 P_{\text{viento}}$). Con referencia al gráfico A.7 con los parámetros de la columna

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{469}{324} = 1.45 \text{ klb/pulg}^2$$

$$\frac{M_u}{A_g h} = \frac{272 \times 12}{324 \times 18} = 0.56 \text{ klb/pulg}^2$$

se observa que $\rho_g = 0.030$. Este valor es ligeramente superior que el valor de 0.026 requerido para la columna *C*3 en un pórtico arriostrado. El área de acero requerida de

$$A_{st} = 0.03 \times 324 = 9.72 \text{ pulg}^2$$

se suministrará con ocho barras No. 10 distribuidas como aparece en la figura 9.16. El espaciamiento de los flejes No. 3 no debe exceder la menor dimensión de la columna: 48 diámetros del fleje o 16 diámetros de la barra principal. El segundo criterio controla en este caso y se utilizarán flejes No. 3 espaciados a 18 pulgadas con la distribución expuesta en la figura 9.16.

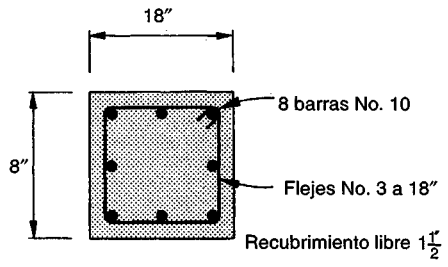


FIGURA 9.15
Sección transversal de la columna *C*3 en el ejemplo 9.2

Para completar el diseño se requieren dos verificaciones adicionales. En primer lugar, de acuerdo con la ecuación (9.21), debe calcularse un momento amplificado mayor utilizando los valores de M_1 y M_2, y las ecuaciones (9.11), (9.13) y (9.9) si $l_u/r > 35/\sqrt{P_u/f'_c A_g}$. En este caso, $l_u/r = 13 \times 12 \div (0.3 \times 18) = 29$ en comparación con $35/\sqrt{469/(4 \times 324)} = 58$, lo que indica que el análisis y el diseño realizados son satisfactorios.

En segundo lugar se requiere una verificación para proteger de una inestabilidad lateral a la totalidad del piso sometido a cargas gravitacionales. Cuando se utiliza Q para calcular $\delta_s M_s$, Q no debe exceder 0.60. En esta verificación, los momentos de inercia utilizados en el cálculo de Δ_o para usar en la ecuación (9.10) deben dividirse por $1 + \beta_d$, con β_d igual a la relación de la carga axial mayorada sostenida y la carga axial mayorada total; ΣP_u debe calcularse con base en $1.4D + 1.7L$. Esta verificación se satisface sin cálculos adicionales, si el valor de Q a partir de la ecuación (9.10) no es mayor que 0.20. Con base en la ecuación (9.10), debido a que Q resulta igual a 0.19, el tercer piso cumple con la verificación de estabilidad.

9.8 ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN PARA EFECTOS DE ESBELTEZ

De acuerdo con los ejemplos anteriores es evidente que, aunque el método de amplificación de momentos del Código ACI funciona suficientemente bien para pórticos arriostrados, su aplicación a pórticos no arriostrados es complicada puesto que permite muchas posibilidades de error, especialmente cuando se utiliza la ecuación (9.20) para calcular $\delta_s M_s$.

Con la actual disponibilidad de computadores en las oficinas de diseño y a causa de la creciente complejidad del método de amplificación de momentos, resulta cada vez más ventajoso aplicar los análisis racionales de segundo orden para pórticos, o análisis $P\Delta$, en los cuales el efecto de la deflexión lateral sobre los momentos, sobre las fuerzas axiales y, a su vez, sobre las deflexiones laterales, se calcula en forma directa. Los momentos y las deflexiones resultantes incluyen los efectos de esbeltez y, por consiguiente, el problema es estrictamente no lineal.

El Código ACI 10.10.1 estimula la utilización del análisis de segundo orden en particular para pórticos no arriostrados (Código ACI 10.13.4.1). El Código ACI 10.11.5 *exige* un análisis de segundo orden para todos los elementos a compresión con kl_u/r mayor que 100. Según el Código, estos estudios "deben basarse en las fuerzas y momentos mayorados a partir de un análisis de segundo orden considerando la no linealidad del material y la fisuración, al igual que los efectos de la curvatura del elemento y de la deriva lateral, la duración de las cargas, la retracción de fraguado y el flujo plástico y la interacción con la cimentación". Las dimensiones de los elementos que se utilicen en el análisis de segundo orden deben estar dentro del 10 por ciento de las dimensiones finales, de lo contrario el pórtico debe analizarse de nuevo. El Código ACI 10.10.1 exige que el procedimiento para el análisis de segundo orden debe proporcionar una estimación de la resistencia que esté "esencialmente de acuerdo" con ensayos de resultados de columnas de concreto reforzado para pórticos estáticamente indeterminados. El comentario del ACI 10.10.1 sugiere que una estimación dentro del 15 por ciento de los resultados de los ensayos puede considerarse satisfactoria. También sugiere que se utilice un factor de reducción de rigidez ϕ_k de 0.80 para mantener la consistencia con los análisis de segundo orden para pórticos no arriostrados descritos en la sección 10.13.4.1.

Tratar de satisfacer todos los requisitos del Código ACI 10.10.1 elemento por elemento resultaría altamente ineficiente. Tal como lo anota la referencia 9.14, el requisito clave para los valores de EI para los análisis de pórticos de segundo orden, consiste en que éste sea representativo de la rigidez del elemento justo antes de la falla. Los valores de E e I de la sección 9.5 (Código ACI 10.11.1) cumplen este requisito e incluyen un factor de reducción de resistencia de 0.875 (ver la referencia 9.14). Los valores del factor de reducción de resistencia y del momento de inercia de la sección 9.5 son mayores que el factor 0.75 de las ecuaciones (9.12) y (9.19) y los valores efectivos de I en la ecuación (9.15) y (9.16), respectivamente, debido a la baja variabilidad inherente en la rigidez total del pórtico en comparación con aquélla de un elemento aislado individual. El Código ACI 10.13.4 autoriza el uso de E e I a partir de la sección (9.5) en análisis de segundo orden para determinar los momentos por desplazamiento lateral amplificados.

Un análisis racional de segundo orden genera una mejor aproximación a los momentos y a las fuerzas reales que el método de la amplificación de momentos. Las diferencias son particularmente significativas para pórticos irregulares, para pórticos sujetos a fuerzas que producen desplazamientos laterales significativos o para pórticos poco arriostrados. Con este método pueden obtenerse economías importantes en el diseño.

En la literatura se describen diversos métodos prácticos para realizar análisis completos de segundo orden (ver las referencias 9.3, 9.15, 9.16, 9.17 y 9.18 apenas para nombrar algunas), y comercialmente se encuentran programas con el propósito general de realizar análisis completos no lineales incluyendo los efectos de desplazamiento lateral. Sin embargo, los programas de análisis de primer orden existentes pueden modificarse para producir resultados aceptables. Esto exige una metodología iterativa que puede resumirse como se explica a continuación.

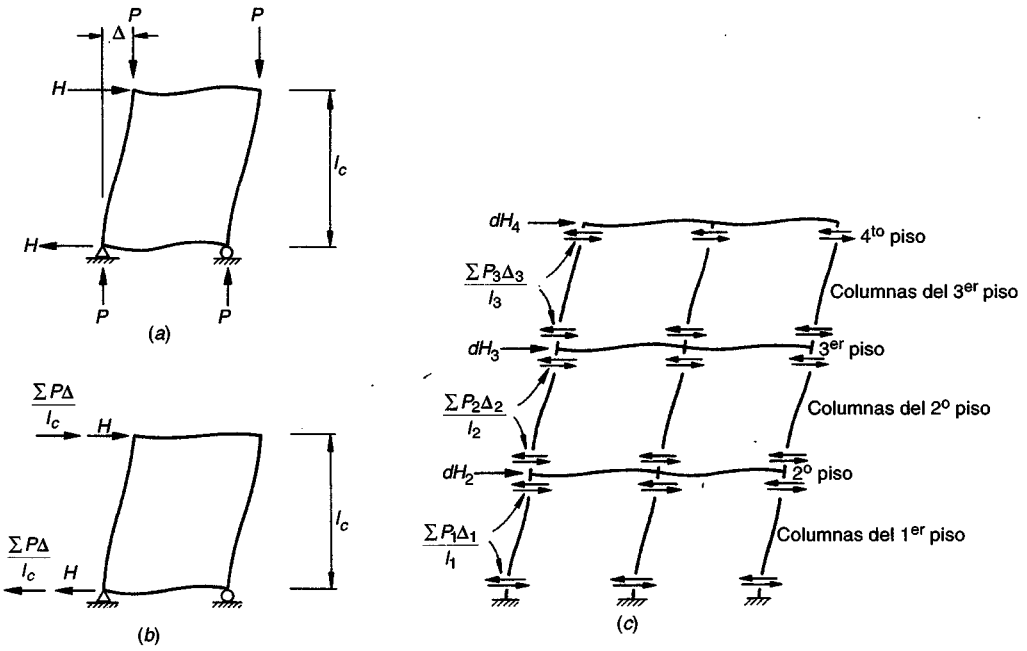


FIGURA 9.17
Bases para un análisis iterativo $P\Delta$: (*a*) cargas verticales y laterales sobre un pórtico rectangular; (*b*) fuerzas laterales reales H y fuerzas ficticias asociadas al desplazamiento lateral dH; (*c*) pórtico de tres pisos sometido a fuerzas asociadas al desplazamiento (*adaptada de la referencia* 9.15).

La figura 9.17*a* presenta un pórtico simple sometido a cargas laterales H y a cargas verticales P. La deflexión lateral Δ se calcula mediante un análisis corriente de primer orden. A medida que el pórtico se desplaza lateralmente, los momentos en los extremos de las columnas deben equilibrar las cargas laterales y un momento igual a $(\Sigma P)\Delta$:

$$\Sigma(M_{sup} + M_{inf}) = Hl_c + \Sigma P\Delta \tag{9.22}$$

donde Δ es la deflexión lateral en la parte superior del pórtico con respecto a la inferior y ΣP es la suma de las fuerzas verticales que actúan. El momento $\Sigma P\Delta$ en determinado piso puede representarse por fuerzas cortantes equivalentes $(\Sigma P)\Delta/l_c$, donde l_c es la altura del piso, como en la figura 9.17*b*. Estos cortantes producen un momento de volcamiento igual al de las cargas P que actúan con un desplazamiento Δ.

La figura 9.17*c* muestra los cortantes de piso que actúan en un pórtico de tres pisos. La suma algebraica de los cortantes de piso generados por las columnas encima y debajo en determinada planta, corresponden de hecho a una fuerza asociada al desplazamiento dH que actúa sobre ese nivel. Por ejemplo, en la segunda planta la fuerza asociada al desplazamiento es

$$dH_2 = \frac{\Sigma P_1\Delta_1}{l_1} - \frac{\Sigma P_2\Delta_2}{l_2} \tag{9.23}$$

Las fuerzas asociadas al desplazamiento deben sumarse a las fuerzas laterales aplicadas H para cualquier nivel de piso y la estructura debe entonces analizarse de nuevo, obteniéndose así nuevas deflexiones y momentos incrementados. Si las deflexiones laterales aumentan de manera significativa (por ejemplo, en más del cinco por ciento), deben calcularse nuevas fuerzas de desplazamiento dH y volver a analizar la estructura para la suma de las fuerzas laterales aplicadas y las nuevas fuerzas de desplazamiento. Se continúan las iteraciones hasta que los cambios sean insignificantes. Por lo general, uno o dos ciclos de iteraciones son suficientes para estructuras de rigidez lateral razonable (ver la referencia 9.3).

La referencia 9.15 señala que se debe realizar una corrección en el análisis para tener en cuenta las diferencias de forma entre el diagrama de momentos $P\Delta$, que tiene la misma forma de la columna deflectada, y el diagrama de momentos asociado con las fuerzas $P\Delta/l$, que es lineal entre los nudos en los extremos de las columnas. El área del diagrama de momentos $P\Delta$ real es mayor que el de la representación lineal equivalente y, en consecuencia, las deflexiones laterales serán mayores; esta diferencia variará según la rigidez relativa de la columna y las vigas que llegan hasta los nudos. En la referencia 9.15 se sugiere que esta deflexión aumentada puede tenerse en cuenta tomando las fuerzas de desplazamiento dH un 15 por ciento mayores que los valores calculados en cada iteración.

La precisión de los resultados de un análisis $P\Delta$ depende de manera importante de los valores de rigidez utilizados para los elementos, de las rotaciones de la cimentación, si existen, y de los efectos del flujo plástico del concreto. Con relación a los efectos del flujo plástico, las cargas laterales que producen desplazamientos significativos a menudo son cargas de viento o cargas sísmicas de corta duración, de manera que los efectos del flujo plástico son mínimos. En general, no se recomienda la utilización de pórticos no arriostrados para resistir cargas laterales *sostenidas*, es decir, generadas por presiones de tierra o de líquidos y, en tales casos, sería preferible incluir muros de corte u otros elementos para sostener estas cargas.

REFERENCIAS

9.1. S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability,* 3d ed., McGraw-Hill, New York, 1969.

9.2. B. G. Johnson (ed.), *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 3d ed., John Wiley and Sons, New York, 1976.

9.3. J. G. MacGregor and S. E. Hage, "Stability Analysis and Design of Concrete Frames", *J. Struct. Div.,* ASCE, vol. 103, no. ST 10, 1977, pp. 1953-1977.

9.4. S.-M. A. Lai and J. G. MacGregor, "Geometric Nonlinearities in Unbraced Multistory Frames", *J. Struct. Engng.,* ASCE, vol. 109, no. 11, 1983, pp. 2528-2545.

9.5. J. G. MacGregor, J. E. Breen, and E. O. Pfrang, "Design of Slender Concrete Columns", *J. ACI*, vol. 67, no. 1, 1970, pp. 6-28.

9.6. J. G. MacGregor, V. H. Oelhafen, and S. E. Hage, "A Reexamination of the El Value for Slender Columns", *Reinforced Concrete Columns*, American Concrete Institute, Detroit, 1975, pp. 1-40.

9.7. *Code of Practice for the Structural Use of Concrete*, Part 1, "Design Materials and Workmanship", (CP110: Part 1, 1972), British Standards Institution, London, 1972.

9.8. W. B. Cranston, "Analysis and Design of Reinforced Concrete Columns", *Research Report* No. 20, Paper 41.020, Cement and Concrete Association, London, 1972.

9.9. R. W. Furlong, "Column Slenderness and Charts for Design", *J. ACI*, vol. 68, no. 1, 1971, pp. 9-18.

9.10. M. Valley and P. Dumonteil, Disc. of "*K*-Factor Equation to Alignment Charts for Column Design", by L. Duan, W. -S. King, and W.-F. Chen, *ACI Struc. J.*, vol. 91, no. 2, Mar-Apr. 1994, pp. 229-230.

9.11. J. S. Ford, D. C. Chang, and J. E. Breen, "Design Indications from Tests of Unbraced Multipanel Concrete Frames", *Conc. Intl*, vol. 3, no. 3, 1981, pp. 37-47.

9.12. *Building Code Requirements for Structural Concrete*, ACI 318-95, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 1995.

9.13. *Commentary on Building Code Requirements for Structural Concrete*, ACI 318R-95, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 1995 (published as part of Ref. 9.12).

9.14. J. G. MacGregor, "Design of Slender Concrete Columns — Revisited", *ACI Struct. J.*, vol. 90, no. 3, 1993, pp. 302-309.

9.15. J. G. MacGregor, *Reinforced Concrete*, 2d ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.

9.16. B. R. Wood, D. Beaulieu, and P. F. Adams, "Column Design by *P*-Delta Model", *Proc. ASCE*, vol. 102, no. ST2, 1976, PP. 487-500.

9.17. B. R. Wood, D. Beaulieu, and P. F. Adams, "Further Aspects of Design by *P*-Delta Model, *J. Struct. Div.*, ASCE, vol. 102, no. ST3, 1976, pp. 487-500.

9.18. R. W. Furlong, "Rational Analysis of Multistory Concrete Structures", *Conc. Intl.,* vol. 3, no. 6, 1981, pp. 29-35.

PROBLEMAS

9.1. La columna de 15 × 15 pulg que aparece en la figura P9.1 debe extenderse desde el nivel de las zapatas hasta el segundo piso de un pórtico arriostrado con una longitud no soportada de 20.5 pies. Los requisitos de exposición exterior exigen un recubrimiento libre de 2 pulg para el acero más exterior. El análisis indica que la condición crítica de carga genera las siguientes cargas de servicio: (*a*) de las cargas

muertas, P = 150 klb, M_{sup} = 29 klb-pie, M_{inf} =14.5 klb-pie; (*b*) de las cargas vivas, P = 90 klb, M_{sup} = 50 klb-pie, M_{inf} = 25 klb-pie, con la columna deflectada en curvatura doble como aparece. El factor k de longitud efectiva determinado a partir de cálculos preliminares es 0.90 utilizando la figura 9.13*a*. Las resistencias de los materiales son f'_c = 4000 lb/pulg^2 y f_y = 60,000 lb/pulg^2. Según el método de amplificación de momentos del Código ACI, determine si la columna es adecuada para resistir estas cargas.

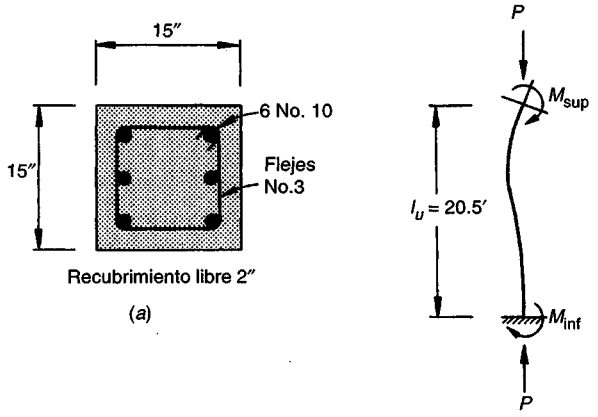


FIGURA P9.1

9.2. La estructura de la figura P9.2*a* tiene proyectadas unas columnas esbeltas en el lado izquierdo; está totalmente arriostrada mediante muros de cortante a la derecha. Todas las columnas son de 16 × 16 pulg, como aparece en la figura P9.2*b*, y todas las vigas son de 24 × 18 pulg con una losa monolítica de piso de 6 pulg como aparece en la figura P9.2*c*. Los cálculos preliminares realizados exigen la colocación del refuerzo en la columna como aparece en la figura. Análisis con distribuciones alternativas de carga indican que la condición crítica para la columna *AB*, corresponde a una deflexión en curvatura simple, y las siguientes cargas axiales y momentos de servicio: por carga muerta, P = 139 klb, M_{sup} = 61 klb-pie, M_{inf} = 41 klb-pie; por carga viva, P = 93 klb, M_{sup} = 41 klb-pie, M_{inf} = 27 klb-pie. Las resistencias de los materiales son, f'_c = 4000 lb/pulg^2 y f_y = 60,000 lb/pulg^2. ¿La columna propuesta, reforzada como aparece, es suficiente para esta condición de carga? Utilice la ecuación (9.16) para calcular EI de la columna.

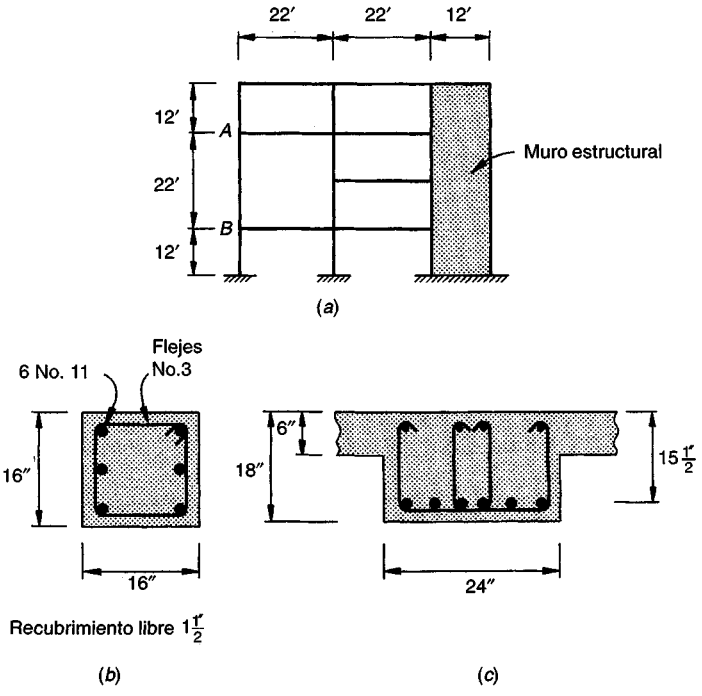


FIGURA P9.2

9.3. Refine los cálculos del problema 9.2 utilizando la ecuación (9.15) para calcular el EI de la columna. Suponga que el refuerzo es aproximadamente el del problema 9.2. Explique sus resultados.

9.4. Una columna interior en un pórtico arriostrado tiene una longitud no soportada de 20 pies y sostiene las siguientes fuerzas y momentos causados por cargas de servicio: (*a*) por cargas muertas, $P = 180$ klb, $M_{sup} = 28$ klb-pie, $M_{inf} = -28$ klb-pie; (*b*) por cargas vivas, $P = 220$ klb, $M_{sup} = 112$ klb-pie, $M_{inf} = 112$ klb-pie, donde los signos de los momentos representan doble curvatura para carga muerta y curvatura sencilla para carga viva. Los factores de restricción a la rotación en las partes superior e inferior pueden tomarse iguales a 1.0. Diseñe una columna cuadrada con flejes para resistir las anteriores cargas con una cuantía de refuerzo aproximada de 0.02. Utilice $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

9.5. La figura P9.5 presenta los primeros tres pisos de un edificio. El pórtico resistente a cargas laterales está conformado por columnas exteriores de 20 × 20 pulgadas, columnas interiores de 24 × 24 pulgadas y vigas de 36 pulgadas de ancho por 24 pulgadas de espesor. La altura de la columna medida centro a centro es de 16 pies. Para las columnas del segundo piso, las cargas muerta y viva gravitacionales de servicio y las cargas de viento horizontales basadas en un análisis elástico de primer orden al pórtico son las siguientes:

	Cols. *A2* y *E2*	Cols. *B2* y *D2*	Col. *C2*
P_{muerta}	348 klb	757 pie	688 pie
P_{viva}	137 klb	307 pie	295 pie
P_{viento}	±19 klb	±9 pie	0 pie
V_{viento}	6.5 klb	13.5 pie	13.5 pie
$M_{2,}$ muerta		31 klb-pie	
$M_{2,}$ viva		161 klb-pie	
$M_{2,}$ viento		105 klb-pie	
$M_{1,}$ muerta		–34 klb-pie	
$M_{1,}$ viva		108 klb-pie	
$M_{1,}$ viento		–98 klb-pie	

Un análisis matricial para el cortante no mayorado total debido a la fuerza de viento de 53.5 klb, utilizando valores de E e I especificados en la sección 9.5, indica que la deflexión lateral relativa del segundo piso es 0.24 pulg. Diseñe las columnas $B2$ y $D2$ utilizando la ecuación (9.19) para calcular $\delta_s M_s$. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

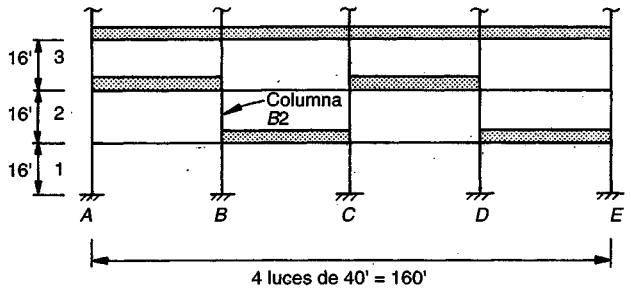


FIGURA P9.5

9.6. Repita el problema 9.5 utilizando la ecuación (9.20) para calcular $\delta_s M_s$. Comente sus resultados.

CAPÍTULO

10 DISEÑO DE REFUERZO EN LAS UNIONES

10.1 INTRODUCCIÓN

La mayor parte de las fallas en el concreto reforzado ocurren, no por deficiencias en el análisis de la estructura o en el diseño de los elementos, sino por la atención inadecuada que se le presta al despiece del refuerzo. En muchos casos, el problema está localizado en las conexiones de los elementos estructurales principales (ver la referencia 10.1).

Existe una tendencia desafortunada en la práctica moderna estructural, mediante la cual el ingeniero confía el diseño de las uniones a una persona empleada por el fabricante de las barras de refuerzo para que se encargue del despiece. Con certeza, en muchos casos pueden adoptarse detalles estándares como los que se presentan en el *ACI Detailing Manual* (ver la referencia 10.2), pero sólo el ingeniero de diseño, con la totalidad de los resultados del análisis estructural, puede tomar esta decisión. En muchos otros casos, los requisitos especiales para lograr una transferencia efectiva de las fuerzas exigen una especificación completa de los detalles en los planos de ingeniería, que incluyen configuración de los dobleces, puntos de corte para las barras principales y provisiones para el refuerzo suplementario.

El requisito básico que se debe cumplir en las uniones es que todas las fuerzas existentes en los extremos de los elementos deben transmitirse a través de la unión a los elementos de soporte. Por ejemplo, se presentan estados de esfuerzos complejos en las intersecciones de vigas y columnas que deben reconocerse en el diseño del refuerzo. Además, se presentan discontinuidades repentinas en la dirección de las fuerzas internas y se hace necesario colocar barras de refuerzo ancladas en forma adecuada para resistir las tensiones resultantes. Mediante ensayos experimentales se ha encontrado que algunos detalles utilizados muy a menudo en las conexiones llegan a proporcionar apenas el 30% de la resistencia requerida (ver las referencias 10.1 y 10.3).

En años recientes, importantes investigaciones se han dirigido a establecer mejores principios básicos para el diseño de las uniones (ver las referencias 10.4 y 10.5). Ensayos a escala real de uniones viga-columna han generado métodos de diseño mejorados como los descritos en "Recommendations for Design of Beam-Column Joints in Monolithic Reinforced Concrete Structures", publicado por el ACI Committee 352 (ver la referencia 10.6). Aunque éstos no forman parte del Código ACI, tales recomendaciones suministran una base para el diseño seguro de las uniones viga-columna, tanto para construcciones corrientes como para edificios sometidos a fuerza

sísmica. Otros ensayos ofrecen valiosas aclaraciones para la comprensión del comportamiento de las uniones entre vigas secundarias y vigas principales de las uniones entre muros y de otras configuraciones de uniones, generando así una base sólida para el diseño.

El sentido práctico en el diseño de la unión no debe pasarse por alto. El refuerzo de la viga que penetra en una unión viga-columna debe pasar por el lado de las barras verticales de la columna y la consideración oportuna de este hecho en la sección de los anchos de los elementos, de los tamaños de las barras y del espaciamiento, puede evitar atrasos muy costosos en la obra. Asimismo, el acero de una viga secundaria y el acero de una viga principal que se intersectan en ángulo recto en una típica unión viga secundaria-viga principal-columna, no pueden estar en el mismo plano horizontal al entrar en la unión. La figura 10.1 presenta una ilustración extrema de la congestión de las barras de refuerzo en una intersección como la anterior. El vaciado del concreto en una región como ésta es difícil en el mejor de los casos.

La mayor parte de este capítulo se relaciona con el diseño de las uniones en estructuras monolíticas típicas que constan de pórticos continuos diseñados según los requisitos de resistencia del Código ACI para cargas gravitacionales o normales de viento. Las uniones que sirven de conexión a elementos que deben mantener su resistencia ante inversiones de deformaciones en el intervalo inelástico, como en el caso de elementos sometidos a cargas sísmicas o de vientos muy fuertes, representan una categoría diferente y no se tratarán aquí (ver la referencia 10.6). Las ménsulas y cornisas, aunque son más frecuentes en edificios prefabricados que en construcciones monolíticas, tienen características comunes con las uniones monolíticas y se cubrirán en el presente capítulo.

10.2 UNIONES VIGA-COLUMNA (NUDOS)

Una *unión viga-columna* se define como la porción de la columna dentro de la altura de las vigas que se unen hasta ella. Anteriormente, el diseño de las uniones monolíticas se limitaba a proveer el

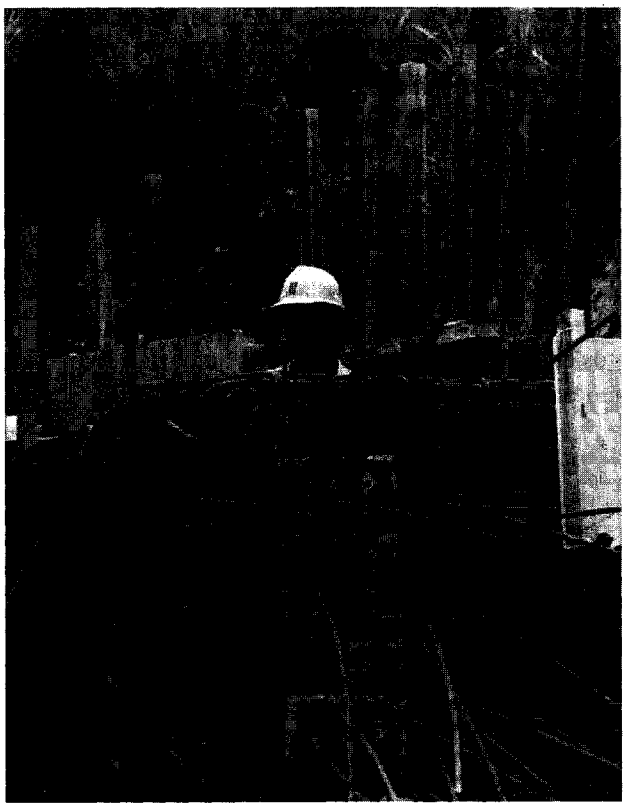


FIGURA 10.1
Congestión del acero en una viga principal.

anclaje adecuado para el refuerzo de los elementos. Sin embargo, la creciente utilización del concreto de alta resistencia que genera elementos con secciones transversales más pequeñas, y la utilización de barras de refuerzo con diámetros mayores, exigen ahora una mayor atención al diseño y al despiece de las uniones. Aunque el Código ACI proporciona muy poca orientación a este respecto, la publicación "Recommendations for Design of Beam-Column Joints in Monolithic Structures" del ACI Committee 352 (ver la referencia 10.6), ofrece los fundamentos para el diseño de las uniones tanto para estructuras corrientes como para estructuras que deben resistir cargas cíclicas considerables en el intervalo inelástico.

a. Clasificación de las uniones

La referencia 10.6 clasifica las uniones estructurales en dos categorías. La *tipo 1* que conecta elementos en estructuras corrientes diseñadas con base en la resistencia, según la parte fundamental del Código ACI, para resistir cargas gravitacionales y normales de viento. Otra *tipo 2* que conecta aquellos elementos proyectados para mantener la resistencia cuando se invierten las deformaciones dentro del intervalo inelástico, como elementos de una estructura diseñada para movimientos sísmicos, para cargas de viento muy grandes o para efectos de explosiones. En el presente capítulo se tendrán en cuenta únicamente las uniones del primer tipo.

La figura 10.2 ilustra una *unión interior* típica en un pórtico monolítico de concreto reforzado, donde las vigas 1 y 2 empatan en caras opuestas de la columna, y las vigas 3 y 4 empatan en las caras de la columna en dirección perpendicular. Una *unión exterior* incluiría las vigas 1, 2 y 3 o, en algunos casos, sólo las vigas 1 y 2. Una *unión de esquina* incluiría solamente las vigas 1 y 3, y, de manera ocasional, apenas una sola viga, por ejemplo la viga 1. Como se señala, una unión puede tener vigas que empatan desde dos direcciones perpendiculares, pero para propósitos de análisis y diseño cada dirección puede considerarse en forma independiente.

b. Cargas en los nudos y fuerzas resultantes

Los nudos deben diseñarse para resistir las fuerzas que las vigas y las columnas les transfieren incluyendo cargas axiales, flexión, torsión y cortante. La figura 10.3*a* ilustra las cargas que actúan en el diagrama de cuerpo libre de un nudo en una unión común de un pórtico sometido a cargas gravitacionales con momentos M_1 y M_2, que actúan en caras opuestas y en sentidos contrarios. En general, estos momentos no serán iguales y su diferencia se equilibrará por la suma de los momentos en las columnas M_3 y M_4. La figura 10.3*b* presenta las fuerzas resultantes que deben transmitirse a través del nudo. De manera similar, la figura 10.4*a* expone las cargas en un nudo de una estructura sometida a cargas que producen desplazamiento lateral. Las fuerzas correspondientes en el nudo son las de la figura 10.4*b*. Sólo para cargas laterales muy grandes, como las producidas por fuerzas sísmicas, los momentos en las caras opuestas del nudo actuarían en el mismo sentido, como se ilustra en la figura 10.5, generando cortantes horizontales muy grandes dentro del nudo.

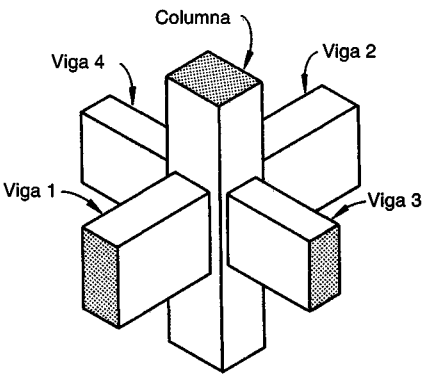
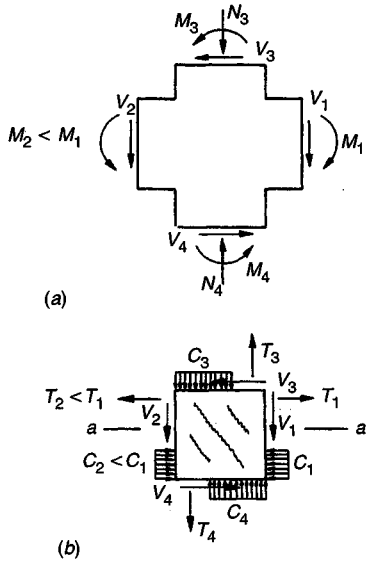


FIGURA 10.2
Unión monolítica interior típica entre vigas y columna.



FIGURAS 10.3
Cargas en el nudo y fuerzas resultantes de cargas gravitacionales: (*a*) fuerzas y momentos en el diagrama de cuerpo libre del nudo; (*b*) fuerzas internas resultantes.

De acuerdo con las recomendaciones del ACI Committee 352, las fuerzas que deben incluirse en el diseño de nudo no son las determinadas a partir del análisis convencional de pórtico; en lugar de esto, éstas se calculan con base en las *resistencias nominales de los elementos*. En el contacto entre una viga subreforzada común y la cara de la columna, la fuerza de tensión en la parte superior de la viga generada por el refuerzo para momento negativo se toma como $T = A_s f_y$ y la fuerza de compresión es $C = T$. El momento de diseño aplicado en la cara del nudo es el correspondiente a estas fuerzas máximas, $M_u = M_n = A_s f_y\,(d - a/2)$, en lugar del generado por el análisis global de pórtico. Observe que el coeficiente de reducción de resistencia usual ϕ no sería conservador en este caso porque reduciría las fuerzas de diseño del nudo; por tanto, no se incluye dicho valor en estos cálculos.

Una vez que se aplican los momentos determinados de esta manera a cada una de las caras del nudo, las fuerzas correspondientes de columna para el diseño de la unión son las que se requieren para mantener el nudo en equilibrio. Para ilustrar lo anterior, los cortantes de la columna V_3 y V_4 de las figuras 10.3*a* y 10.4*a* se calculan con base en el diagrama de cuerpo libre de la columna entre puntos de inflexión, como en la figura 10.5. Los puntos de inflexión pueden suponerse generalmente en la mitad de la altura de la columna, como se ilustra.

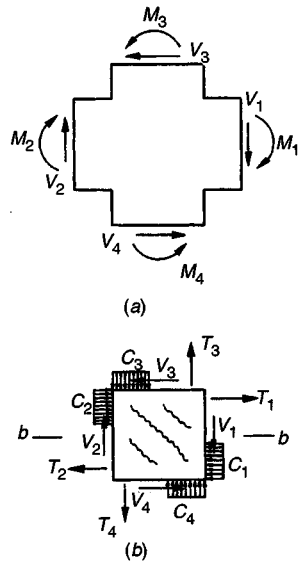


FIGURA 10.4
Cargas en el nudo y fuerzas resultantes de cargas laterales: (*a*) fuerzas y momentos en el diagrama de cuerpo libre del nudo; (*b*) fuerzas internas resultantes.

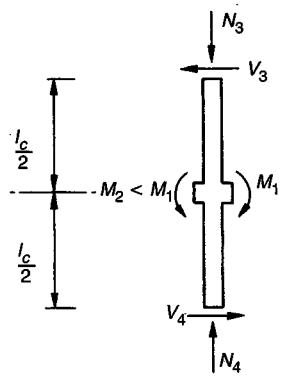


FIGURA 10.5
Diagrama de cuerpo libre de una columna interior y del nudo.

c. Resistencia a cortante de un nudo

Un nudo sometido a las fuerzas expuestas en las figuras 10.3*b* ó 10.4*b* desarrollará un patrón de agrietamiento diagonal ocasionado por los esfuerzos de tensión diagonal que, a su vez, resultan de las fuerzas normales y cortantes que se indican. El método usado por el ACI Committee 352 consiste en limitar la fuerza cortante en un plano horizontal a través del nudo a un valor establecido mediante ensayos. La base para el diseño es

$$V_u \leq \phi V_n \tag{10.1}$$

donde V_u es la fuerza cortante aplicada, V_n es la resistencia nominal a cortante del nudo y ϕ se toma igual a 0.85.

La fuerza cortante V_u debe calcularse en un plano horizontal a la mitad de la altura de la unión, como el plano *a–a* de la figura 10.3*b* o el plano *b–b* de la figura 10.4*b*, sumando las fuerzas horizontales que actúan en el nudo por encima de este plano. Por ejemplo, en la figura 10.3*b*, el cortante en el nudo en el plano *a–a* es

$$V_u = T_1 - T_2 - V_3$$

y en la figura 10.4*b*, el cortante en el nudo en el plano *b-b* es

$$\begin{aligned} V_u &= T_1 + C_2 - V_3 \\ &= T_1 + T_2 - V_3 \end{aligned}$$

La resistencia nominal a cortante V_n la determina la ecuación

$$V_n = \gamma \sqrt{f'_c} b_j h \tag{10.2}$$

donde b_j es el ancho efectivo del nudo en pulgadas, h es el espesor en pulgadas de la columna en dirección de la carga que se analiza y $\sqrt{f'_c}$ se expresa en unidades de lb/pulg^2. El valor de f'_c utilizado en la ecuación (10.2) no debe tomarse mayor que 6000 lb/pulg^2 aunque la resistencia real pueda ser mayor, como consecuencia de la deficiente información experimental relacionada con las conexiones en los casos que se utiliza concreto de alta resistencia.

El coeficiente γ de la ecuación (10.2) depende del confinamiento de nudo proporcionado por las vigas que llegan hasta él, de la siguiente manera:

Unión interior	$\gamma = 24$
Unión exterior	$\gamma = 20$
Unión de esquina	$\gamma = 15$

Las definiciones de las uniones interior, exterior y de esquina se expusieron en la sección 10.2a y aparecen en la figura 10.2. Sin embargo, existen las siguientes restricciones que deben aplicarse cuando el propósito sea determinar el valor de γ:

1. Una *unión interior* tiene vigas que llegan desde los cuatro lados del nudo. Sin embargo, para que se clasifique como unión interior, las vigas deben cubrir al menos $\frac{3}{4}$ del ancho de la columna y la altura total de la viga de menor altura no debe ser menor que $\frac{3}{4}$ de la altura total de la viga mayor. Las uniones interiores que no satisfagan este requisito deben clasificarse como *uniones exteriores*.
2. Una *unión exterior* tiene al menos dos vigas que empatan en caras opuestas del nudo. Sin embargo, para que se clasifique como unión exterior, los anchos de las vigas en las dos caras opuestas del nudo deben cubrir al menos $\frac{3}{4}$ del ancho de la columna y las alturas de estas dos vigas no deben ser menores que $\frac{3}{4}$ de la altura total de la viga mayor que llega hasta el nudo. Las uniones que no satisfagan este requisito deben clasificarse como *uniones de esquina*.

Para nudos en los cuales llegan vigas de dos direcciones perpendiculares, como en el caso de una unión interior común, el cortante horizontal debe verificarse de modo independiente en cada dirección. Aunque en este caso el nudo se diseña para resistir cortante en las dos direcciones, la unión se clasifica sólo una vez (es decir, sólo se selecciona un valor de γ con base en la clasificación de la unión y este valor se utiliza para calcular V_n cuando se revisa la capacidad de diseño a cortante en cada dirección).

Con respecto a las recomendaciones del ACI Committee 352, el ancho efectivo del nudo b_j que debe utilizarse en la ecuación (10.2) depende del ancho transversal de las vigas que llegan hasta la columna, al igual que del ancho transversal de la columna. Con relación al ancho de la viga b_b, si sólo llega una viga hasta la columna en dirección de la carga, entonces b_b es el mismo ancho de esa viga. Si existen dos vigas en dirección del cortante y cada una llega a cada cara de la columna, entonces b_b es el promedio de los dos anchos de vigas. Con referencia a la figura 10.6*a*, cuando el ancho de la viga es menor que el de la columna, el ancho efectivo del nudo es el promedio de los

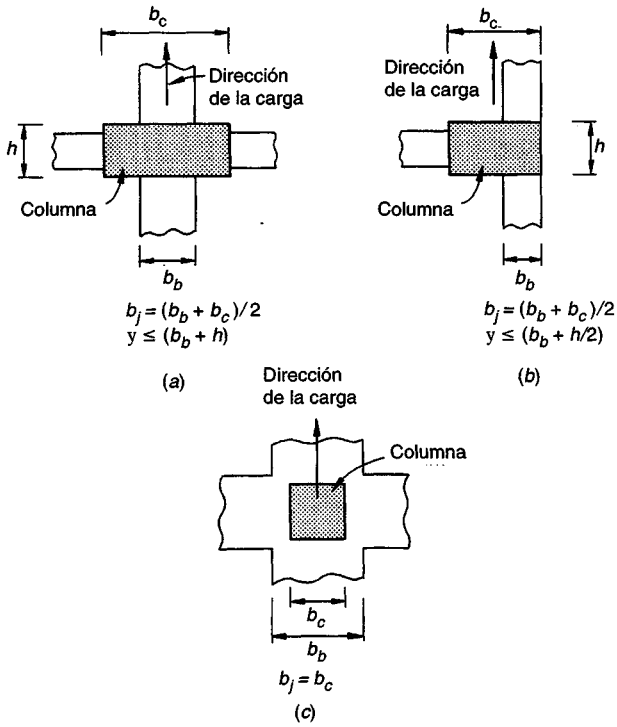


FIGURA 10.6
Determinación del ancho efectivo b del nudo: (*a*) unión interior; (*b*) unión exterior o de esquina; (*c*) viga más ancha que la columna.

anchos de la viga y de la columna, pero sin exceder el ancho de la viga más la mitad de la altura h de la columna en cada lado de la viga. Es decir,

$$b_j = \frac{b_b + b_c}{2} \quad \text{y} \quad b_j \leq b_b + h \tag{10.3}$$

Cuando la viga empata a ras con una de las caras de la columna, lo cual es común en las uniones exteriores, el mismo criterio resulta en un ancho efectivo del nudo de

$$b_j = \frac{b_b + b_c}{2} \quad \text{y} \quad b_j \leq b_b + \frac{h}{2} \tag{10.4}$$

como aparece en la figura 10.6*b*. Si el ancho b_b de la viga *excede* al de la columna (lo cual está permitido solamente para uniones tipo 1), el ancho efectivo b_j del nudo es igual al ancho b_c de la columna, como se indica en la figura 10.6*c*.

d. Confinamiento y refuerzo transversal en el nudo

El comportamiento exitoso de una unión viga-columna depende principalmente del confinamiento lateral del nudo. Este confinamiento tiene dos beneficios: (*a*) aumenta la resistencia del núcleo de concreto y mejora su capacidad de deformación, y (*b*) evita el pandeo hacia afuera de las barras verticales en la columna. Éste puede proporcionarse bien sea mediante las vigas que llegan hasta el nudo o por flejes especiales en la columna colocados dentro de la zona de nudo.

El confinamiento mediante vigas se ilustra en la figura 10.7. De acuerdo con las recomendaciones del ACI Committee 352, si llegan vigas a las cuatro caras del nudo como en la figura 10.7*a*, el confinamiento se considera adecuado si el ancho de cada viga es por lo menos $\frac{3}{4}$ del ancho de la cara de la columna que se intersecta y si no quedan más de 4 pulgadas de la cara de la columna expuestas a cada lado de la viga. Cuando las vigas llegan a dos caras de la unión únicamente, como en la figura 10.7*b*, se puede suponer un confinamiento ideal *en la dirección de las vigas* si el ancho de cada una es por lo menos igual a $\frac{3}{4}$ del de la columna, y si no quedan más de 4 pulgadas de concreto expuestas a cada lado de las vigas. En la otra dirección debe proveerse refuerzo transversal para lograr el confinamiento. La presencia de una tercera viga, pero no de una cuarta, en la dirección perpendicular, no modifica el requisito para el refuerzo transversal en esa dirección.

Según los criterios anteriores, si las vigas no proporcionan un confinamiento apropiado, debe suministrarse entonces refuerzo transversal. Si se requiere acero de confinamiento, éste debe cumplir todos los requisitos usuales para flejes de columnas (ver la sección 8.2 del capítulo 8). También, deben existir al menos dos filas de flejes en el nudo entre el acero a flexión superior y el inferior de las vigas, y el espaciamiento vertical centro a centro de estos flejes no debe exceder 12 pulg (30 cm).

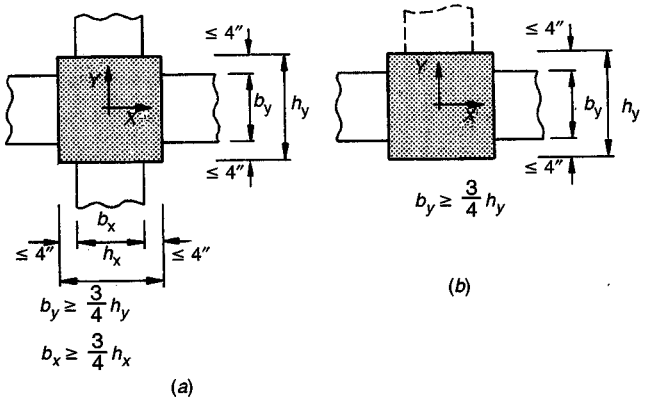


FIGURA 10.7
Confinamiento de nudos de concreto mediante vigas: (*a*) confinamiento en las direcciones X y Y; (*b*) confinamiento en la dirección X únicamente.

Si la unión viga-columna hace parte del sistema primario para resistir cargas laterales diferentes de las sísmicas, este espaciamiento máximo debe reducirse a 6 pulg (15 cm).

e. Anclaje y desarrollo del refuerzo de vigas

Para uniones interiores, el refuerzo a flexión de una viga que penetra en una cara del nudo se prolonga normalmente a través del nudo para convertirse en el acero a flexión para la viga que llega a la cara opuesta. Por consiguiente, para las situaciones de carga asociadas con las uniones de tipo 1, el desprendimiento del acero es poco probable y no se hacen recomendaciones especiales. Sin embargo, para uniones exteriores o de esquina, donde una o más vigas no continúan más allá del nudo, se presenta un problema de anclaje de las barras. La sección crítica para el desarrollo de resistencia a fluencia del acero de la viga está en la cara de la columna. Las dimensiones de la columna rara vez permiten el desarrollo del acero que entra en la unión considerando únicamente empotramiento en línea recta y, por lo general, se requieren ganchos para el refuerzo negativo de la viga. Se utilizan ganchos a 90° que se extienden hacia y más allá de la mitad del ancho del nudo. Si las barras inferiores que llegan a la unión necesitan desarrollar su resistencia $A_s f_y$ en la cara de la unión, como se requiere en vigas que forman parte del sistema primario de resistencia a cargas laterales, también deberán tener ganchos a 90°, en este caso doblados hacia arriba para extenderse hacia la mitad de la altura del nudo. Los requisitos del capítulo 5 para el desarrollo de las barras con ganchos son aplicables en ambos casos, incluyendo los factores de modificación por recubrimiento de concreto y por confinamiento mediante flejes o estribos.

Ejemplo 10.1. Diseño de una unión exterior tipo 1. La unión exterior de la figura 10.8 forma parte de un pórtico de concreto reforzado, continuo y monolítico, diseñado para resistir sólo cargas gravitacionales. Las dimensiones $b \times h$ de la sección del elemento y el refuerzo son los que se ilustran. La altura entre pisos del pórtico es de 12 pies. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4000$ lb/pulg² y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg². Diseñe la unión siguiendo las recomendaciones del informe del ACI Committee 352.

Solución. En primer lugar debe realizarse un diagrama cuidadoso de la geometría de la unión para garantizar que las barras de las vigas y de las columnas no interfieran entre sí y que el vaciado y la vibración del concreto puedan llevarse a cabo. En este caso, la disposición de las barras se simplifica en forma significativa si se establece que las columnas son 4 pulg más anchas que las vigas. El acero de las columnas se coloca con el recubrimiento usual de 1.5 pulg de concreto por fuera de los flejes No. 4.

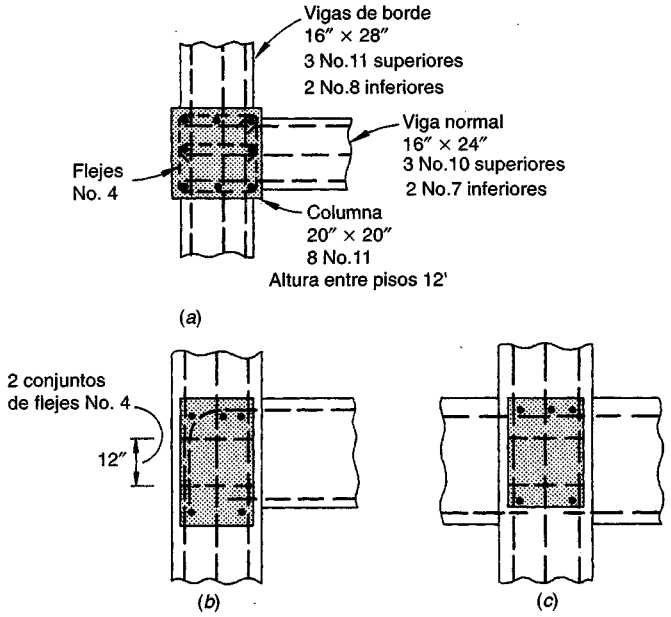


FIGURA 10.8
Unión viga-columna exterior para el ejemplo 10.1: (*a*) vista en planta; (*b*) sección transversal a través de la viga de borde; (*c*) sección transversal a través de la viga normal. Observe que no se muestran los estribos de la viga ni los flejes de la columna por fuera de la unión.

Las barras de la parte superior e inferior de la viga se ubican justo dentro de las barras más exteriores de la columna. La pequeña desviación necesaria para que la barra central de la parte superior de la viga no se cruce con las barras centrales de la columna no tiene mayor importancia. Las barras superiores de la viga de borde se disponen justo debajo de las barras superiores de la viga normal, excepto para la barra más exterior de borde que está por encima del gancho, como aparece en la figura 10.8*b*. Las barras inferiores penetran en el nudo a diferentes niveles sin interferencia.

Para el refuerzo superior de borde no existen problemas de anclaje debido a que este refuerzo es continuo a través de la unión. Sin embargo, deben proporcionarse ganchos al acero normal superior de la viga para desarrollar su resistencia a la fluencia en la cara de la columna. Con referencia a la tabla 5.3 del capítulo 5, la longitud básica de desarrollo para barras No. 10 con ganchos es

$$l_{hb} = \frac{1200 d_b}{\sqrt{f'_c}} = \frac{1200 \times 1.27}{\sqrt{4000}} = 24.1 \text{ pulg}$$

Al estar dentro de las barras de la columna, las barras superiores de la viga tienen un recubrimiento lateral de 1.5 + 0.5 + 1.4 = 3.4 pulg. Este valor sobrepasa 2.5 pulg, de manera que puede aplicarse un factor de modificación de 0.7 y la longitud de desarrollo requerida con gancho es

$$l_{dh} = 24.1 \times 0.7 = 16.9 \text{ pulg}$$

Si las barras con ganchos se llevan hacia abajo, justo dentro de los flejes de la columna, la longitud real de empotramiento es 20.0 – 1.5 – 0.5 = 18.0 pulg, valor que excede 16.9 pulg, de manera que se asegura un desarrollo adecuado. Ninguna de las vigas forma parte del sistema primario de resistencia a cargas laterales del pórtico, de modo que las barras inferiores pueden llevarse simplemente hasta 6 pulg dentro de la cara del nudo e interrumpirse en este punto.

En seguida se debe revisar la resistencia a cortante del nudo. En la dirección de las vigas de borde, los momentos aplicados al nudo serán aproximadamente iguales y actuarán en sentidos opuestos, así que puede esperarse un cortante en el nudo muy bajo en esa dirección. Sin embargo, la viga normal aplicará fuerzas cortantes horizontales al nudo. Con referencia a la figura 10.9*a*, la cual muestra un diagrama de cuerpo libre de la mitad superior del nudo, la fuerza máxima generada por el acero superior de la viga es

$$A_s f_y = 3.79 \times 60 = 227 \text{ klb}$$

El momento en el nudo se calcula con base en esta fuerza de tensión. La altura efectiva de la viga normal es $d = 24.0 - 1.5 - 0.5 - 1.27/2 = 21.4$ pulg y con una altura del bloque de esfuerzos $a = A_s f_y / 0.85 f'_c b_w = 227/(0.85 \times 4 \times 16) = 4.17$ pulg, el momento de diseño es

$$M_u = M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = \frac{227}{12}\left(21.4 - \frac{4.17}{2}\right) = 365 \text{ klb-pie}$$

Los cortantes en las columnas correspondientes a este momento en la unión se encuentran con base en el diagrama de cuerpo libre de la columna entre los puntos de inflexión supuestos a la mitad de la altura, como se muestra en la figura 10.9*b*: $V_{col} = 365/12 = 30.4$ klb. Entonces, sumando las fuerzas horizontales en el nudo por encima del plano *a-a* a la mitad de la altura, el cortante en el nudo en la dirección de la viga normal es

$$V_u = 227 - 30.4 = 197 \text{ klb}$$

Con el propósito de calcular la resistencia a cortante del nudo, la unión puede clasificarse como exterior puesto que el ancho de 16 pulg de las vigas de borde excede $\frac{3}{4}$ del ancho de la columna de 15 pulg,

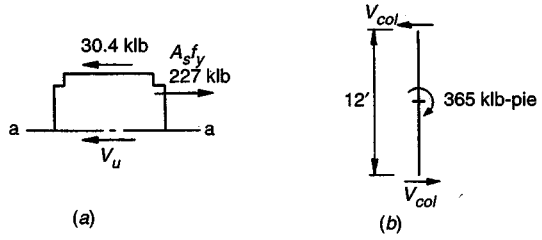


FIGURA 10.9
Bases para el cálculo del cortante en el ejemplo 10.1: (*a*) fuerzas horizontales en el diagrama de cuerpo libre del nudo; (*b*) diagrama de cuerpo libre de la columna entre puntos de inflexión.

y estas vigas de borde son las de mayor altura que llegan al nudo. Entonces, $\gamma = 20$. El ancho efectivo del nudo es

$$b_j = \frac{b_b + b_c}{2} = \frac{16 + 20}{2} = 18 \text{ pulg}$$

pero no debe exceder $b_b + h = 16 + 20 = 36$ pulg, que no controla en este caso. Entonces, las resistencias a cortante nominal y de diseño del nudo son, respectivamente

$$V_n = \gamma\sqrt{f'_c}b_j h = 20\sqrt{4000} \times 18 \times \frac{20}{1000} = 455 \text{ klb}$$

$$\phi V_n = 0.85 \times 455 = 387 \text{ klb}$$

El cortante aplicado $V_u = 197$ klb no excede la resistencia de diseño, de manera que el cortante es satisfactorio.

Las vigas de borde suministran el confinamiento necesario en su dirección debido a que el ancho de 16 pulg de estas vigas excede $\frac{3}{4}$ del ancho de la columna y no están expuestas más de 4 pulg de la cara de la columna a cada lado de la viga. Sin embargo, en la dirección de la viga normal sí es necesario proporcionar confinamiento mediante flejes en la columna dentro del nudo. Se proveerán dos conjuntos de flejes No. 4, como aparece en las figuras 10.8*a* y 10.8*b*. En este caso, la distancia libre entre barras de columna es 5.89 pulg, menor que 6 pulg, así que estrictamente no se requiere el fleje transversal de una sola rama. Sin embargo, éste mejora el comportamiento del nudo, ayuda a evitar el pandeo hacia afuera de la barra central No.11 de la columna e incrementa muy poco el costo de construcción, de modo que se especificará como se ilustra en la figura 10.8*a*. Observe que un gancho a 90° en uno de los extremos, en vez del gancho de 135° expuesto, cumpliría los requisitos para el anclaje de flejes del Código ACI y facilitaría la colocación del acero.

Ejemplo 10.2. Diseño de una unión interior tipo 1. La figura 10.10 ilustra el diseño propuesto para una unión interior de un edificio de concreto reforzado con las dimensiones de vigas y columnas y el refuerzo que se indican en la figura. El pórtico del edificio debe resistir las cargas gravitacionales y las cargas normales de viento. Diseñe y detalle el refuerzo en el nudo.

Solución. Puesto que la unión forma parte del sistema primario de resistencia a cargas laterales, tanto las barras inferiores como las superiores de las vigas se prolongan en línea recta a través de la unión para lograr un buen anclaje. En tales casos, es conveniente por lo general empalmar por traslapo el acero inferior cerca del punto de inflexión de las vigas.

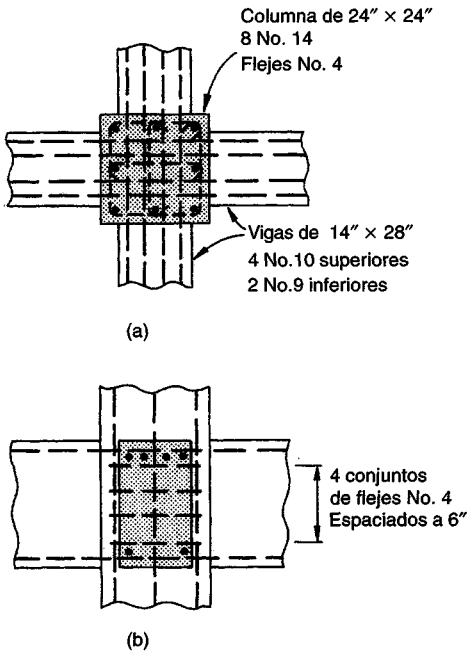


FIGURA 10.10
Nudo interior viga-columna para el ejemplo 10.2: (*a*) vista en planta; (*b*) sección a través de la viga.

En las figuras 10.10*a* y 10.10*b*, las barras superiores e inferiores de la viga que penetran en el nudo en una dirección deben pasar por debajo y por encima, respectivamente, de las barras correspondientes en la dirección perpendicular. Se supone que esto se ha tenido en cuenta ajustando las alturas efectivas al diseñar las vigas. Puesto que la columna es 10 pulg más ancha que las vigas, las barras más exteriores de la viga pueden pasarse por dentro de las barras de esquina de la columna sin interferencia. Se utilizan cuatro barras para el acero superior de la viga con el fin de evitar interferencia con la barra central de la columna.

Inclusive la combinación de cargas de viento normales con cargas gravitacionales no debe producir un desbalance considerable de los momentos en las caras opuestas de esta columna interior y puede suponerse en forma segura que el cortante en el nudo no va a ser crítico. Sin embargo, el confinamiento del nudo que suministran las vigas se considera inadecuado, porque: (*a*) el ancho de la viga de 14 pulg es menor que $\frac{3}{4}$ de la columna de 24 pulg , y (*b*) la cara expuesta de la columna por fuera de la viga es (24 – 14)/2 = 5 pulg, que excede el límite de 4 pulg. En consecuencia, deben adicionarse flejes transversales en la columna dentro del nudo para lograr el confinamiento. Para la columna cuadrada de 24 pulg, el espaciamiento entre las barras verticales excede 6 pulg, de manera que es necesario, de acuerdo con el Código ACI, proveer flejes para soportar las barras intermedias al igual que las barras de esquina. Se utilizan tres flejes para cada conjunto, como aparece en la figura 10.10*a*. Puesto que la unión hace parte del sistema de resistencia a cargas laterales, el máximo espaciamiento vertical de estos conjuntos de flejes es 6 pulg. Cuatro conjuntos de flejes dentro del nudo, como se indica en la figura 10.10*b*, son ideales para satisfacer este requisito.

f. Uniones con vigas anchas

En edificios de varios pisos, con el fin de reducir la altura de construcción de cada piso y poder reducir así la altura total del edificio, se utilizan en algunos casos vigas anchas de poca altura. El diseño de las uniones para los casos en que las vigas son más anchas que las columnas, introduce algunos conceptos importantes que no trata la publicación del ACI Committee 352, aunque puede aplicarse la mayor parte de sus disposiciones. Es importante equilibrar todas las fuerzas que se aplican al nudo. La tensión producida por las barras superiores, para el caso usual en que el ancho de la viga no es mayor que el de la columna, se equilibrará con la componente horizontal de un puntal diagonal a compresión dentro del nudo. A su vez, la compresión diagonal en los extremos de este puntal está en equilibrio con la compresión en la viga y con la fuerza axial de la columna (ver la sección 10.3 para una descripción más completa del modelo puntal-tensor). Si las barras más exteriores de la viga normal pasan *por fuera* de la columna, como puede ocurrir en diseños con vigas anchas, el puntal diagonal también estará por fuera de la columna y no habrá compresión vertical de equilibrio en sus extremos superior e inferior. Las partes exteriores de la viga presentarán una tendencia a fallar por cortante ocasionándose así una falla prematura.

Hay dos posibilidades para solucionar este problema. La primera requiere que todo el acero superior de la viga se coloque dentro del ancho de la columna y, preferiblemente, por dentro de las barras más exteriores de la columna. En la segunda, si las barras de la viga normal se llevan por fuera del nudo, pueden proporcionarse estribos verticales a través del nudo para soportar la componente vertical de la fuerza generada por el puntal a compresión.

En casos extremos pero no inusuales, se utilizan vigas muy anchas, varias veces más anchas que la columna, con una altura de la viga de apenas dos veces el espesor de la losa. En estos casos, un método seguro para el diseño de la unión consiste en considerar la viga ancha como una losa y seguir las recomendaciones para las conexiones losa-columna incluidas en el capítulo 13.

Ejemplo 10.3. Diseño de una unión exterior tipo 1 con vigas anchas. La figura 10.11 ilustra una unión exterior común en el piso de una estructura con vigas anchas, diseñada para resistir cargas gravitacionales. En este caso, las vigas en cada una de las direcciones son 8 pulg más anchas que las correspondientes dimensiones de la columna. Revise la geometría propuesta y la resistencia al cortante de la unión, y diseñe el refuerzo transversal en la misma. Las resistencias de los materiales son f'_c = 4000 lb/pulg^2 y f_y = 60,000 lb/pulg^2. La altura del piso es 12 pies.

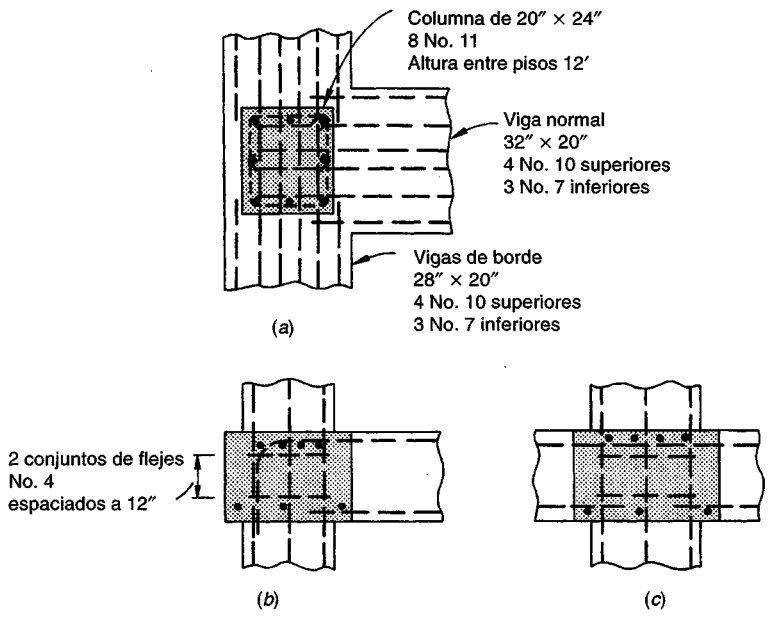


FIGURA 10.11
Nudo exterior viga-columna del ejemplo 10.3: (*a*) vista en planta; (*b*) sección a través de la viga de borde; (*c*) sección a través de la viga normal.

Solución. Para este caso, todo el acero superior de la viga normal se lleva hasta la parte interior del núcleo de la unión, terminando en ganchos a 90° en la parte exterior de la columna. El acero superior de las vigas de borde es continuo a través de la unión pero pasa por la parte interna del núcleo de la misma. En cada caso, las barras inferiores de las vigas pueden distribuirse a lo ancho de la viga y se llevan únicamente 6 pulg dentro de la unión, tanto para las vigas de borde como para la normal, porque la unión no es parte del sistema primario de resistencia a cargas laterales. Los estribos de la viga por fuera del nudo, no expuestos en la figura 10.11, se llevarán por fuera de las barras inferiores más externas y se doblarán hacia arriba. Ellos requerirán barras horizontales de pequeño diámetro por dentro de los ganchos para lograr un anclaje apropiado en los extremos superiores de sus ramas verticales.

Si se calcula la longitud de desarrollo requerida para las barras superiores No. 10 de la viga normal, se obtiene

$$l_{hb} = \frac{1200 d_b}{\sqrt{f'_c}} = \frac{1200 \times 1.27}{\sqrt{4000}} = 24.1 \text{ pulg}$$

Con un recubrimiento lateral muy por encima de 2.5 pulg, puede aplicarse un factor de modificación de 0.7 y la longitud necesaria de desarrollo con gancho es

$$l_{dh} = 24.1 \times 0.7 = 16.9 \text{ pulg}$$

Si los ganchos se llevan hacia abajo en el plano de las barras más externas de la columna, el empotramiento disponible es 20.0 – 1.5 – 0.5 = 18.0 pulg, que sobrepasa el mínimo empotramiento requerido.

Los momentos provenientes de las vigas de borde y que actúan a cada lado del nudo son aproximadamente iguales, de manera que no habrá problemas de cortante en esa dirección. En dirección de la viga normal sí debe revisarse el cortante. La fuerza de tensión aplicada por las barras superiores es $A_s f_y = 5.06 \times 60 = 304$ klb. La altura del bloque de esfuerzos a compresión con la viga es $a = A_s f_y / 0.85 f'_c b_w = 304/(0.85 \times 4 \times 32) = 2.79$ pulg, y el momento correspondiente es

$$M_u = M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = \frac{304}{12}\left(17.6 - \frac{2.79}{2}\right) = 411 \text{ klb-pie}$$

Los cortantes en la columna se basan en un diagrama de cuerpo libre equivalente al de la figura 10.9*b* y son iguales a $V_{col} = 411/12 = 34.3$ klb. Así que el cortante en el nudo, a la mitad de la altura es $V_u = 304 - 34.3 = 270$ klb.

Las vigas de borde proveen confinamiento en el ancho total del nudo en su dirección y la unión puede clasificarse como exterior, de modo que $\gamma = 20$. En la dirección perpendicular, cuando el ancho de la viga excede el de la columna, el ancho b_j del nudo debe tomarse igual al de la columna (24 pulg en este caso). Las resistencias a cortante nominal y de diseño son respectivamente:

$$V_n = \gamma\sqrt{f'_c}b_j h = 20\sqrt{4000} \times 24 \times 20 = 607 \text{ klb}$$
$$\phi V_n = 0.85 \times 607 = 516 \text{ klb}$$

Puesto que la resistencia de diseño está muy por encima del cortante aplicado de 270 klb, los requisitos de cortante se cumplen satisfactoriamente.

De otro lado, debe suministrarse acero de confinamiento transversal en dirección de la viga normal, entre las barras superiores e inferiores de esta viga con un espaciamiento que no exceda 12 pulg. Se utilizarán dos conjuntos de flejes de columna No. 4, como aparece en la figura 10.11. Además del aro alrededor de las barras externas, se requiere un fleje transversal de una sola rama para las barras centrales de la columna porque la distancia libre entre las barras de la columna excede 6 pulg

10.3 MODELO PUNTAL-TENSOR (*STRUT-AND-TIE*) PARA EL COMPORTAMIENTO DE LAS UNIONES

Aunque el informe del ACI Committee 352 (ver la referencia 10.6) es una contribución importante al diseño seguro de uniones con ciertas configuraciones estándares, las recomendaciones se basan principalmente en resultados de ensayos experimentales. En consecuencia, ellas deben restringirse a uniones cuya geometría coincide de cerca con la de las uniones ensayadas. Esto conduce a muchas limitaciones geométricas en apariencia arbitrarias y se brinda muy poca orientación para el diseño de uniones que no cumplen estas restricciones. Como ilustración de lo anterior están las uniones de vigas anchas analizadas en la sección 10.2*f*. Tales uniones se mencionan apenas de manera muy breve en el informe.

Existen buenos modelos físicos para estudiar muchos aspectos del comportamiento del concreto reforzado, por ejemplo para predecir la resistencia a la flexión de una viga o la resistencia de una columna cargada excéntricamente, pero las recomendaciones del Committee 352 no hacen evidente ningún modelo físico que permita estudiar el comportamiento de una unión. Por esta razón, entre otras, se ha dado cada vez mayor atención al llamado *modelo puntal-tensor* como base para el diseño de "regiones discontinuas" o "regiones perturbadas", como es el caso de las uniones (ver las referencias 10.7, 10.8, 10.9 y 10.10).

Las características esenciales del modelo puntal-tensor para el comportamiento de uniones pueden entenderse mediante la figura 10.12, que presenta una unión de un pórtico sujeto a carga lateral, con momentos en el sentido de las agujas del reloj generados por las vigas y equilibrados por momentos contrarios producidos por las columnas. La línea de acción de las fuerzas horizontales C_1 y T_2 intersecta la de las fuerzas verticales C_3 y T_4 en una *zona nodal*, donde la fuerza resultante se equilibra mediante un puntal diagonal a *compresión dentro del puntal*. En el extremo inferior

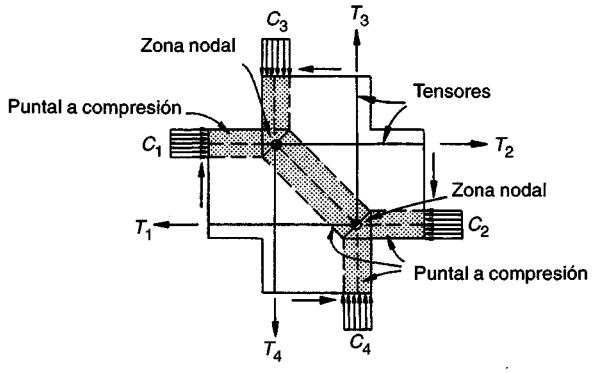


FIGURA 10.12
Modelo puntual-tensor para el comportamiento de una unión viga-columna.

del puntal, la compresión diagonal equilibra la resultante de las fuerzas horizontales T_1 y C_2 y la de las fuerzas verticales T_3 y C_4. Las barras de tensión deben anclarse de modo adecuado con prolongaciones dentro y a través del nudo o, en el caso de barras discontinuas (como el acero superior de las vigas en una unión exterior), mediante ganchos. El concreto dentro de la zona nodal se somete a un estado de esfuerzos biaxial o, en muchos casos, triaxial.

Con este modelo simple se visualiza fácilmente el flujo de fuerzas en una unión, se confirma el cumplimiento de los requisitos de equilibrio y se enfatiza la necesidad de un anclaje adecuado de las barras. En un análisis basado en su totalidad en el modelo puntal-tensor mediante una atención apropiada a las deformaciones dentro de la unión, se asegura un buen funcionamiento con el control del agrietamiento.

De acuerdo con el modelo puntal-tensor, la principal función de los flejes de columna requeridos dentro de la región del nudo por los procedimientos convencionales de diseño, además de prevenir el pandeo hacia afuera de las barras verticales en la columna, es la de confinar el concreto en el puntal de compresión, lo cual mejora tanto su resistencia como su ductilidad, y controlar el agrietamiento que puede ocurrir por la tensión diagonal perpendicular al eje del puntal a compresión. Los puntales y tensores cargados uniaxialmente sostienen la carga principal.

El modelo puntal-tensor no sólo ofrece una valiosa interpretación del comportamiento de las uniones corrientes viga-columna, sino que también representa una herramienta importante para el diseño de uniones que están por fuera del rango limitado de las analizadas en la referencia 10.6. La proyección más amplia de los métodos de diseño de las uniones puede incorporar de hecho esta metodología. En las secciones que siguen en este capítulo, se considerarán diferentes tipos de uniones que se presentan comúnmente en estructuras de concreto reforzado, para las cuales el modelo puntal-tensor proporciona una ayuda fundamental en el desarrollo del detallamiento adecuado de las barras.

10.4 UNIONES VIGA SECUNDARIA-VIGA PRINCIPAL

En construcciones de concreto, las vigas secundarias de piso están soportadas por vigas principales, como se ilustra en las figuras 10.13*a* y *b*. A menudo se supone que la reacción generada por la viga de piso está más o menos distribuida uniformemente en toda la altura de la interfase entre la viga

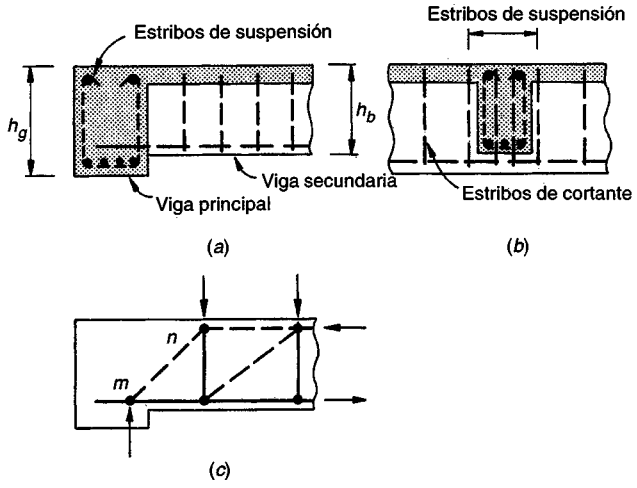


FIGURA 10.13
Viga principal que soporta una viga secundaria: (*a*) sección transversal a través de la viga principal que presenta los estribos de suspensión; (*b*) sección transversal a través de la viga secundaria; (*c*) modelo de armadura que muestra la transferencia de la carga de la viga secundaria hacia la viga principal, para una carga cercana a la última.

secundaria y la viga principal. Este supuesto incorrecto está probablemente fomentado por el método de diseño a cortante "$V_c + V_s$" del Código ACI, que utiliza un esfuerzo cortante nominal promedio en el concreto, $v_c = V_c/b_w d$, lo cual sugiere una distribución uniforme de esfuerzos cortantes a través del alma de la viga.

Como lo indican los ensayos experimentales, el comportamiento real de una viga agrietada diagonalmente es muy diferente y el flujo de fuerzas puede representarse de manera un poco simplificada mediante el modelo de armadura de la viga que aparece en la figura 10.13*c* (ver la referencia 10.11). La reacción principal se transmite desde la viga secundaria a la viga principal mediante un puntal diagonal a compresión *mn*, que aplica su empuje cerca de la parte inferior en la viga principal de carga. El hecho de no considerar este empuje puede generar un fracturamiento del concreto en la parte inferior de la viga principal seguido del colapso de la viga secundaria. Un ejemplo de la falta de soporte para la compresión diagonal en la intersección de una viga secundaria y su viga principal de soporte se ilustra en la figura 10.14.

Un despiece apropiado del acero en la región de una unión como ésta requiere el uso de estribos "de suspensión" bien anclados a la viga principal, como se presenta en las figuras 10.13*a* y 10.13*b*, para absorber el empuje hacia abajo del puntal a compresión en el extremo de la viga (ver las referencias 10.12 y 10.13). Estos estribos funcionan como flejes a tensión para transmitirla reacción de la viga secundaria hasta la zona de compresión de la viga principal, donde ésta puede equilibrarse mediante los puntales diagonales a compresión en la viga principal. Los estribos de suspensión, *adicionales* a los estribos corrientes en la viga principal requeridos por cortante, pueden diseñarse con base en el equilibrio de parte o de toda la reacción que genera la viga secundaria, teniendo en cuenta que los estribos de suspensión se someten al esfuerzo de fluencia f_y, para un estado mayorado de cargas. Si la viga secundaria y la viga principal tienen la misma altura, los estribos de suspensión deben tomar la totalidad de la reacción. Sin embargo, si la altura de la viga secundaria es mucho menor que la de la viga principal, los estribos de suspensión pueden no ser necesarios. La referencia 10.12 sugiere que los estribos de suspensión se coloquen para resistir una fuerza hacia abajo V_s^*, donde

$$V_s^* = \frac{h_b}{h_g} V \tag{10.5}$$

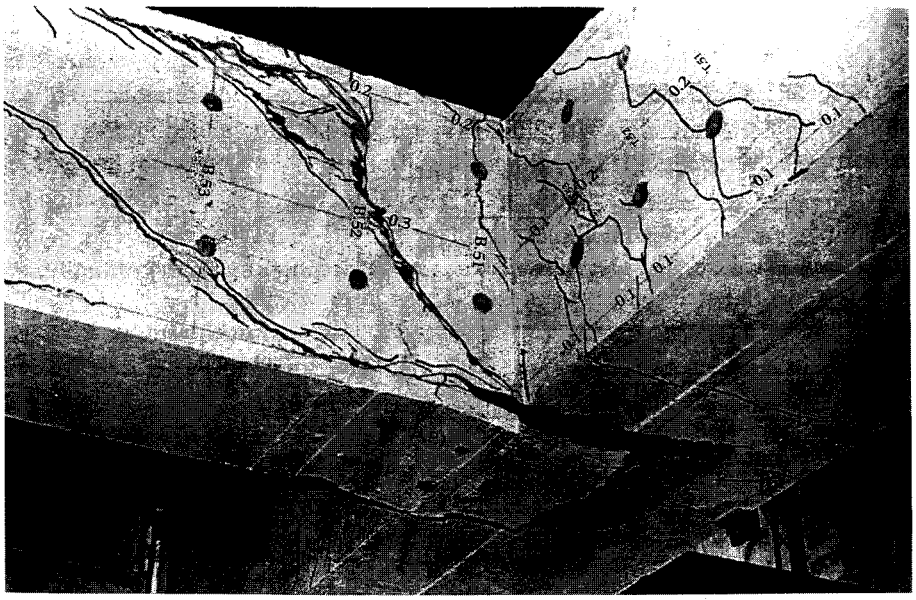


FIGURA 10.14
Falla ocasionada por la falta de soporte para la compresión diagonal en una unión viga secundaria-viga principal.

Aquí h_b es la altura de la viga secundaria, h_g es la altura de la viga principal de carga, como se indica en la figura 10.13, y V es la reacción en el extremo producida por la viga secundaria.

Los estribos de suspensión tampoco serán necesarios si el cortante mayorado en la viga secundaria es menor que ϕV_c (por ejemplo, el caso usual para viguetas en una dirección), puesto que en tal caso no se formarán grietas diagonales en el elemento soportado. Los estimativos del modelo de armadura no serían válidos y la reacción se distribuiría con mayor uniformidad a través de la altura.

Los estribos de suspensión deben pasar alrededor del refuerzo a flexión de la viga principal, como se ilustra en la figura 10.13. Si la viga secundaria y la viga principal tienen la misma altura, las barras principales a flexión en la viga principal deben pasar por debajo de las que penetran en la conexión procedentes de la viga secundaria, con el fin de proveer la mejor plataforma de reacción posible para el puntal diagonal a compresión.

10.5 VIGAS DE APOYO

En construcciones de concreto prefabricado se utilizan con frecuencia vigas principales en forma de L o de T invertidas para suministrar un asiento o borde de apoyo que soporte las vigas prefabricadas que llegan hasta la viga principal de carga desde la dirección perpendicular. En la figura 10.15 aparecen secciones transversales típicas de vigas principales de apoyo. La reacción en el extremo de las vigas secundarias introduce una gran carga concentrada cerca de la parte inferior de estas vigas principales, lo cual exige refuerzo especial en el borde sobresaliente y en el alma de la viga.

El diseño de este refuerzo se facilita mediante el uso del modelo puntal-tensor, como se ilustra en la figura 10.16. La reacción hacia abajo de la viga soportada crea un abanico de compresión en el borde, que distribuye la reacción a lo largo de una longitud mayor que la de la platina de

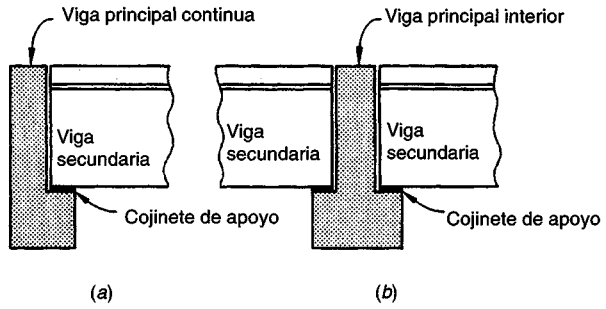


FIGURA 10.15
Vigas principales de apoyo que soportan vigas T prefabricadas: (*a*) viga principal en L que proporciona apoyo exterior a una viga T; (*b*) viga T invertida que sostiene las reacciones de dos vigas T.

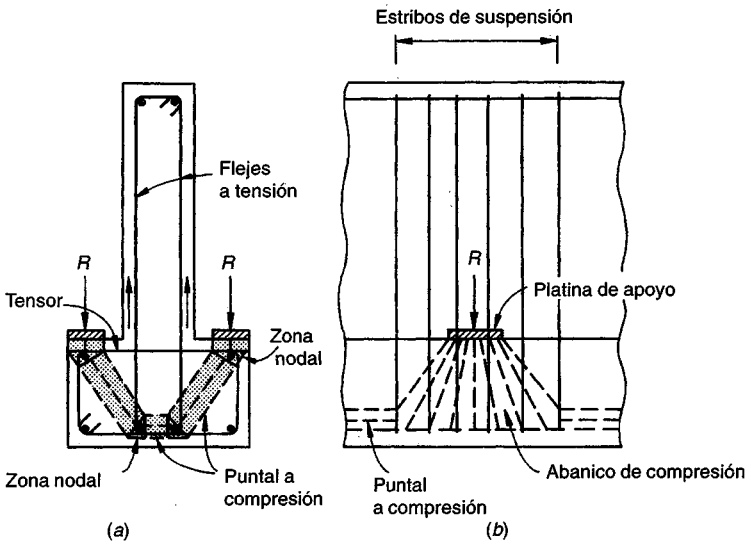


FIGURA 10.16
Modelo puntal-tensor para el comportamiento de una viga principal de apoyo en forma de T invertida: (*a*) sección transversal de la viga principal; (*b*) elevación lateral.

apoyo, como se indica en la figura 10.16*b*. Las componentes horizontales del abanico se equilibran con un puntal a compresión a lo largo del ala inferior de la viga principal.

En el corte de sección transversal en la figura 10.16*a*, el empuje hacia abajo bajo la platina de apoyo se equilibra mediante un puntal diagonal a compresión, en el cual el empuje hacia afuera en la parte superior de éste, produce tensión en la rama superior horizontal de los estribos en forma de aros cerrados que se localizan en la parte ensanchada inferior de la viga principal. En muchos casos se utiliza un ángulo corto de acero estructural justo debajo de la platina de apoyo, y el fleje principal en la parte superior del apoyo se suelda al ángulo para asegurar un anclaje efectivo. En la parte inferior del puntal diagonal, la componente horizontal del empuje se equilibra por el empuje opuesto desde el otro lado, y la componente vertical produce tensión en los estribos que se prolongan hasta la parte superior de la viga principal. Estos estribos se utilizan adicionalmente a los requeridos por cortante en la viga principal. Un anclaje adecuado de los flejes en los nudos se asegura pasando barras longitudinales por dentro de los dobleces de los dos conjuntos de estribos.

El diseño de las barras de refuerzo para el estado de cargas mayorado se basa en el desarrollo del esfuerzo de fluencia f_y en el acero. Para tensión directa se utiliza un coeficiente de reducción de resistencia $\phi = 0.90$, según las disposiciones del Código ACI. La fuerza de tensión que deben resistir las barras puede determinarse mediante estática simple, a partir de la geometría definida por el modelo puntal-tensor. Un esquema cuidadoso y detallado es, a menudo, el mejor fundamento para el desarrollo de este modelo (ver las referencias 10.7, 10.8, 10.9 y 10.10).

10.6 UNIONES DE ESQUINA Y EN T

En muchos de los tipos comunes de estructuras de concreto reforzado, los momentos y otras fuerzas deben transmitirse alrededor de las esquinas. Algunos ejemplos, expuestos en la figura 10.17, incluyen pórticos a dos aguas, muros de contención, tanques para almacenamiento de líquidos y

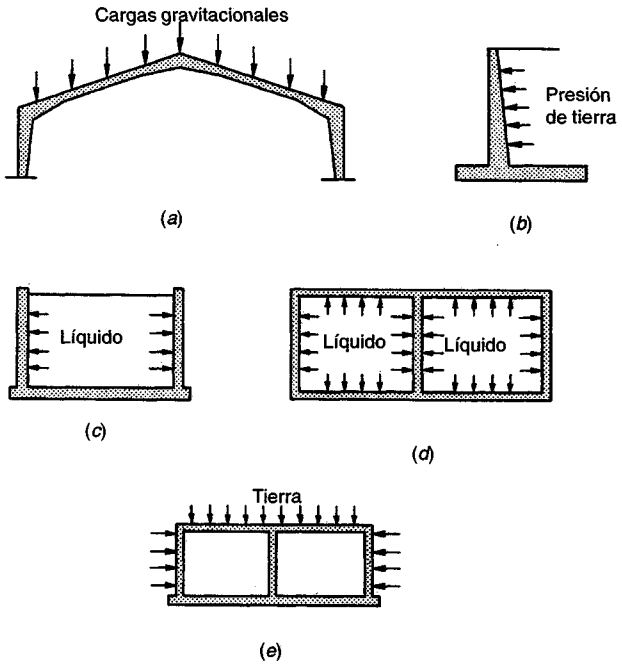


FIGURA 10.17
Estructuras con esquinas sometidas a momentos con tendencia a abrir o a cerrar la unión: (*a*) pórtico a dos aguas; (*b*) muro de contención de tierra; (*c*) tanque de almacenamiento de líquido; (*d*) vista en planta de un tanque de almacenamiento de líquido con múltiples compartimientos; (*e*) alcantarilla cubierta de gran capacidad.

alcantarillas cubiertas de gran capacidad. El despiece del refuerzo en las esquinas rara vez es obvio. Un estudio experimental extenso de estas uniones, desarrollado por Nilsson y Losberg (ver la referencia 10.3), demostró que muchos de los detalles de uniones utilizados comúnmente transmiten apenas una pequeña fracción de su resistencia supuesta. Idealmente, la unión debe resistir un momento por lo menos equivalente al de falla calculado para los elementos que llegan a ella (es decir, la *eficiencia de la unión* debe ser por lo menos del cien por ciento). Diversos ensayos demuestran que, para los despieces comúnmente utilizados, la eficiencia de las uniones puede ser tan baja como el 30 por ciento.

Las uniones de esquina pueden someterse a momentos con tendencia a abrir la unión, que causan tensión por flexión en la parte interna de la unión, o a momentos con tendencia a cerrar la unión, que ocasionan tensión en la parte externa. Por lo general, el primer caso es el más difícil de detallar de manera adecuada.

Considérese, por ejemplo, una unión de esquina sometida a un momento con tendencia a abrir la unión, como en el caso de la esquina exterior del tanque de almacenamiento de líquidos expuesto en la vista en planta de la figura 10.17*d*. La figura 10.18*a* ilustra el sistema de fuerzas que actúan en esa esquina. Esta distribución del refuerzo no es recomendable. La formación de la grieta 1, dirigida radialmente hacia la parte interna desde la esquina, es quizás obvia. La grieta 2, que generaría una rotura hacia afuera de la esquina externa, puede no ser tan obvia. Sin embargo, la resultante de las dos fuerzas de compresión C, con magnitud $C\sqrt{2}$, se equilibra con la tensión resultante $T\sqrt{2}$. Estas dos fuerzas, una aplicada cerca de la esquina exterior y otra cerca de la esquina interior, generan grandes esfuerzos de tensión entre las dos, llevando a la formación de la grieta 2, como se ilustra. La misma conclusión se obtiene cuando se tiene en cuenta un pequeño elemento de concreto A en la esquina. Éste está sometido a las fuerzas cortantes que aparecen, las cuales resultan de las fuerzas C y T generadas por los elementos que llegan a la unión. La resultante de estos esfuerzos cortantes es una tensión principal a 45 a través de la esquina, que confirma la formación de la grieta 2.

Se podría intentar, en principio, adicionar una barra en forma de L alrededor de la parte exterior de la esquina, con el propósito de confinar el concreto exterior. Sin embargo, esta barra no tendría ningún objeto, puesto que estaría en compresión y podría más bien ayudar a empujar la esquina hacia afuera. El modelo puntal-tensor de la figura 10.18*b* ofrece información valiosa sobre el refuerzo necesario e indica que, además de las barras de tensión bien ancladas para transmitir las fuerzas T dentro de la unión, se requiere algún tipo de refuerzo en dirección radial para permitir que las fuerzas de compresión C "le den la vuelta a la esquina".

En la referencia 10.3 se presentan los resultados de ensayos para una gran cantidad de uniones con diversas alternativas de detalles de las barras. En la figura 10.19 se resumen las eficiencias comparativas para algunos detalles específicos, que relacionan el momento máximo transmitido por la unión en esquina con la capacidad a flexión de los elementos que llegan hasta ésta. En todos los casos, la cuantía de refuerzo de los elementos que entran es 0.75 por ciento. La figura 10.19*a* es un detalle sencillo, probablemente utilizado con bastante frecuencia, pero que suministra eficiencia de la unión de apenas el 32 por ciento. El detalle de la figura 10.19*b*, reforzado con barras dobladas en forma de horquillas con el plano de los ganchos paralelo a la cara interior de la unión, proporciona una efecti-

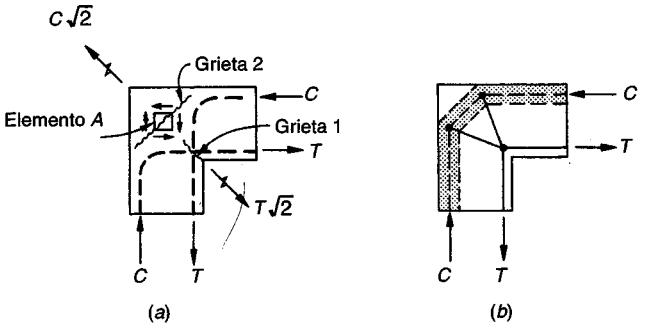


FIGURA 10.18
Nudo de esquina sometido a momentos con tendencia a abrir la unión: (*a*) agrietamiento en una unión con diseño inapropiado; (*b*) modelo puntal-tensor del comportamiento de la unión.

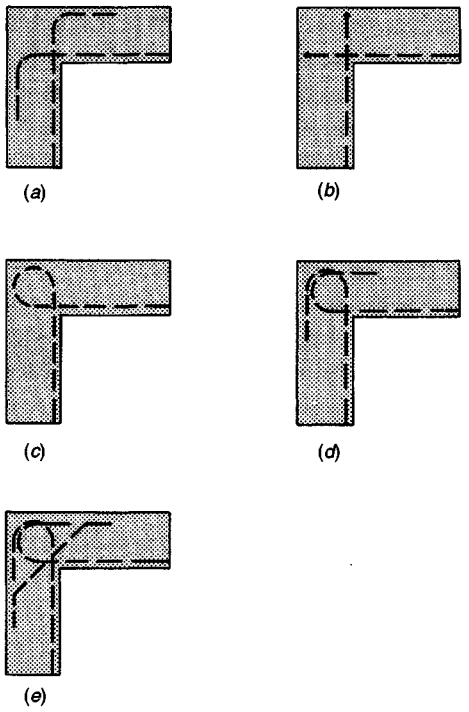


FIGURA 10.19
Eficiencias de uniones de esquina sometidas a momentos con tendencia a abrir la unión con varios detalles del refuerzo: (*a*) 32%; (*b*) 68%; (*c*) 77%; (*d*) 87%; (*e*) 115% (ver la referencia 10.3).

vidad del 68 por ciento. En la figura 10.19*c*, el refuerzo principal da una vuelta simple y continua hacia afuera de la otra rama de la unión, generando una eficiencia del 77 por ciento. El detalle un poco similar a la figura 10.19*d*, en el cual las barras que entran a la unión se terminan en vueltas independientes, da una efectividad del 87 por ciento. El mejor comportamiento se obtiene mediante el detalle de la figura 10.19*e*, el mismo de la 10.19*d* excepto por la adición de una barra en diagonal. Esto mejora la eficiencia de la unión hasta en un 115 por ciento, de manera que la unión es en realidad más fuerte que la resistencia de diseño de los elementos que llegan a ella. En forma experimental se determinó que el área de la barra diagonal debe ser casi la mitad del área del refuerzo principal.

Las uniones entre el muro vertical y la losa de base horizontal en muros de contención (ver la figura 10.17*b*) también se someten a momentos con tendencia a abrir la unión. Los ensayos sobre estas uniones confirman el beneficio de colocar una barra diagonal similar a la de la figura 10.19*e*. Los detalles de las barras para los muros de contención se analizarán con mayor amplitud en el capítulo 19.

Las uniones en T también pueden verse sometidas a momentos flectores, como es el caso del tanque de almacenamiento de líquido con múltiples compartimientos de la figura 10.17*d*, cuando sólo está lleno uno de los compartimientos. Los ensayos sobre este tipo de uniones, publicados en la referencia 10.3, indican de nuevo la importancia de un despiece adecuado. La distribución del refuerzo en la figura 10.20*a*, que se utiliza algunas veces, permite una eficiencia de la unión apenas entre el 24 y el 40 por ciento, mientras que la simple redistribución expuesta en la figura 10.20*b* mejora la efectividad hasta valores entre 82 y cien por ciento. En ambos casos, la eficiencia depende de la cuantía principal de acero en los elementos que llegan, y la mayor efectividad corresponde a la menor cuantía de acero a tensión.

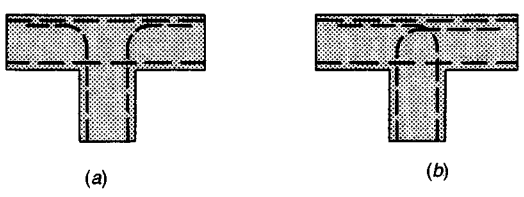


FIGURA 10.20
Comparación de eficiencias de uniones en T sometidas a momentos flectores: (*a*) de 24 a 40 por ciento según la cuantía de acero; (*b*) de 82 a 110 por ciento según la cuantía de acero (ver la referencia 10.3).

Las uniones sometidas a momentos con tendencia a cerrar la unión, en donde el refuerzo principal pasa alrededor de la esquina más cercana a la cara externa, producen pocos problemas de despiece puesto que el acero de tensión principal proveniente de los elementos entrantes puede continuar de igual manera en la parte exterior de la esquina. Sin embargo, existe riesgo de fracturamiento del concreto en el plano de doblez, o de aplastamiento del concreto en la parte interior del doblez. La eficiencia de estas uniones puede mejorarse si se aumenta el radio de doblamiento de la barra.

10.7 MÉNSULAS Y CORNISAS

Las ménsulas, como las que aparecen en la figura 10.21*a*, se utilizan ampliamente en construcción prefabricada para soportar vigas prefabricadas en las columnas respectivas. Cuando se proyectan a partir de un muro en lugar de una columna, se llaman de manera apropiada cornisas, aunque estos dos términos se intercambian con frecuencia. Las ménsulas se diseñan en especial para suministrar la reacción vertical V_u en el extremo de la viga soportada, pero a menos que se tomen precauciones especiales para evitar las fuerzas horizontales que genera la retracción de fraguado restringida, el flujo plástico (en el caso de vigas preesforzadas) o los cambios de temperatura, también deben resistir una fuerza horizontal N_{uc}.

Por lo general se utilizan platinas o ángulos de acero como apoyo en la parte superior de la superficie de las ménsulas, según la figura, para suministrar una superficie de contacto uniforme y para distribuir la reacción. También es frecuente proporcionar una platina o ángulo de acero correspondiente en la esquina inferior del elemento sostenido. Si estas dos platinas se sueldan entre sí, lo cual es bastante común, es claro que las fuerzas horizontales deberán considerarse en el diseño. Sin embargo, éstas pueden evitarse utilizando teflón o cojines elastoméricos de apoyo.

El comportamiento estructural de una ménsula puede observarse en el modelo puntal-tensor, que se ilustra en la figura 10.21*b*. El empuje hacia abajo de la carga V_u se equilibra con la componente vertical de la reacción generada por el puntal diagonal a compresión que lleva la carga hasta la columna. El empuje hacia afuera en la parte superior del puntal se balancea por la tensión en las barras horizontales de los flejes localizados en la parte superior de la ménsula; éstos también toman la fuerza de tensión generada por la fuerza horizontal N_{uc}, cuando ésta se presenta. En el extremo izquierdo del fleje horizontal, la tensión se equilibra con la componente horizontal del empuje que produce el segundo puntal a compresión, indicado en la gráfica. La componente vertical de este empuje genera la fuerza de tensión que aparece actuando hacia abajo en la parte izquierda de la columna de apoyo.

Según el modelo puntal-tensor, el acero requerido se ilustra en la figura 10.21*a*. Las barras principales A_s, deben anclarse con cuidado porque necesitan desarrollar su resistencia a la fluencia f_y, directamente bajo la carga V_u, y por esta razón se sueldan por lo general a la parte inferior del ángulo de apoyo. En el lado izquierdo se provee un gancho a 90° para lograr el anclaje. Barras en forma de aros cerrados con área A_h confinan el concreto en los dos puntales a compresión y resis-

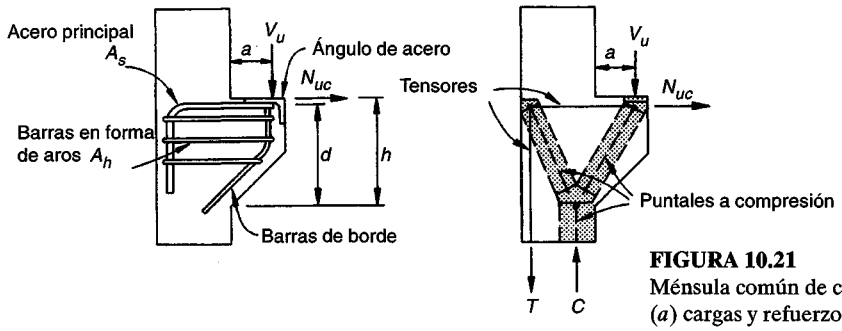


FIGURA 10.21
Ménsula común de concreto reforzado: (*a*) cargas y refuerzo; (*b*) modelo puntal-tensor para las fuerzas internas.

ten una tendencia al fracturamiento en dirección paralela a la del empuje. Las barras de borde que se indican en la figura tienen por lo general el mismo diámetro que los estribos y sirven en particular para mejorar el anclaje de éstos en la cara exterior de la ménsula.

La ménsula también puede tratarse como una viga muy corta en voladizo en la que la tensión por flexión en la cara de la columna la resisten las barras superiores A_s. Cualquiera de estos conceptos producirá aproximadamente la misma área de refuerzo principal.

Un segundo método posible de falla es mediante cortante directo a lo largo de un plano más o menos a ras con la cara vertical del cuerpo principal de la columna. El refuerzo por cortante por fricción que atraviesa esta grieta (ver la sección 4.10) incluiría el área A_s colocada previamente en el tensor superior y el área A_h de los aros que estaría por debajo de ésta. Otros modos de falla incluyen fallas de tensión por flexión con fluencia de las barras superiores, seguida de aplastamiento del concreto en la parte inferior de la ménsula; falla por aplastamiento del concreto por debajo del ángulo de apoyo (particularmente si la rotación en el extremo de la viga soportada obliga a que la fuerza V_u se aplique demasiado cerca de la esquina exterior de la ménsula), y falla por tensión directa, si la fuerza horizontal N_{uc} es mayor que la estimada.

Las disposiciones del Código ACI 11.9 para el diseño de ménsulas y cornisas se desarrollaron principalmente con base en ensayos (ver las referencias 10.14, 10.15 y 10.16) y se refieren al modelo de comportamiento a flexión de la ménsula. Son aplicables a ménsulas y cornisas con una relación luz de cortante a altura a/d de 1.0 o menos (ver la figura 10.21*a*). La distancia d se mide en la cara de la columna, y la altura en el borde exterior del área de apoyo no debe ser menor que $0.5d$. Para el diseño se utilizan los principios básicos acostumbrados, es decir, $M_u \leq \phi M_n$ y $V_u \leq \phi V_n$, y para ménsulas y cornisas (para las cuales el cortante controla el diseño) ϕ debe tomarse igual a 0.85 para todos los cálculos de resistencia, incluyendo flexión y tensión directa al igual que cortante.

La sección en la cara de la columna de apoyo debe resistir simultáneamente el cortante V_u, el momento $M_u = V_u a + N_{uc}(h-d)$, y la tensión horizontal N_{uc}. A menos que se tomen precauciones especiales, debe suponerse que actúa una tensión horizontal no menor que el 20 por ciento de la reacción vertical. Esta fuerza de tensión debe considerarse como carga viva y debe aplicarse por tanto un coeficiente de mayoración de 1.7.

Es posible determinar la cantidad de acero A_f necesaria para resistir el momento M_u, mediante los métodos usuales de diseño a flexión. Así que,

$$A_f = \frac{M_u}{\phi f_y (d - a/2)} \tag{10.6}$$

donde $a = A_f f_y / 0.85 f'_c b$. Debe proporcionarse un área de acero adicional A_n, que resista la componente de tensión de la fuerza:

$$A_n = \frac{N_{uc}}{\phi f_y} \tag{10.7}$$

Entonces, el área total requerida *para efectos de flexión y de tensión directa* en la parte superior de la ménsula es

$$A_s \geq A_f + A_n \tag{10.8}$$

El diseño a cortante se basa en el método de cortante por fricción de la sección 4.10 y el refuerzo total correspondiente A_{vf} se encuentra con

$$A_{vf} = \frac{V_u}{\phi \mu f_y} \tag{10.9}$$

donde el factor de fricción μ para construcción monolítica es 1.40 para concreto de peso normal, 1.19 para concreto con "arenas livianas" y 1.05 para concreto con "todos los agregados livianos". La limitación usual referente a que $V_n = V_u/\phi$ no debe exceder el menor entre $0.2 f'_c A_c$ ó $800 A_c$, se

aplica en la sección crítica en la cara del apoyo (para ménsulas y cornisas A_c debe ser igual al área bd). Entonces, de acuerdo con el Código ACI 11.9, el área total necesaria para cortante más tensión directa en la parte superior de la ménsula es

$$A_s \geq \frac{2}{3}A_{vf} + A_n \tag{10.10}$$

con la parte restante de A_{vf} colocada en forma de aros cerrados con un área A_h en la parte inferior de la ménsula, como aparece en la figura 10.21*a*.

Así, el área de acero total A_s que se requiere en la parte superior de la ménsula es igual al mayor de los valores determinados por la ecuación (10.8) o la (10.10). Se incluye otra restricción con respecto a que A_s no debe ser menor que $0.04(f'_c/f_y)bd$, con la intención de evitar la posibilidad de una falla repentina luego de la formación de una grieta de tensión por flexión en la parte superior de la ménsula.

Con relación al Código ACI, deben suministrarse estribos en forma de aros cerrados con un área A_h no menor que $0.5(A_s - A_n)$ (ver la figura 10.21*a*) y éstos se tienen que distribuir uniformemente dentro de los dos tercios de la altura efectiva, adyacentes y paralelos a A_s. Este requisito se establece con mayor claridad de la siguiente manera:

$$A_h \geq 0.5A_f \text{ y } \geq \frac{1}{3}A_{vf} \tag{10.11}$$

Ejemplo 10.4. Diseño de una ménsula de una columna. Una ménsula con las características generales de la figura 10.22 debe diseñarse para soportar la reacción en el extremo de una viga principal prefabricada de gran luz. Las reacciones verticales que producen las cargas muertas y vivas de servicio son 25 klb y 51 klb respectivamente, aplicadas a 5.5 pulg de la cara de la columna. Se proveerá una platina de acero de apoyo para la viga principal, que se apoyará de modo directo en un ángulo de acero de $5 \times 3 \times \frac{3}{8}$ pulg, anclado en la esquina exterior de la ménsula. El refuerzo en la ménsula incluye el acero principal A_s, soldado a la parte inferior del ángulo de acero, estribos en forma de aros cerrados con un área total A_h que se distribuyen en forma adecuada en toda la altura de la ménsula, y barras complementarias en un plano vertical cerca de la cara exterior. Seleccione dimensiones apropiadas para el concreto, diseñe y realice el despiece de todo el refuerzo. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 5000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

Solución. La carga vertical mayorada que debe soportarse es

$$V_u = 1.4 \times 25 + 1.7 \times 51 = 122 \text{ klb}$$

En ausencia de un rodillo o de un cojinete de apoyo de baja fricción, se incluye una fuerza de tensión horizontal de

$$N_{uc} = 0.20 \times 122 = 24 \text{ klb}$$

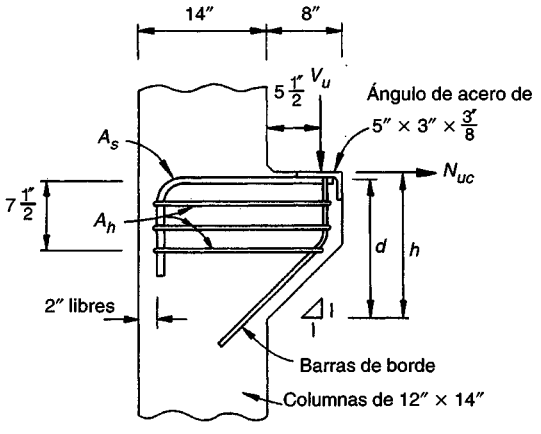


FIGURA 10.22
Ejemplo de diseño de una ménsula de columna.

De acuerdo con las disposiciones de cortante por fricción del Código ACI, la resistencia nominal a cortante V_n no debe exceder el menor entre $0.2 f'_c bd$ o $800bd$. Con $f'_c = 5000$ lb/pulg^2, el segundo límite controla. Entonces, con $V_u = \phi V_n$, y con el ancho de la columna $b = 12$ pulg,

$$122 = 0.85 \times 0.800 \times 12d$$

a partir de lo cual $d = 14.95$ pulg. Si se estima en una pulgada la distancia desde el centro del acero principal hasta la superficie superior de la ménsula, se selecciona una altura total $h = 16$ pulg, con un valor aproximadamente igual a 15 pulg y cuyo valor exacto depende del diámetro de la barra seleccionada para A_s. Si se utiliza una pendiente de 45°, como se indica en la figura 10.22, la altura de la ménsula en la parte exterior del área de contacto será de 8 pulg. Esta dimensión no es menor que $0.5d = 7.5$ pulg, como se requiere. Para la geometría seleccionada de la ménsula, $a/d = 5.5/15 = 0.37$. Este valor no excede el límite de 1.0, impuesto por el Código ACI.

El acero total por cortante por fricción se encuentra a partir de la ecuación (10.9):

$$A_{vf} = \frac{V_u}{\phi \mu f_y} = \frac{122}{0.85 \times 1.4 \times 60} = 1.71 \text{ pulg}^2$$

El momento flector que debe resistirse es

$$\begin{aligned} M_u &= V_u a + N_{uc}(h - d) \\ &= 122 \times 5.5 + 24 \times 1 = 695 \text{ klb} \end{aligned}$$

La altura del bloque de esfuerzos a compresión por flexión se estima en 2 pulg, de manera que a partir de la ecuación (10.6),

$$A_f = \frac{M_u}{\phi f_y (d - a/2)} = \frac{695}{0.85 \times 60(15 - 1.0)} = 0.97 \text{ pulg}^2$$

Si se verifica la altura del bloque de esfuerzos se obtiene

$$a = \frac{A_f f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{0.97 \times 60}{0.85 \times 5 \times 12} = 1.14 \text{ pulg}$$

de modo que el área revisada de acero es

$$A_f = \frac{695}{0.85 \times 60(15 - 0.57)} = 0.94 \text{ pulg}^2$$

La fuerza de tensión de 24 klb requiere un área adicional de acero calculada con la ecuación (10.7), de

$$A_n = \frac{N_{uc}}{\phi f_y} = \frac{24}{0.85 \times 60} = 0.47 \text{ pulg}^2$$

Así, de la ecuación (10.8) y de la ecuación (10.10) respectivamente, el área total de acero en la parte superior de la ménsula no debe ser menor que

$$A_s \geq A_f + A_n = 0.94 + 0.47 = 1.41 \text{ pulg}^2$$

o no menor que

$$A_s \geq \frac{2}{3} A_{vf} + A_n = \frac{2}{3} \times 1.71 + 0.47 = 1.61 \text{ pulg}^2$$

El segundo requisito controla en este caso. El requisito de acero mínimo de

$$A_{s,\,\min} = 0.04 \frac{f'_c}{f_y} bd = 0.04 \times \frac{5}{60} \times 12 \times 15 = 0.60 \text{ pulg}^2$$

no controla en este caso. Se utilizarán un total de 3 barras No. 7, que suministran un $A_s = 1.80$ pulg^2.

Debe proveerse acero en forma de aros cerrados con un área total A_h no menor que $0.5(A_s - A_n)$. Entonces,

$$A_h \geq 0.5 a_f = 0.5 \times 0.94 = 0.47 \text{ pulg}^2$$

y

$$A_h \geq 0.5 \times \frac{2}{3} A_{vf} = \frac{1}{3} \times 1.71 = 0.57 \text{ pulg}^2$$

El segundo requisito controla en este caso. Se proporcionarán tres aros cerrados No. 3, con un área total de $A_h = 0.66$ pulg^2. Éstos deben colocarse dentro de los $\frac{2}{3}$ de la altura efectiva del acero principal. Un espaciamiento de 2.5 pulg será satisfactorio, como se indica en la figura 10.22. Se adicionarán un par de barras de borde No. 3 en las esquinas interiores de los aros para mejorar el anclaje, tal como se ilustra.

El anclaje de las barras No. 7 se suministrará en el extremo derecho mediante soldadura en la parte inferior del ángulo de acero y con un gancho estándar a 90° en el extremo izquierdo (ver la figura 5.10). La longitud básica de desarrollo (tabla 5.3) es

$$l_{hb} = \frac{1200 d_b}{\sqrt{f'_c}} = \frac{1200 \times 0.875}{\sqrt{5000}} = 14.8 \text{ pulg}$$

En este caso se pueden aplicar dos factores de modificación. El primero es 0.7, teniendo en cuenta que se mantienen por lo menos 2 pulg de recubrimiento en el extremo del gancho, y el segundo es A_s requerido/A_s suministrado = 1.61/1.80 = 0.89. Así que, la longitud de desarrollo que se requiere más allá de la cara de la columna es

$$l_{dh} = 14.8 \times 0.7 \times 0.89 = 9.22 \text{ pulg}$$

Este requisito se cumple fácilmente. La extensión del gancho será de $12 d_b = 12 \times 0.875 = 10.5$ pulg. Para las barras en forma de aros se utilizará un gancho estándar a 135°, como aparece en la figura 5.9*b*.

REFERENCIAS

10.1. "Reinforced Concrete Design Includes Approval of Details", CRSI Engineering Practice Committee, *Concr. Int.*, vol. 10, no. 1, 1988, pp. 21-22.

10.2. *ACI Detailing Manual*, ACI Special Publication SP66, American Concrete Institute, Detroit, 1994.

10.3. I. H. E. Nilsson and A. Losberg, "Reinforced Concrete Corners and Joints Subjected to Bending Moment", *J. Struct. Div.*, ASCE, vol. 102, no. ST6, 1976, pp. 1229-1254.

10.4. D. F. Meinheit and J. O. Jirsa, "Shear Strength of Reinforced Concrete Beam-Column Connections", *J. Struct. Div.*, ASCE, vol. 107, no. ST11, 1981, pp. 2227-2244.

10.5. J. G. L. Marques and J. O. Jirsa, "A Study of Hooked Bar Anchorages in Beam-Column Joints", *J. ACI*, vol. 72, no. 5, 1975, pp. 198-209.

10.6. "Recommendations for Design of Beam-Column Joints in Monolithic Reinforced Concrete Structures", Reported by ACI Committee 352, *ACI Struct. J.*, vol. 82, no. 3, 1985, pp. 266-283.

10.7. P. Marti, "Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design", *J. ACI*, vol. 82, no. 1, 1985, pp. 46-56.

10.8. P. Marti, "Truss Models in Detailing", *Concr. Int.*, vol. 7, no. 12, 1985, pp. 66-73.

10.9. J. Schalaich, K. Schafer, and M. Jennewein, "Toward a Consistent Design of Structural Concrete", *J. Prestressed Concr. Inst.*, vol. 32, no. 3, 1987, pp. 74-150.

10.10. W. D. Cook and D. Mitchell, "Studies of Disturbed Regions Near Discontinuities in Reinforced Concrete Members", *ACI Struct. J.*, vol. 85, no. 2, 1988, pp. 206-216.

10.11. N. S. Anderson and J. A. Ramirez, "Detailing of Stirrup Reinforcement", *ACI Struct. J.*, vol. 86, no. 5, 1989, pp. 507-515.

10.12. R. Park and T. Pauley, *Reinforced Concrete Structures*, John Wiley, New York, 1975.

10.13. A. H. Mattock and J. F. Shen, "Joints Between Reinforced Concrete Members of Similar Depth", *ACI Struct J.*, vol. 89, no. 3, 1992, pp. 290-295.

10.14. L. B. Kriz and C. H. Raths, "Connections in Precast Concrete Structures—Strength of Corbels", *J. Prestressed Concr. Inst.*, vol. 10, no. 1, 1965, pp. 16-47.

10.15. H. Mattock, K. C. Chen, and K. Soongswang, "The Behavior of Reinforced Concrete Corbels", *J. Prestressed Concr. Inst.*, vol. 21, no. 2, 1976, pp. 52-77.

10.16. A. H. Mattock, "Design Proposals for Reinforced Concrete Corbels", *J. Prestressed Concr. Inst.*, vol. 21, no. 3, 1976, pp. 18-24.

PROBLEMAS

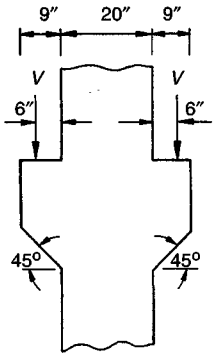
10.1. Debe diseñarse una unión interior del tipo 1, que se considera parte de un sistema primario de resistencia a cargas laterales. La columna cuadrada de 16 pulg, con acero principal que consta de cuatro barras No. 11, está intersectada por dos vigas secundarias de 12 × 18 pulg en la dirección X, reforzadas con

tres barras superiores No. 10 y tres barras inferiores No. 8. En la dirección *Y* hay dos vigas principales de 12 × 22 pulg reforzadas con tres barras superiores No. 11 y tres barras inferiores No. 9. El recubrimiento de concreto es de 2.5 pulg hasta el centro de las barras, excepto para el acero superior en las vigas principales, que se coloca justo debajo del acero superior de las vigas secundarias. Diseñe y haga el despiece de la unión utilizando f'_c = 4000 lb/pulg^2 y 60,000 lb/pulg^2. Especifique la colocación de todas las barras y los puntos de corte.

10.2. Una unión exterior típica del edificio del problema 10.1 es idéntica a la unión interior excepto que la viga secundaria de 12 × 18 pulg se presenta únicamente en uno de los lados de la columna. Las vigas principales entran al nudo en las dos caras opuestas como antes. Todo el refuerzo es el mismo de la unión del problema 10.1. Diseñe y realice el despiece de la unión, especificando la colocación de las barras, los puntos de corte y detalles como las dimensiones de los ganchos en las barras.

10.3. Debe diseñarse una unión de viga secundaria a viga principal similar a la de la figura 10.13. La viga secundaria con acero superior que consta de cuatro barras No. 11 y dos barras inferiores No. 9 entrega a la viga principal una reacción total por las cargas mayoradas de 110 klb. Haga el despiece de la conexión siguiendo las recomendaciones de la sección 10.4, indicando los puntos de corte y las dimensiones de los ganchos de las barras principales, si se requieren, y seleccionando los estribos de suspensión adecuados que deben adicionarse al refuerzo cortante normal de la viga principal. Utilizar f'_c = 4000 lb/pulg^2 y f_y = 60,000 lb/pulg^2.

10.4. Las columnas prefabricadas de un garaje de estacionamiento propuesto incorporarán ménsulas simétricas para soportar las reacciones de los extremos de vigas principales cortas las que, a su vez, sostendrán unidades de piso con las luces grandes en forma de doble T, preesforzadas y prefabricadas. Las reacciones de las vigas principales se aplicarán a 6 pulg de la cara de la columna, como en la figura P10.4 y debe proporcionarse un ancho total de ménsula de 9 pulg para lograr un apoyo adecuado. El ancho de la columna en dirección perpendicular es de 20 pulg. Las reacciones por cargas de servicio aplicadas a la cara superior de la ménsula son 45 klb por carga muerta y 36 klb por carga viva. Seleccione todas dimensiones del concreto no especificadas, diseñe y haga el despiece del refuerzo. Se sugiere la utilización de un ángulo de apoyo en la esquina, en el borde superior externo de la ménsula. Las resistencias de los materiales de la columna son f'_c = 6000 lb/pulg^2 y f_s = 60,000 lb/pulg^2.



CAPÍTULO

11 ANÁLISIS DE VIGAS Y PÓRTICOS INDETERMINADOS

11.1 CONTINUIDAD

Los elementos individuales que conforman una estructura de acero o de madera se fabrican o se cortan independientemente y se unen entre sí mediante remaches, pernos, soldadura o puntillas. A menos que las uniones se diseñen en forma específica para dar rigidez, éstas son demasiado flexibles para transferir momentos de magnitud significativa de un elemento a otro. En contraste, en estructuras de concreto reforzado se vacía en una sola operación tanto concreto como sea posible. El acero de refuerzo no se interrumpe en los extremos de un elemento sino que se prolonga a través de las uniones hasta los elementos adyacentes. En las juntas de construcción se toman precauciones especiales para adherir el concreto nuevo al viejo mediante una limpieza cuidadosa de éste último, prolongando el refuerzo a través de la unión y por otros medios; como resultado de esto, las estructuras de concreto reforzado representan por lo general unidades monolíticas o continuas. Una carga aplicada en cualquier sitio de la estructura produce deformaciones y esfuerzos sobre toda la estructura. Aun para construcción en concreto prefabricado, que se parece a la construcción en acero pues los elementos individuales se llevan hasta el sitio de la obra y se ensamblan en el campo, las conexiones se diseñan a menudo para proporcionar transferencia de momento al igual que de cortante y de fuerza axial, produciendo al menos una continuidad parcial.

El efecto de continuidad se ilustra en forma más sencilla con una viga continua, como la de la figura 11.1*a*. Si se toman luces simples, como las que se utilizan en muchos tipos de construcción en acero, sólo el elemento *CD* cargado se deformará y todos los demás elementos de la estructura permanecerán rectos. Sin embargo, al tener en cuenta la continuidad de un elemento al siguiente a través de las zonas de los apoyos, como en el caso de las estructuras de concreto reforzado, la distorsión producida por una carga en una sola de las luces se propaga hacia las demás, aunque la magnitud de las deformaciones disminuye a medida que aumenta la distancia desde el elemento cargado. Como resultado de la aplicación de la carga sobre la luz *CD*, todos los elementos de la estructura de seis luces quedan sometidos a curvatura y, por tanto, también a momento flector.

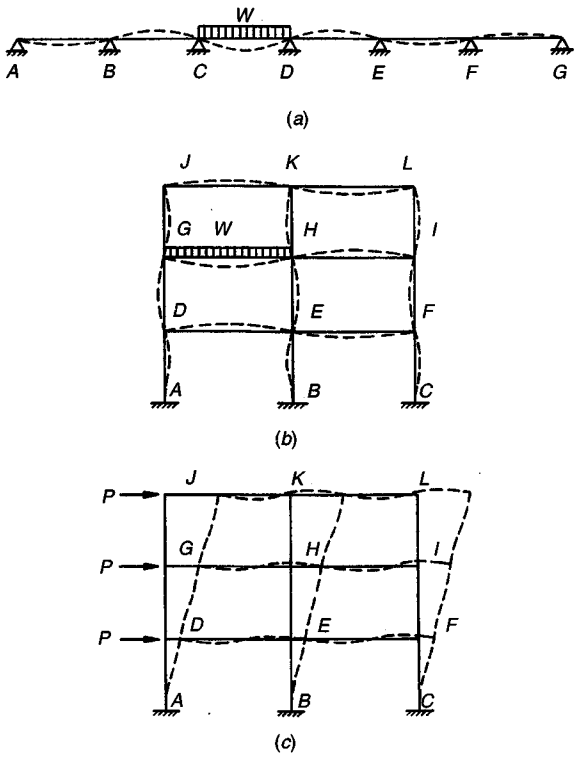


FIGURA 11.1
Forma deflectada de vigas y pórticos continuos.

En forma similar, para el pórtico de uniones rígidas de la figura 11.1*b*, la distorsión producida por una carga aplicada en el elemento *GH* se propaga a todas las vigas y columnas aunque, como antes, el efecto disminuye a medida que se incrementa la distancia desde el sitio de aplicación de la carga. Todos los elementos quedan sometidos a momentos flectores, aún cuando pueden no estar sosteniendo carga transversal.

Cuando actúan fuerzas horizontales sobre el pórtico, como las producidas por viento o acción sísmica, éste se deforma como se ilustra en la figura 11.1*c*. En este caso todos los elementos del pórtico también se distorsionan aún cuando las fuerzas actúan sólo en el lado izquierdo; se observa que la magnitud de la distorsión es la misma para todos los elementos correspondientes, independientemente de su distancia desde los puntos de aplicación de la carga, en contraste con el caso de carga vertical. Un elemento como el *EH*, aunque no soporta carga transversal, quedará sometido a deformaciones y a momentos flectores asociados.

En *estructuras estáticamente determinadas,* como las vigas simplemente apoyadas, la forma deflectada, los momentos y los cortantes dependen sólo del tipo y magnitud de las cargas y de las dimensiones del elemento. En contraste, al inspeccionar las *estructuras estáticamente indeterminadas* de la figura 11.1, se observa que la curva de la deflexión de cualquier elemento depende no sólo de las cargas sino también de las rotaciones en las uniones, cuyas magnitudes a su vez dependen de la distorsión de los elementos adyacentes que se conectan en forma rígida. Para una unión rígida, como la *H* en el pórtico de las figuras 11.1*b* y 11.1*c*, las rotaciones en los extremos próximos al nudo de todos los elementos que llegan hasta esta unión deben ser iguales. Para un diseño correcto de vigas y pórticos continuos, es necesario determinar los momentos, los cortantes y las fuerzas axiales considerando el efecto de la continuidad en las uniones.

La determinación de estas fuerzas internas en estructuras continuas de concreto reforzado se fundamenta por lo general en *análisis elásticos* de la estructura sometida a cargas mayoradas, utilizando los métodos que se describen en las secciones 11.2 hasta 11.6. Los procedimientos aproximados de la sección 11.7 son útiles para verificar los resultados de análisis más exactos. En muchas estructuras no se justifica un análisis elástico completo y el método de análisis mediante los coefi-

cientes del ACI, descrito en la sección 11.8, es apropiado para determinar los momentos y los cortantes de diseño.

Antes de la falla, las secciones de concreto reforzado en general son capaces de soportar una rotación inelástica considerable para un momento constante, como se describió en la sección 6.9. Esto permite una *redistribución de momentos elásticos* y ofrece las bases para el *análisis plástico* de vigas, pórticos y losas. El estudio de vigas y pórticos se desarrollará en la sección 11.9 y el de losas en los capítulos 14 y 15.

11.2 APLICACIÓN DE LAS CARGAS

Los elementos individuales de un pórtico estructural deben diseñarse para la combinación de cargas más desfavorable que pueda esperarse que ocurra durante su vida útil. Los momentos, cortantes y fuerzas axiales internos se producen por el efecto combinado de cargas muertas y vivas. Mientras que las primeras son constantes, las cargas vivas como las producidas por ocupación humana sobre el piso pueden colocarse en diferentes formas, algunas de las cuales generarán mayores efectos que otras.

En la figura 11.2*a*, únicamente la luz *CD* soporta carga viva. Las distorsiones de los diferentes elementos del pórtico son mayores en la luz cargada y en sus inmediaciones; además, disminuyen rápidamente al aumentar la distancia desde la carga. Puesto que los momentos flectores son proporcionales a las curvaturas, los momentos en los elementos más alejados son menores en forma correspondiente que aquéllos en o cerca de la luz cargada. Sin embargo, la distribución de cargas de la figura 11.2*a* no produce el máximo momento positivo posible en *CD*. De hecho, si se colocaran cargas vivas adicionales sobre la luz *AB*, esta luz se deformaría hacia abajo, *BC* se deformará hacia arriba y *CD* se deformaría hacia abajo de la misma manera, aunque en grado menor, a medida que se deforma por su propia carga. De ahí que el momento positivo en *CD* aumenta si la luz *AB*, y por el mismo criterio la luz *EF*, se cargan simultáneamente. Si se aplica el mismo razonamiento a los demás elementos del pórtico, se observa que el patrón en forma de tablero de ajedrez para la aplicación de cargas vivas que aparecen en la figura 11.2*b*, produce el máximo momento positivo

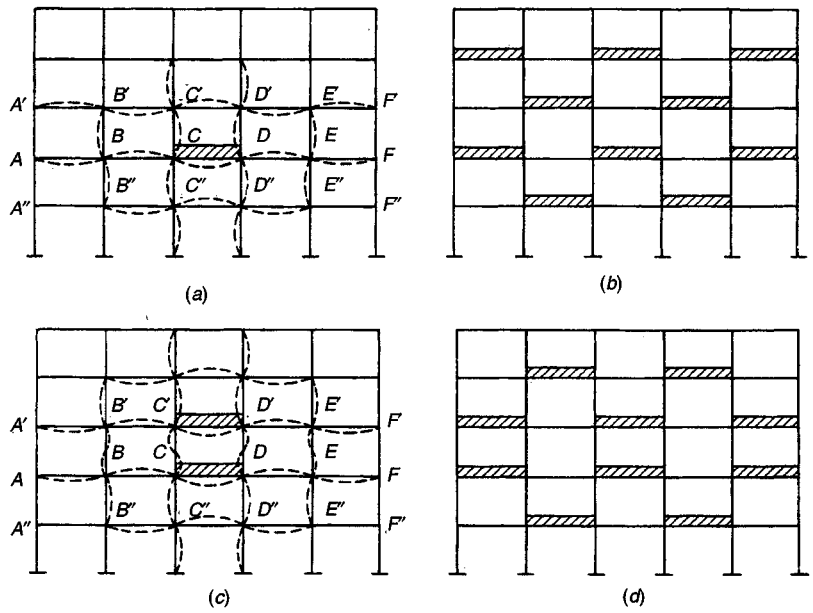


FIGURA 11.2
Alternativas de aplicación de cargas vivas para producir efectos máximos.

posible, no sólo en *CD* sino en todas las demás luces cargadas. Por tanto, se requieren dos patrones de distribución en forma de tablero de ajedrez para obtener los máximos momentos positivos en todas las luces.

Además de los momentos positivos máximos en las luces, a menudo es necesario investigar los momentos mínimos en las mismas. Por lo general, la carga muerta que actúa sobre todas las luces sólo produce momentos positivos en ellas. Sin embargo, si la carga viva se coloca como en la figura 11.2*a*, e incluso como en la 11.2*b*, se observa que ésta deforma las luces descargadas hacia arriba, es decir, produce momentos negativos en las luces. Si estos momentos negativos ocasionados por carga viva son mayores que los momentos generalmente positivos producto de la carga muerta, una viga principal determinada, según la posición de las cargas, puede quedar sometida algunas veces a momento positivo en la luz y otras a momento negativo en la misma. Este elemento debe diseñarse para resistir los dos tipos de momentos; es decir, debe suministrarse acero de tensión, tanto en la parte superior como en la inferior. Así que, la distribución de cargas de la figura 11.2*b*, además de dar los máximos momentos en las luces para las luces cargadas, provee los momentos mínimos en la luz para los tramos no cargados.

Por otro lado, los máximos momentos negativos en los apoyos de las vigas principales se obtienen al colocar las cargas sobre dos luces adyacentes al apoyo particular y siguiendo un patrón correspondiente de distribución en las vigas principales más alejadas. Se requiere, entonces, un esquema de distribución de cargas separado de este tipo para cada apoyo donde se desee calcular el máximo momento negativo.

En cada columna, los mayores momentos ocurren en la parte superior o en la inferior. Mientras que la distribución de cargas de la figura 11.2*c* genera momentos mayores en los extremos de las columnas *CC'* y *DD'*, el lector se puede convencer fácilmente de que estos momentos se aumentan aún más si se colocan cargas adicionales, como se ilustra en la figura 11.2*d*.

A partir de este breve análisis se observa que, con el fin de calcular los momentos máximos posibles para todos los puntos críticos del pórtico, las cargas vivas deben colocarse en una gran variedad de esquemas. Sin embargo, en la mayor parte de casos prácticos la consideración de las magnitudes relativas de efectos permite limitar los análisis a una pequeña cantidad de casos significativos.

11.3 SIMPLIFICACIONES EN EL ANÁLISIS DE PÓRTICOS

Considerando la complejidad de muchos pórticos de edificios en la práctica, y la necesidad de tener en cuenta la posibilidad de distribuciones de carga alternas, evidentemente es imprescindible simplificar. Esto puede llevarse a cabo mediante algunas aproximaciones que permiten la determinación de momentos con una precisión razonable, reduciendo simultáneamente y en forma considerable la cantidad de cálculos.

Numerosos cálculos demuestran que, en pórticos de edificios con un perfil razonablemente regular, sin asimetrías especiales en la carga o en la forma, es posible despreciar la influencia de los desplazamientos laterales producidos por las cargas verticales. En este caso, los momentos que causan las cargas verticales se determinan con suficiente precisión, dividiendo el pórtico completo en subpórticos más sencillos. Cada uno consta de una viga continua más las columnas superior e inferior que llegan hasta esa viga particular. Si se colocan las cargas vivas sobre la viga de la manera más desfavorable, se logra una determinación suficientemente precisa de todos los momentos en la viga, al igual que de aquéllos en los extremos superiores de las columnas inferiores y en los extremos inferiores de las superiores. Para esta estructura parcial, los extremos más alejados de las columnas se consideran empotrados, excepto para aquellas columnas de primer piso o de sótanos donde las condiciones de suelo y de cimentación lleven al supuesto de extremos articulados. Esta metodología está permitida explícitamente por el Código ACI 8.9, el cual especifica lo siguiente para los elementos de piso y de cubierta:

1. La carga viva puede considerarse aplicada sólo en el piso o la cubierta que se analiza y los extremos más alejados de las columnas construidas integralmente con la estructura pueden considerarse como empotrados.
2. La distribución de la carga viva puede limitarse a las combinaciones de: (*a*) carga muerta mayorada sobre todas las luces con toda la carga viva mayorada sobre dos luces adyacentes, y (*b*) carga muerta mayorada sobre todas las luces con toda la carga viva mayorada sobre luces alternas.

Cuando se investiguen los máximos momentos negativos en cualquier unión, se cometerán errores insignificantes si las segundas uniones para eliminar en cada dirección se consideran como totalmente empotradas. De modo similar, en la determinación de los momentos máximos o mínimos en las luces, las uniones en los extremos lejanos de las luces adyacentes pueden tomarse como empotradas. De esta manera, las porciones individuales de un pórtico de muchos elementos pueden investigarse en forma independiente.

Con respecto a las columnas, el Código ACI 8.8 indica:

1. Las columnas deben diseñarse para resistir las cargas axiales producidas por las cargas mayoradas que se aplican en todos los pisos o cubiertas y el momento máximo generado por las cargas mayoradas que se aplican en una luz simple adyacente al piso o la cubierta en estudio. También debe tenerse en cuenta la condición de carga que dé la máxima relación entre el momento y la carga axial.
2. En pórticos o construcción continua debe considerarse el efecto de las cargas desbalanceadas en los pisos o las cubiertas, tanto sobre las columnas exteriores como sobre las interiores y de la distribución excéntrica de cargas por otras causas.
3. Para calcular los momentos en las columnas producidos por cargas gravitacionales, los extremos alejados de las columnas construidas integralmente con la estructura pueden tomarse como empotrados.
4. La resistencia a momentos en cualquier nivel de piso o de cubierta debe suministrarse mediante la distribución de los momentos entre las columnas inmediatamente por encima y por debajo del piso, en proporción a las rigideces relativas de las columnas y a las condiciones de restricción.

11.4 MÉTODOS DE ANÁLISIS ELÁSTICO

Se han desarrollado diversos métodos a lo largo de muchos años para el análisis elástico de vigas y pórticos continuos. Los llamados clásicos (ver la referencia 11.1), como la aplicación del teorema de los tres momentos, la teoría del trabajo mínimo (segundo teorema de Castigliano) y el procedimiento general de deformaciones consistentes, resultan útiles sólo para el análisis de vigas continuas con pocas luces o para pórticos muy simples. Para los casos más complicados que por lo general se encuentran en la práctica, estos procesos resultan excesivamente tediosos y se prefieren otras alternativas.

Durante muchos años, la metodología de distribución de momentos (ver la referencia 11.1) conformó la herramienta analítica básica para el análisis de vigas y pórticos indeterminados de concreto, al principio con ayuda de la regla de cálculo y posteriormente con la de las calculadoras manuales programables. Para problemas relativamente pequeños, la distribución de momentos aún puede proporcionar los resultados más rápidos y se utiliza con frecuencia en la práctica actual. Sin embargo, ahora con la amplia disponibilidad de computadores, los métodos manuales han sido remplazados por análisis matriciales, que ofrecen soluciones rápidas con un alto grado de precisión (ver las referencias 11.2 a 11.6).

Los métodos aproximados de análisis, basados bien sea en esquemas cuidadosos de la estructura deformada bajo carga o en coeficientes de momento, suministran un medio para la estimación

rápida de fuerzas y momentos internos (ver la referencia 11.7). Estos estimativos son útiles en diseños preliminares y para verificar las soluciones más exactas en busca de errores graves generados por equivocaciones en la entrada de datos a los programas de computador. Para estructuras de menor importancia, estos procesos aproximados pueden ser la base para el diseño final.

Considerando los excelentes textos disponibles que se relacionan con los métodos de análisis (por ejemplo, ver las referencias 11.1 a 11.7), la presente discusión se limitará a una evaluación de la utilidad de varios de los procedimientos más importantes, con referencia particular al análisis de estructuras de concreto reforzado. Algunas idealizaciones y aproximaciones que facilitan la solución en los casos prácticos se describirán con mayor detalle.

a. Ángulo de giro y deflexión

El método del ángulo de giro y deflexión fue desarrollado en forma independiente por Bendixen en Alemania en 1914, y por Maney en los Estados Unidos en 1915. Éste se basa en el planteamiento de dos ecuaciones para cada elemento de un pórtico continuo, una en cada extremo, expresando el momento en el extremo como la suma de cuatro contribuciones: (1) el momento de empotramiento asociado con una condición supuesta de restricción al giro en el extremo para la luz cargada; (2) el momento asociado con la rotación de la tangente a la curva elástica en el extremo en consideración del elemento; (3) el momento asociado con la rotación de la tangente en el otro extremo del elemento; y (4) el momento asociado con la traslación de un extremo del elemento con respecto a otro. Estas ecuaciones se relacionan aplicando los requisitos de equilibrio y de compatibilidad en las uniones. Se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas y lineales para la estructura completa, en las cuales los desplazamientos de la estructura son las incógnitas. La solución para estos desplazamientos permite el cálculo de todas las fuerzas y momentos internos (ver la referencia 11.1).

Este procedimiento es apropiado para resolver vigas continuas, siempre y cuando éstas no tengan muchas luces. Su utilidad se extiende mediante modificaciones que aprovechan la simetría y la asimetría, y las condiciones de apoyo del extremo articulado cuando éstas existen. Sin embargo, para pórticos de varios pisos y múltiples luces, donde hay una gran cantidad de elementos y de uniones que, por lo general, van a incluir rotaciones al igual que traslaciones de estas uniones, el esfuerzo requerido para resolver el gran número de ecuaciones simultáneas asociado es excesivo. Otros procesos de análisis resultan más atractivos en estos casos.

b. Distribución de momentos

En 1932, Hardy Cross desarrolló el método de la distribución de momentos para resolver problemas de análisis de pórticos que implican muchos desplazamientos y rotaciones desconocidas en las uniones. Durante las siguientes tres décadas, este modelo fue el procedimiento estándar para este tipo de análisis en las oficinas de ingeniería. Incluso ahora, sirve como herramienta analítica fundamental cuando no se dispone de computadores.

El método de distribución de momentos (ver la referencia 11.1) puede considerarse como una solución iterativa de las ecuaciones de ángulo de giro y deflexión. Los momentos de empotramiento para cada elemento se modifican en una serie de ciclos, cada uno convergiendo al resultado final preciso, para considerar las rotaciones y traslaciones de las uniones. La serie resultante puede terminarse cuando se alcanza el grado requerido de precisión. Una vez que se obtienen los momentos en los extremos, todas las resultantes de esfuerzos en los elementos pueden obtenerse mediante las leyes de la estática.

Mediante análisis comparativos se encuentra que, excepto en casos poco usuales, para pórticos de edificios los momentos determinados mediante la modificación de los momentos de empotramiento con apenas dos ciclos de distribución, serán suficientemente precisos para propósitos de diseño (ver la referencia 11.8).

c. Análisis matriciales

La introducción de los métodos matriciales de análisis en la ingeniería estructural en los inicios de la década de los años 50, en combinación con la disponibilidad creciente de computadores, produjo cambios en la práctica que pueden describirse como revolucionarios. La utilización de la teoría matricial hace posible reducir las operaciones numéricas detalladas que se requieren en el análisis de una estructura indeterminada, a procesos sistemáticos de manipulación de matrices que pueden llevarse a cabo automática y rápidamente mediante computadores. Estos modelos permiten la solución rápida de problemas que comprenden gran cantidad de incógnitas. En consecuencia, se da menor importancia a las técnicas especiales limitadas a ciertos tipos de problemas y han surgido metodologías poderosas de aplicación general como el método matricial de desplazamientos (ver las referencias 11.2 a 11.6). De esta manera, se obtiene en forma rápida y a bajo costo una determinación "exacta" de momentos, cortantes y fuerzas axiales para la totalidad de un pórtico de edificio. Cuando se requiere, es posible adelantar análisis de pórticos tridimensionales. Pueden considerarse gran cantidad de alternativas incluyendo cargas dinámicas.

Algunos ingenieros prefieren desarrollar sus propios programas de computador para el análisis estructural, adaptados específicamente a sus propias necesidades. Sin embargo, la mayoría hacen uso de programas de propósito general, de disponibilidad inmediata, aplicables a una amplia variedad de problemas. El usuario suministra, con frecuencia de modo interactivo, los datos de entrada, los cuales incluyen cargas, propiedades de los materiales, geometría de la estructura y dimensiones de los elementos. Los resultados incluyen desplazamientos y rotaciones en las uniones, y los momentos cortantes y fuerzas axiales en las secciones críticas para toda la estructura. Se encuentran disponibles algunos programas, tales como STMFR-II (American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan), PCA-FRAME (Portland Cement Association, Skokie Illinois), y otros provenientes de diversas firmas particulares. La mayoría de los programas tienen capacidad para análisis de estructuras aporticadas en dos o tres dimensiones, sometiéndolas a cargas estáticas o dinámicas, muros de cortante y otros elementos en una pequeña fracción del tiempo requerido normalmente, proporcionando resultados con alto grado de precisión. En general, es suficiente con los computadores de escritorio corrientes.

11.5 IDEALIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA

Rara vez es posible que un ingeniero esté en capacidad de analizar una estructura real, redundante y compleja. Casi sin excepción, deben realizarse algunas idealizaciones en el desarrollo de un modelo analítico, de manera que éste sea factible de llevar a cabo. Así, los elementos tridimensionales se representan mediante líneas rectas, por lo general coincidentes con los ejes centroidales reales. Los apoyos se idealizan mediante rodillos, articulaciones o uniones rígidas. Las cargas distribuidas en la realidad sobre un área finita se suponen como cargas puntuales. Para estructuras aporticadas y tridimensionales, el análisis se limita comúnmente a pórticos planos, cada uno de los cuales se supone que opera de manera independiente.

En la idealización de pórticos de concreto reforzado, algunos aspectos exigen un comentario especial. Los más importantes de éstos se refieren a las longitudes efectivas de las luces, a los momentos efectivos de inercia y a las condiciones de apoyo.

a. Longitud efectiva de luz

En el análisis elástico de pórticos, una estructura se representa por lo general mediante un diagrama de líneas sencillas que se basa en forma dimensional en las distancias entre ejes de columnas y vigas de entrepiso. En realidad, las alturas de vigas y los anchos de columnas (en el plano del

pórtico) conforman una fracción sustancial en las respectivas longitudes de estos elementos; por consiguiente, las longitudes libres son considerablemente menores que las distancias entre ejes de las uniones.

Es evidente que la premisa usual en el análisis de pórticos referente a que los elementos son prismáticos, con un momento de inercia constante entre ejes, no es exacta. Una viga que llega hasta una columna puede ser prismática hasta la cara de la misma, pero a partir de ese punto hasta el eje de la columna, tiene una altura bastante mayor, con un momento de inercia que podría considerarse como infinito en comparación con el del resto de la luz. Para las columnas se obtiene una variación similar en ancho y en momento de inercia. Así que, para ser exactos, la variación real de la altura o el ancho del elemento debería considerarse en el análisis. Cualitativamente, esto incrementaría un poco los momentos en los apoyos de viga y reduciría los momentos dentro de la luz. Asimismo, es evidente que la sección crítica para diseño a flexión negativa ocurriría en la cara de apoyo y no en el eje del mismo, pues para todos los efectos prácticos se obtiene una altura ilimitada de la viga a todo lo ancho del apoyo.

Se observa que, para el caso de columnas, el gradiente de momentos no es muy pendiente, de modo que la diferencia entre el momento en el eje y en la cara superior o inferior de la viga es pequeña y puede ignorarse en la mayor parte de los casos. Sin embargo, la pendiente del diagrama de momentos para la viga es por lo general muy pronunciada en la zona de apoyo y en este caso se presentará una diferencia sustancial entre el momento en el eje de apoyo y el momento en la cara de la columna. Si se utilizara el primero de estos valores para calcular las dimensiones del elemento, se obtendría una sección innecesariamente grande. Es aconsejable, entonces, reducir los momentos en los apoyos, determinados mediante un análisis elástico, para tener en cuenta el ancho finito de los mismos.

En la figura 11.3, el cambio de momento entre el eje y la cara del apoyo será igual al área bajo el diagrama de cortante entre estos dos puntos. Para un apoyo de cuchilla, esta área es casi igual a $VaL/2$. Sin embargo, esta reacción se distribuye en realidad de manera desconocida a todo lo ancho

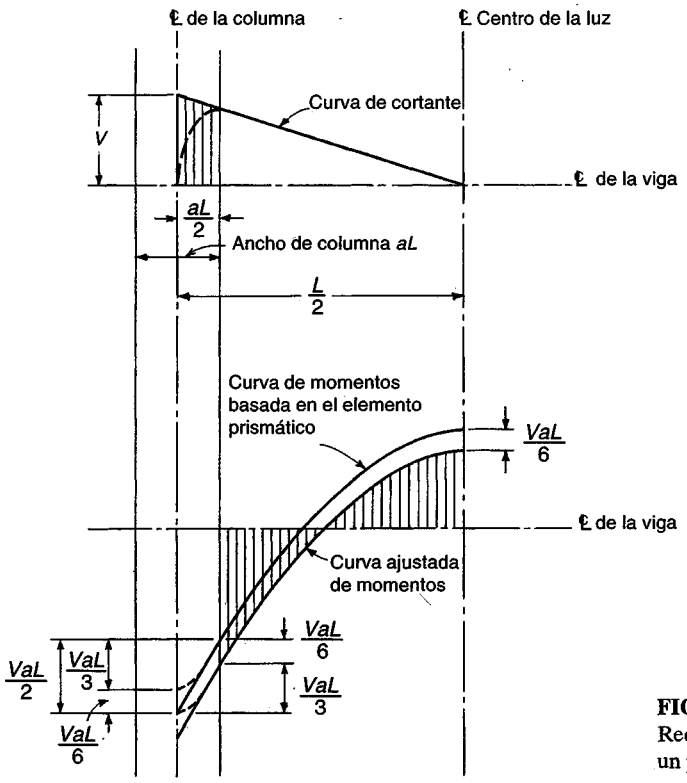


FIGURA 11.3
Reducción de los momentos negativo y positivo en un pórtico.

del apoyo. Esto tendría el efecto de modificar el diagrama de cortante como aparece con la línea punteada; se propone entonces que el área reducida se tome igual a $VaL/3$. El hecho de que la reacción sea distribuida modificará el diagrama de momentos al igual que el de cortante, produciendo un ligero redondeo del pico del momento negativo como se ilustra en la figura y la reducción de $VaL/3$ se aplica en forma ideal al diagrama de momentos, una vez que se redondee el pico. Esto dará casi el mismo momento en la cara que el obtenido al restar la cantidad $VaL/2$ del momento pico.

Sin embargo, otro efecto se hace presente: la modificación del diagrama de momentos a causa del incremento en el momento de inercia de la viga al llegar a la columna. Este efecto es similar al de un acartelamiento y significará un ligero aumento en el momento negativo y una disminución ligera en el positivo. Para valores normales de la relación a, este desplazamiento en la curva de momentos será del orden de $VaL/6$. Así, es conveniente deducir simplemente la cantidad $VaL/3$ del momento pico no redondeado, obtenido con el análisis elástico. Esto tiene en cuenta: (1) el redondeo real del diagrama de cortante y del pico de momento negativo producto de la reacción distribuida, y (2) el desplazamiento hacia abajo de la curva de momentos por efecto de acartelamiento en los apoyos. La reducción consistente del momento positivo en una cantidad $VaL/6$ se ilustra en la figura 11.3.

En relación con las reducciones de los momentos, observe que hay algunas condiciones de apoyo para las cuales no se pueden hacer reducciones en el momento negativo. Por ejemplo, cuando una viga continua está sostenida por una viga principal casi de la misma altura, debe utilizarse el momento negativo en la viga en el eje de la viga principal, para el diseño del acero de refuerzo negativo.

b. Momentos de inercia

La selección de valores razonables para los momentos de inercia de vigas y columnas para utilizar en el análisis del pórtico está muy lejos de ser un asunto sencillo. El diseño de vigas y columnas se basa en la teoría de la sección fisurada, es decir, en el supuesto de que el concreto sometido a tensión es inefectivo. Podría parecer, entonces, que los momentos de inercia que se van a utilizar deben determinarse de la misma manera, es decir, con base en la sección transformada fisurada, teniendo en cuenta de este modo los efectos del agrietamiento y la presencia del refuerzo. Infortunadamente las cosas no son así de sencillas.

En primer lugar se considera la influencia del agrietamiento. Para elementos comunes, el momento de inercia de una sección de viga fisurada es aproximadamente la mitad del de la sección bruta no fisurada de concreto. Sin embargo, la extensión del agrietamiento depende de la magnitud de los momentos con relación al momento de agrietamiento. En vigas no se encontrarán grietas de flexión cerca de los puntos de inflexión. En general, las columnas estarán casi sin fisuración, excepto aquellas que tengan una excentricidad de carga relativamente grande. Otro aspecto fundamental es el del nivel de carga que debe tenerse en cuenta para el análisis. Los elementos que se someten a agrietamiento tendrán grietas más extensas al aproximarse a la carga última que con las cargas de servicio. Los elementos a compresión no se verán afectados en este aspecto. Así que la rigidez relativa depende del nivel de carga.

Otra complicación surge del hecho de que la sección transversal efectiva de las vigas varía a lo largo de la luz. En la región de flexión positiva, una viga tiene por lo general la forma de una sección T. Para vigas T comunes, con ancho de ala aproximado igual de cuatro a seis veces el ancho de alma y con espesor de ala entre 0.2 a 0.4 veces la altura total, el momento de inercia bruto será cerca de dos veces el del alma rectangular con ancho b_w y altura h. Sin embargo, en la región de flexión negativa próxima a los apoyos, la parte inferior de la sección está en compresión. El ala de la sección T se fisura y la sección transversal efectiva es, en consecuencia, rectangular.

La cantidad y la distribución del refuerzo también tienen influencia. En vigas, si las barras inferiores son continuas a través de los apoyos, lo cual es una práctica frecuente, este acero actúa

como refuerzo a compresión y rigidiza la sección. En columnas las cuantías de acero son, por lo general, mucho mayores que en las vigas, incrementando así la rigidez.

Dadas estas complicaciones es claro que se necesitan algunas simplificaciones. Es muy útil observar que en la mayor parte de los casos, es sólo la *relación* de las rigideces de los elementos y no el valor absoluto de ellas la que influye en el resultado final. Las relaciones de las rigideces se verán afectadas muy poco por los diferentes supuestos en el cálculo de los momentos de inercia, si hay consistencia para todos los elementos.

En la práctica, por lo general es suficientemente preciso basar los cálculos de las rigideces para el análisis de pórticos en la sección transversal bruta del concreto de las columnas. Para vigas T continuas, el agrietamiento reducirá el momento de inercia hasta casi la mitad del de la sección no fisurada. Así que, el efecto de las alas y el del agrietamiento prácticamente se cancelan en la región de flexión positiva. En las regiones de momento negativo no existen alas; sin embargo, si las barras inferiores continúan a través del apoyo para servir de acero a compresión, la rigidez adicionada tiende a compensar la falta del ala de compresión. Así que, para vigas, se puede utilizar generalmente un momento constante de inercia, basado en el área de la sección transversal rectangular $b_w h$.

El Código ACI 8.6.1 establece que puede utilizarse *cualquier* conjunto de suposiciones razonables para calcular las rigideces relativas, siempre y cuando las suposiciones adoptadas sean consistentes en todo el análisis. El comentario del Código ACI R.8. 6.1 anota que los valores *relativos* de rigidez son importantes y que dos suposiciones normalmente empleadas son utilizar valores brutos de *EI* para todos los elementos o utilizar la mitad de los valores brutos de *EI* para vigas y el total para columnas. La primera de estas alternativas corresponde a la discusión anterior cuando se utiliza *la sección de viga rectangular*, mientras que la segunda se ajusta a las anteriores recomendaciones cuando se utiliza la mitad del valor de *EI* de la *sección de viga T*.

c. Condiciones de apoyo

Para propósitos del análisis, muchas estructuras pueden dividirse en una cantidad determinada de pórticos bidimensionales. Sin embargo, aún en estos casos, hay situaciones en las que resulta imposible predecir con precisión cuáles pueden ser las condiciones de restricción en los extremos de una luz; no obstante, los momentos se afectan con frecuencia en forma considerable por la selección realizada. En muchos otros casos, es necesario considerar las estructuras como tridimensionales. La restricción rotacional en una unión puede verse influida, o incluso regida, por las características de los elementos que llegan hasta ella en dirección perpendicular. Elementos adyacentes o pórticos paralelos a aquél bajo estudio pueden, de la misma manera, influir su comportamiento.

Si las vigas de piso se vacían monolíticamente con muros de concreto reforzado (caso muy frecuente cuando vigas del primer piso están soportadas en dirección perpendicular por muros de cimentación), el momento de inercia del muro con respecto a un eje paralelo a su cara puede ser tan grande, que el extremo de la viga puede considerarse como totalmente empotrado para todos los efectos prácticos. Si el muro es relativamente delgado, o si la viga es particularmente masiva, debe calcularse el momento de inercia de cada uno, donde el del muro es igual a $bt^3/12$, t es el espesor del muro y b es el ancho de muro tributario a una viga.

Si los extremos exteriores de vigas de concreto se apoyan sobre muros de mampostería, lo cual se presenta con frecuencia, el supuesto de restricción rotacional nula (es decir, apoyo articulado) es probablemente el más cercano al caso real.

Para columnas apoyadas sobre zapatas relativamente pequeñas, que a su vez descansan sobre suelo compresible, se supone un extremo articulado puesto que tales suelos ofrecen muy poca resistencia a la rotación de zapata. Por otro lado, si la zapata descansa sobre roca sólida o si se utiliza un conjunto de pilotes cuya porción superior se amarra mediante un dado de concreto, el efecto es proporcionar empotramiento casi total para la columna apoyada y así debe suponerse en

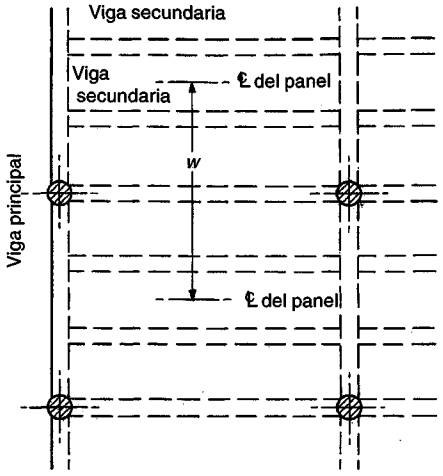


FIGURA 11.4
Sistema de entrepiso conformado por losa, vigas secundarias y vigas principales.

el análisis. Las columnas apoyadas en una losa de cimentación continua deben suponerse igualmente como empotradas en sus extremos inferiores.

Si los elementos que llegan hasta una unión en dirección perpendicular a la del plano de pórtico que se analiza tienen suficiente rigidez torsional, y si sus extremos más alejados se consideran empotrados o muy cerca de esto, sus efectos sobre la rigidez de la unión deben incluirse en los cálculos. La rigidez torsional de un elemento con longitud L se determina con la expresión GJ/L, donde G es el módulo de cortante del concreto (aproximadamente igual a $E_c/2.2$) y J es el factor de rigidez torsional del elemento. Para vigas de sección transversal rectangular o de sección conformada por elementos rectangulares, J puede tomarse igual a $\Sigma(hb^3/3 - b^4/5)$, donde h y b son las dimensiones de la sección transversal de cada elemento rectangular, siendo b la menor dimensión en cada caso. En el método de distribución de momentos, cuando se incluyen efectos de rigidez torsional, es importante que se utilicen las rigideces absolutas a flexión $4EI/L$ en vez de los valores relativos I/L.

En la figura 11.4 se ilustra una situación muy común en entrepisos de vigas secundarias y vigas principales, y en sistemas de entrepiso de viguetas de concreto. El esquema muestra un sistema de entrepiso conformado por vigas secundarias y vigas principales donde las vigas secundarias longitudinales se colocan en los tercios de cada luz, sostenidas por vigas principales transversales, adicionalmente a las vigas secundarias longitudinales soportadas en forma directa por las columnas. Si las vigas principales transversales son muy rígidas, es evidente que la rigidez a flexión de todas las vigas en el ancho w debe balancearse con la rigidez del correspondiente conjunto de columnas en el pórtico longitudinal. De otra parte, si las vigas principales tienen una rigidez torsional pequeña, habrá una amplia justificación para realizar dos análisis longitudinales independientes, uno para las vigas secundarias apoyadas directamente sobre las columnas, en el cual debe tenerse en cuenta la resistencia rotacional de éstas, y otro para las vigas secundarias que llegan a las principales, donde deben suponerse apoyos articulados. Por lo general, sería suficientemente preciso considerar *las vigas principales como rígidas torsionalmente y sumar directamente la rigidez de todas las vigas* tributarias a una columna individual. Esto tiene la ventaja adicional de que todas las vigas longitudinales tendrán las mismas dimensiones de la sección transversal e igual acero de refuerzo, lo cual facilitaría mucho la construcción. La redistribución plástica de cargas al sobrecargarlas garantizará en general momentos de restricción iguales en todas las vigas antes del colapso, tal como se supone en el diseño. Los momentos torsionales no deben ignorarse cuando se diseñan las vigas principales.

11.6 DISEÑO PRELIMINAR

Para realizar el análisis elástico de un entramado estructural es necesario conocer desde un principio las dimensiones de la sección transversal de los elementos, de manera que puedan calcularse

los momentos de inercia y las rigideces. No obstante, la determinación de estas mismas magnitudes de las secciones transversales es el propósito fundamental de este análisis. Obviamente, la estimación preliminar de los tamaños de los elementos debe ser una de las primeras etapas en el proceso. Una vez que se tengan los resultados, se diseñan los elementos y sus dimensiones resultantes se comparan con las calculadas previamente; si es necesario, se modifican las propiedades de las secciones supuestas y se repite el análisis. Puesto que este procedimiento puede ser bastante dispendioso, es muy conveniente realizar al comienzo la mejor estimación posible de los tamaños de elementos con el fin de evitar la repetición del análisis.

Con referencia a lo anterior, vale la pena repetir que en el análisis corriente de pórticos lo que importa son las rigideces relativas no las rigideces absolutas. Si en el primer estimativo de los tamaños de los elementos, las rigideces de todas las vigas y columnas se sobrestiman o subestiman casi en la misma cantidad, la corrección de estos tamaños estimados después del primer análisis tendrá muy poco o ningún efecto; en consecuencia, no se requeriría una repetición del proceso. Por otro lado, si se comete un error no uniforme en los estimativos y las rigideces relativas difieren de los valores supuestos en más del 30 por ciento aproximadamente, debe realizarse un nuevo análisis.

El diseñador experimentado puede calcular los tamaños de vigas y columnas con una precisión sorprendente. Aquéllos con muy poca o ninguna experiencia deben confiar en valores tentativos o en reglas arbitrarias modificadas para ajustarse a situaciones particulares. En pórticos de edificios, los tamaños de las vigas se regulan en general por los momentos negativos y por los cortantes en los apoyos, donde su sección efectiva es rectangular. Los momentos pueden aproximarse mediante los momentos de empotramiento para la luz particular o utilizando los coeficientes de momento del ACI (ver la sección 11.8). En muchos casos, los cortantes no van a diferir en forma importante de los calculados, que suponen un comportamiento de viga simplemente apoyada. Como alternativa, muchos diseñadores prefieren estimar la altura de las vigas como aproximadamente $\frac{3}{4}$ de pulgada por cada pie de luz, con un ancho aproximadamente igual a la mitad de la altura. Es obvio que estas dimensiones están sujetas a modificaciones según el tipo y magnitud de las cargas, los métodos de diseño y las resistencias de los materiales.

Las dimensiones de las columnas están controladas principalmente por las cargas axiales, que pueden estimarse en forma rápida, aunque la presencia de momentos en las mismas causa incremento en el área determinada a partir de estas cargas. Para columnas interiores, donde el momento de desbalance no va a ser muy grande, un aumento del 10 por ciento puede ser suficiente, mientras que para columnas exteriores, en particular para los pisos más altos, un incremento aproximado del 50 por ciento en el área sería apropiado. Los siguientes factores deben tenerse en cuenta al decidir sobre estos aumentos estimados: los momentos son mayores para columnas exteriores que para las interiores, puesto que en éstas últimas los momentos producidos por cargas muertas, generados en luces adyacentes, se balancearán considerablemente entre sí, en contraste con el caso de columnas exteriores. Además, la influencia de los momentos en comparación con la de las cargas axiales es mayor para las columnas de los pisos superiores que para las de pisos inferiores, porque los momentos por lo general son de la misma magnitud mientras que las cargas axiales son mayores en las columnas de los pisos bajos que en las de los altos. Aspectos de criterio referentes a factores como los anteriores, facilitarán al diseñador desarrollar un modelo preliminar razonablemente preciso que, en muchos casos, le permitirá efectuar un análisis satisfactorio en el primer ensayo.

11.7 ANÁLISIS APROXIMADOS

No obstante el desarrollo de métodos refinados para el análisis de vigas y pórticos, cada vez se da mayor atención a diferentes procedimientos aproximados (ver la referencia 11.7). Hay diversas razones para lo anterior. Antes de realizar el estudio completo de una estructura indeterminada, es necesario estimar las dimensiones de sus elementos con el fin de conocer las rigideces relativas, puesto que el análisis depende de ellas; estas dimensiones pueden obtenerse con base en análisis aproxima-

dos. También, aún con la disponibilidad de computadores, la mayoría de los ingenieros prefiere realizar una revisión burda de los resultados utilizando modelos aproximados para detectar errores graves. Más aún, para estructuras de menor importancia, a menudo es satisfactorio diseñar según los resultados obtenidos mediante cálculos aproximados. Por estas razones, muchos ingenieros en alguna etapa del proceso estiman los valores de momentos, cortantes y fuerzas axiales en sitios críticos, utilizando esquemas aproximados de la estructura deflectada por las cargas aplicadas.

Si los puntos de inflexión (o sea aquellos puntos de los elementos donde el momento flector es cero y se presenta una inversión en la curvatura de la elástica) se localizan exactamente, se pueden hallar valores aceptables de las fuerzas en una estructura aporticada con base en el solo equilibrio estático. Cada porción de la estructura debe estar en equilibrio bajo la acción de las cargas externas aplicadas y las fuerzas internas resultantes.

Por ejemplo, para la viga de extremos empotrados de la figura 11.5*a*, los puntos de inflexión bajo carga uniformemente distribuida se sabe que están localizados a $0.211l$ de los extremos de la luz. Puesto que el momento en estos puntos es cero, se pueden colocar rótulas imaginarias en los mismos sin modificar el comportamiento del elemento. Es posible analizar los segmentos individuales entre rótulas mediante estática, como aparece en la figura 11.5*b*. Si se empieza con el segmento central, deben actuar cortantes en las rótulas iguales a $0.289wl$; éstos, junto con la carga transversal, producen un momento en el centro de la luz igual a $0.0417wl^2$. Luego se procede con los segmentos exteriores, se aplica una carga hacia abajo en la rótula, la cual representa el cortante que proviene del segmento central. Esta carga, junto con la carga aplicada, producen momentos en los apoyos iguales a $0.0833wl^2$. Para este ejemplo, observe que como se conocía desde el comienzo la posición correcta de los puntos de inflexión, el diagrama resultante de momentos de la figura 11.5*c* coincide de manera exacta con el diagrama real de momentos para la viga con extremos

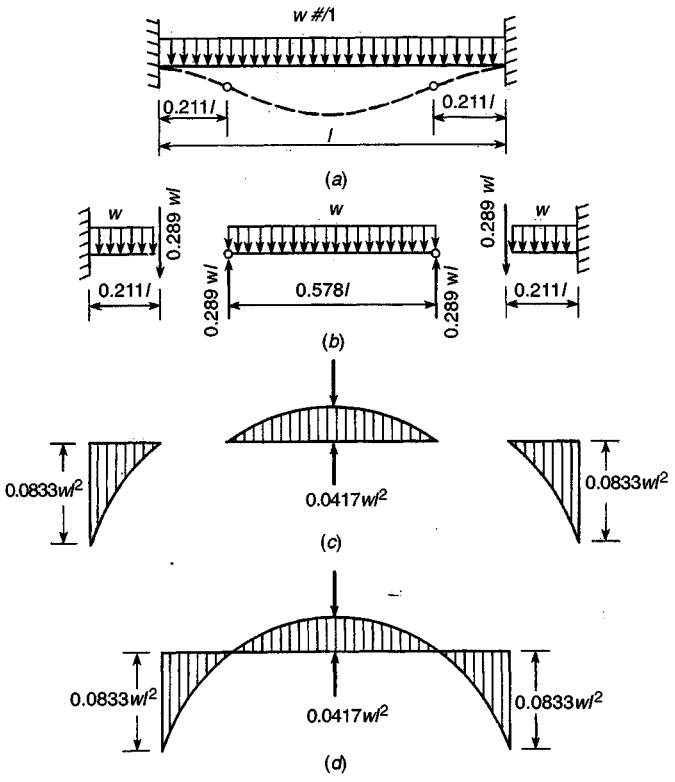


FIGURA 11.5
Análisis de una viga empotrada por localización de los puntos de inflexión.

empotrados que ilustra la figura 11.5*d*. En casos más prácticos, los puntos de inflexión deben estimarse y los resultados obtenidos serán apenas una aproximación de los valores reales.

La utilización de análisis aproximados para determinar las fuerzas en pórticos se ilustra con la figura 11.6. La figura 11.6*a* indica la geometría y la distribución de cargas en un pórtico rígido de dos elementos. En la figura 11.6*b* se presenta un esquema exagerado de la posible forma deflectada, junto con la localización estimada de los puntos de inflexión. Con base en esto, la porción central de la viga principal se analiza mediante estática, como en la figura 11.6*d*, para obtener los cortantes de la viga principal en los puntos de inflexión, iguales a 7 klb, actuando simultáneamente con una fuerza axial P (aún no determinada). Asimismo, los requisitos de la estática aplicados a los segmentos exteriores de la viga principal de la figura 11.6*c* y la 11.6*e*, arrojan cortantes verticales de 11 y 13 klb en B y C respectivamente, y momentos en los extremos de 18 y 30 klb-pie para los mismos sitios. Luego de proceder hacia el segmento superior de la columna que aparece en la figura 11.6*f*, con una fuerza axial conocida de 11 klb y con un momento actuante en la parte superior de 18 klb-pie, se requiere un cortante horizontal de 4.5 klb en el punto de inflexión para lograr el equilibrio. Finalmente, el análisis estático de la parte inferior de la columna indica que se necesita un momento de 9 klb-pie en A, como en la figura 11.6*g*. El valor de P igual a 4.5 klb se obtiene mediante la suma de fuerzas horizontales en el nudo B.

El diagrama de momentos que resulta del análisis aproximado se ilustra en la figura 11.6*h*. Por comparación, un análisis exacto del pórtico indica unos momentos en los extremos del elemento de 8 klb-pie en A, 16 klb-pie en B y 28 klb-pie en C. Los resultados del análisis aproximado serían satisfactorios para el diseño en muchos casos; por otro lado, si se va a realizar un análisis más exacto, con este método se puede hacer una verificación valiosa de sus magnitudes.

Un caso especial de los métodos aproximados descritos, conocido como *método del portal,* se utiliza generalmente para estimar los efectos de desplazamientos laterales ocasionados por fuerzas

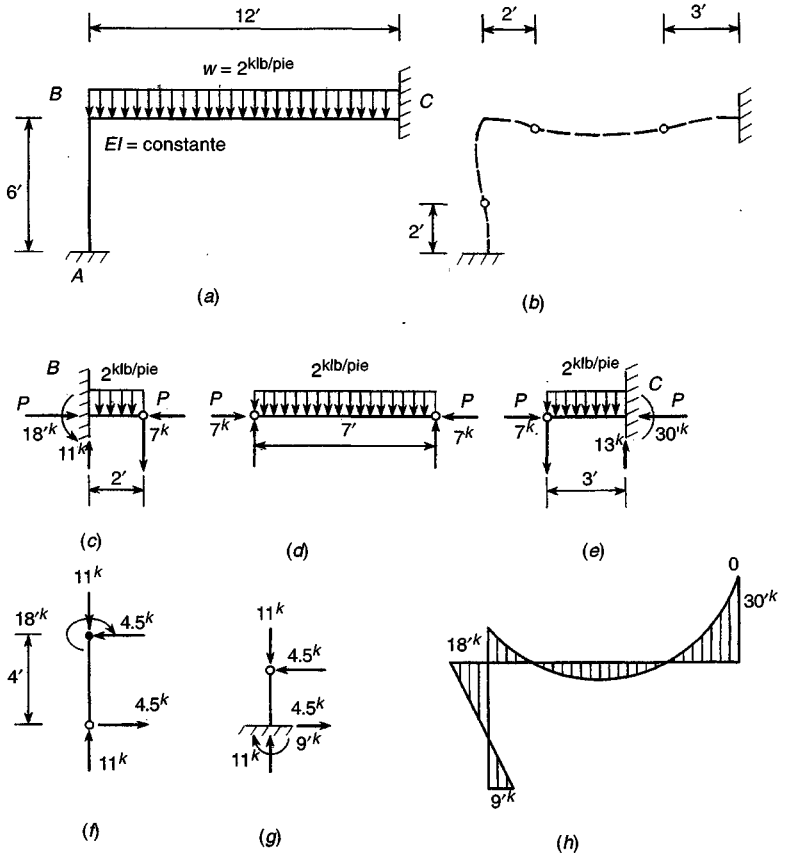


FIGURA 11.6
Análisis aproximado de un pórtico rígido.

laterales que actúan sobre pórticos de edificios de varios pisos. Para estos pórticos, es usual suponer que las cargas horizontales se aplican sólo en las uniones. Si esto es cierto, los momentos en todos los elementos varían en forma lineal y, excepto para elementos articulados, tienen signos opuestos cerca del punto medio de cada elemento.

Para un pórtico rectangular simple con tres elementos, las fuerzas cortantes son las mismas en las dos columnas y cada una es igual a la mitad de la carga horizontal externa. Si una de las columnas fuera más rígida que la otra, se requeriría una fuerza horizontal mayor para desplazarla la misma distancia horizontal que a la columna más flexible. En consecuencia, la porción del cortante total resistido por la columna más rígida es mayor que la de la columna más flexible.

En pórticos de edificios de varios pisos, los momentos y las fuerzas en vigas principales y en columnas de cada piso individual se distribuyen básicamente de la misma manera que la ya analizada para pórticos de un solo piso. El método del portal para el cálculo aproximado de momentos, cortantes y fuerzas axiales, producidos por cargas horizontales, se basa por tanto en las siguientes proposiciones sencillas:

1. El cortante horizontal total de todas las columnas en determinado piso es igual y opuesto a la suma de todas las cargas horizontales que actúan por encima de ese piso.
2. El cortante horizontal es el mismo en las dos columnas exteriores; el de cada columna interior es el doble que el de una columna exterior.
3. Los puntos de inflexión de todos los elementos, columnas y vigas principales, se localizan en la mitad de la distancia entre uniones.

Aunque la última de estas proposiciones se aplica comúnmente a todas las columnas, incluyendo las de pisos inferiores, los autores prefieren considerar éstas últimas en forma aislada según las condiciones de la cimentación. Si las condiciones reales son tales que impiden de hecho las rotaciones (cimentaciones sobre roca, pilotes masivos, etc.), los puntos de inflexión en las columnas inferiores están por encima del punto medio y pueden suponerse a una distancia de $2h/3$, medida desde la parte inferior. Si se da muy poca resistencia a la rotación, por ejemplo, el caso de zapatas relativamente pequeñas sobre suelos compresibles, el punto de inflexión se localiza más cerca de la parte inferior y se asume a una distancia $h/3$ de esta parte o aún más bajo (para articulaciones ideales, el punto de inflexión se ubica en la articulación misma, es decir, en el extremo inferior). Puesto que los cortantes y momentos correspondientes son mayores en el piso inferior, es de vital importancia una evaluación concienzuda de las condiciones de la cimentación y de la manera como éstas afectan la localización de los puntos de inflexión.

La primera de las tres proposiciones citadas anteriormente se basa en que las fuerzas horizontales deben estar en equilibrio en cualquier nivel. La segunda tiene en cuenta el hecho de que en pórticos de edificios, las columnas interiores por lo general son más rígidas que las exteriores porque: (1) las cargas axiales mayores exigen secciones transversales mayores, y (2) las columnas exteriores están restringidas a la rotación en las uniones únicamente por una viga principal, mientras que las columnas interiores están restringidas por dos de estos elementos. La tercera es bastante cierta puesto que, exceptuando las columnas superiores e inferiores y en un menor grado las vigas principales exteriores, cada elemento del pórtico de un edificio está restringido de la misma manera en los dos extremos. Por esta razón, éste se deflecta con cargas horizontales de manera asimétrica, con el punto de inflexión en la mitad de la longitud.

Los cálculos en este método son extremadamente sencillos. Una vez que se determinan los cortantes en las columnas a partir de las proposiciones 1 y 2, y que se ubican los puntos de inflexión con la 3, todos los momentos, cortantes y fuerzas axiales se calculan simplemente por estática. Este proceso se ilustra en la figura 11.7*a*.

Considere las uniones C y D. El cortante total en el segundo piso es $3 + 6 = 9$ klb. De acuerdo con la proposición 2, el cortante en cada columna exterior es $9/6 = 1.5$ klb, y en cada

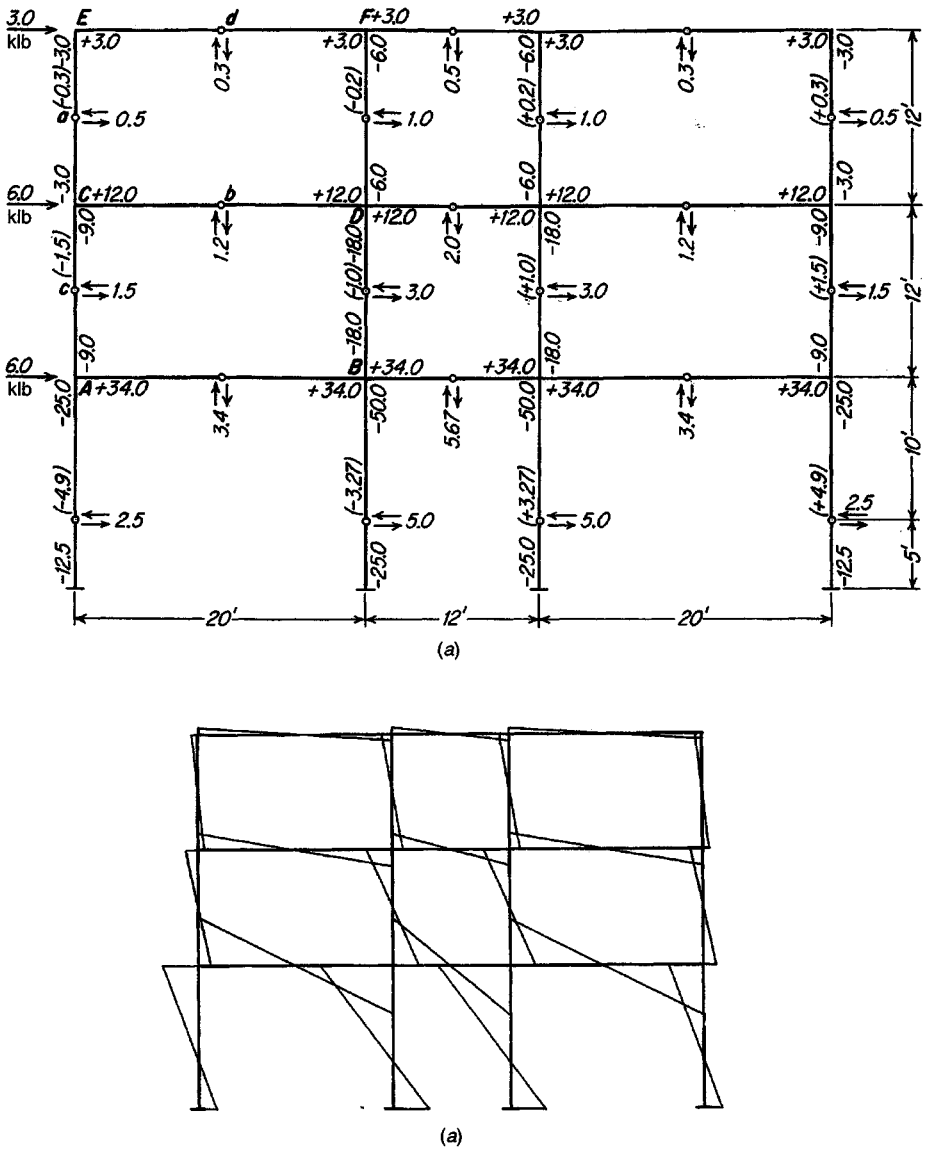


FIGURA 11.7
Método del portal para determinar momentos generados por cargas de viento en un pórtico de edificio: (*a*) momentos, cortantes y fuerzas axiales; (*b*) variaciones de los momentos.

columna interior es 2 × 1.5 = 3.0 klb. Los cortantes en los otros pisos, obtenidos de la misma manera, actúan en las rótulas como se indica. Tenga en cuenta el equilibrio de estructura rígida entre las rótulas *a, b* y *c*; los momentos en las columnas, 3.0 y 9.0, respectivamente, se obtienen en forma directa multiplicando los cortantes por sus brazos de palanca de 6 pies. El momento en la viga principal en *C,* necesario para el equilibrio, es igual y opuesto a la suma de los momentos en las columnas. El cortante en la viga principal se obtiene si su momento (es decir, el cortante multiplicado por la mitad de la luz de la viga principal) es igual al de la viga principal en *C*. De ahí que el cortante es 12.0/10 = 1.2 klb. El momento en el extremo *D* es igual al de *C*, puesto que el punto de inflexión está en el centro de la luz. En *D*, los momentos en las columnas se calculan de la misma manera a partir de los cortantes conocidos en las columnas y de los brazos de palanca. La suma de los momentos en las dos vigas principales, para producir equilibrio, debe ser igual y opuesta a la suma de los momentos en las dos columnas; a partir de esto, el momento en la viga

principal a la derecha de C es 18.0 + 6.0 – 12.0 = 12.0. Las fuerzas axiales en las columnas también se obtienen mediante estática. Así que, para el cuerpo rígido *aEd*, un cortante vertical de 0.3 klb debe actuar hacia arriba en *d*. Para equilibrarlo se requiere una fuerza de tensión de –0.3 klb en la columna *CE*. En el cuerpo rígido *abc* se adiciona un cortante hacia arriba de 1.2 klb en *b* a la tensión previa hacia arriba de 0.3 klb en *a*. Para equilibrar estas dos fuerzas, se exige una fuerza de tensión de –1.5 klb en la columna *AC*. Si se considera el equilibrio de todas las otras estructuras parciales entre rótulas de manera similar, todos los momentos, fuerzas u cortantes se determinan rápidamente.

En este caso se supuso una cimentación relativamente flexible y la localización de los puntos de inflexión de la parte más baja se estimó en $h/3$ desde la parte inferior. Las características generales de la distribución resultante de momentos se ilustra en la figura 11.7*b*.

11.8 COEFICIENTES DE MOMENTO DEL CÓDIGO ACI

El Código ACI incluye expresiones que pueden utilizarse para el cálculo aproximado de momentos y cortantes máximos en vigas continuas y en losas armadas en una dirección. Las expresiones para momento toman la forma de un coeficiente multiplicado por $w_u l_n^2$, donde w_u es la carga mayorada total por unidad de longitud en la luz, y l_n es la luz libre entre cara y cara de los apoyos para momento positivo, o el promedio de las dos luces libres adyacentes para momento negativo. Los cortantes se toman iguales a un coeficiente multiplicado por $w_u l_n/2$. Los coeficientes estipulados por el Código ACI 8.3.3 se presentan en la tabla 11.1 y se resumen en la figura 11.8.

Los coeficientes de momento del ACI se determinaron con base en análisis elásticos, según las aplicaciones alternas de la carga viva, para lograr máximos momentos negativos o positivos en las secciones críticas, como se describió en la sección 11.2. Éstos son aplicables dentro de las siguientes limitaciones:

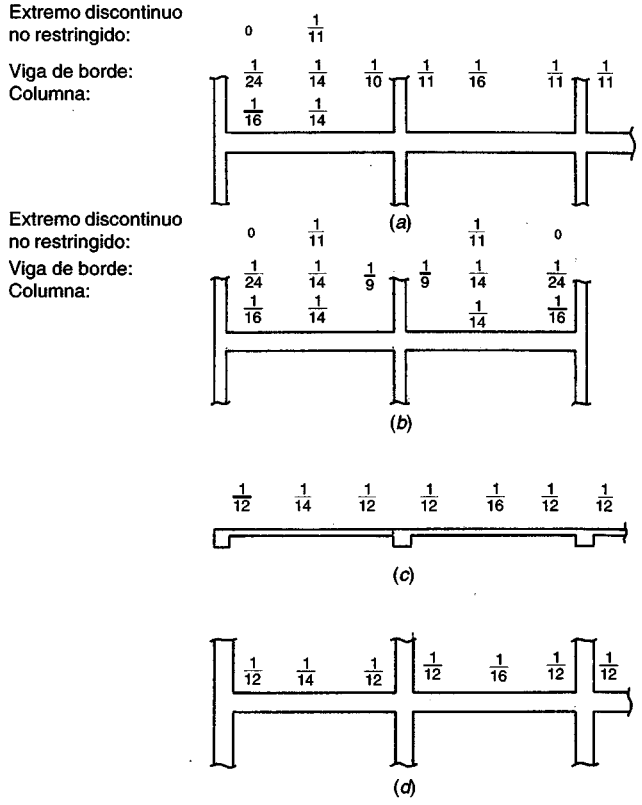


FIGURA 11.8
Resumen de los coeficientes de momento del Código ACI: (*a*) vigas con más de dos luces; (*b*) vigas con dos luces únicamente; (*c*) losas con luces que no exceden 10 pies; (*d*) vigas en las cuales la suma de las rigideces de las columnas excede ocho veces la suma de las rigideces de las vigas para cada extremo de la luz.

1. Se tienen dos o más luces.
2. Las luces son aproximadamente iguales; la más larga de las dos luces adyacentes no puede ser mayor que la más corta en más del 20 por ciento.
3. Las cargas son uniformemente distribuidas.
4. La carga viva unitaria no excede tres veces la carga muerta unitaria.
5. Los elementos son prismáticos.

TABLA 11 .1
Valores de momento y de cortante utilizando los coeficientes del ACI†

Momento positivo	
Luces exteriores	
Si el extremo discontinuo no está restringido	$\frac{1}{11}w_u l_n^2$
Si el extremo discontinuo se construye en forma integral con el soporte	$\frac{1}{14}w_u l_n^2$
Luces interiores	$\frac{1}{16}w_u l_n^2$
Momento negativo en la cara exterior del primer apoyo interior	
Dos luces	$\frac{1}{9}w_u l_n^2$
Más de dos luces	$\frac{1}{10}w_u l_n^2$
Momento negativo en otras caras de apoyos interiores	$\frac{1}{11}w_u l_n^2$
Momento negativo en la cara de todos los apoyos para: (1) losas con luces que no exceden 10 pies, y (2) vigas secundarias y vigas principales cuando la relación de la suma de las rigideces de columna a la de las rigideces de las vigas excede ocho veces en cada extremo de la luz	$\frac{1}{12}w_u l_n^2$
Momento negativo en las caras interiores de los apoyos exteriores para elementos construidos integralmente con sus soportes	
Cuando el soporte es una viga de borde o una principal	$\frac{1}{24}w_u l_n^2$
Cuando el soporte es una columna	$\frac{1}{16}w_u l_n^2$
Cortante en los elementos finales en el primer apoyo interior	$1.15\frac{w_u l_n}{2}$
Cortante en todos los demás apoyos	$\frac{w_u l_n}{2}$

†w_u = carga mayorada total por unidad de longitud de viga o por unidad de área de losa.
l_n = luz libre para momento positivo y cortante, y promedio de las dos luces libres adyacentes para momento negativo.

Puesto que se consideran patrones alternos de aplicación de cargas, el resultado de la aplicación de los coeficientes de momento del Código no es un solo diagrama de momentos para determinada luz, sino una envolvente de momentos máximos como lo ilustra la figura 11.9 para una luz de un pórtico continuo. Para el momento máximo positivo, dicha luz soportará las cargas muertas y vivas mientras que las luces adyacentes lo harán únicamente con las cargas muertas, produciendo el diagrama de la figura 11.9*a*. Para el momento negativo máximo en el apoyo izquierdo, tanto las cargas muertas como las vivas deben colocarse sobre la luz dada y en la de la izquierda, mientras que la luz adyacente a la derecha soportaría sólo carga muerta, obteniéndose así el resultado que aparece en la figura 11.9*b*. La figura 11.9*c* muestra los resultados correspondientes para momento máximo en el apoyo derecho. La envolvente de momentos de la figura 11.9*d*, que da la base para el diseño a lo largo de la luz, es un diagrama de momentos compuesto

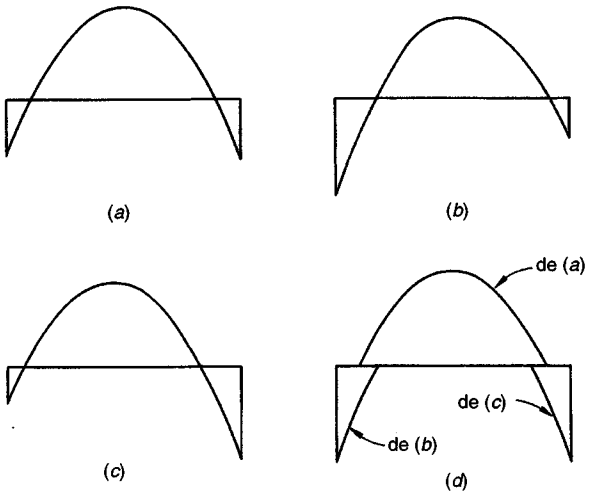


FIGURA 11.9
Diagramas de momentos máximos y envolvente de momentos para vigas continuas: (*a*) momento positivo máximo; (*b*) momento negativo máximo en el extremo izquierdo; (*c*) momento negativo máximo en el extremo derecho; (*d*) envolvente de momentos.

por las porciones que controlan los diagramas desarrollados anteriormente. Se observa que existe un intervalo de posiciones para los puntos de inflexión resultantes de las distribuciones alternas de carga. Las localizaciones extremas, requeridas para determinar los puntos de corte de las barras, pueden encontrarse con la ayuda del gráfico A.3 del apéndice A. A partir de la figura 11.9*d*, es evidente que en la región del punto de inflexión puede presentarse una inversión en los momentos para patrones alternos de carga. Sin embargo, de acuerdo con las limitaciones establecidas de aplicabilidad de los coeficientes, estas inversiones de momentos no deben presentarse en las secciones críticas de diseño cerca de la mitad de la luz o en las caras de los apoyos.

Si se comparan los momentos encontrados mediante los coeficientes del Código ACI con los calculados por análisis más exactos, se encontrará que los coeficientes de momento son bastante conservadores. Los momentos elásticos reales pueden ser considerablemente menores. En consecuencia, en muchas estructuras de concreto reforzado es posible alcanzar una economía significativa realizando un análisis más preciso. Esto es obligatorio para vigas y losas cuyas luces difieren en más del 20 por ciento, para cargas sostenidas que no están distribuidas de manera uniforme o para cargas vivas tres veces mayores que la carga muerta.

Puesto que en un pórtico continuo los patrones de aplicación de cargas que producen los momentos críticos en las columnas son diferentes de los que generan los momentos máximos negativos en las vigas, los momentos en las columnas deben encontrarse por separado. Según el Código ACI 8.8, las columnas tienen que diseñarse para resistir la carga axial generada por las cargas mayoradas muertas y vivas actuando sobre todos los pisos superiores y la cubierta, más el momento máximo generado por las cargas mayoradas actuando sobre una sola luz adyacente del piso o cubierta que se analiza. Además, por la forma característica del diagrama de interacción de resistencia de la columna (ver el capítulo 8), es necesario considerar el caso que produce la relación máxima de momento a carga axial. En estructuras de varios pisos, esto resulta a partir de un patrón de aplicación de cargas con la forma de tablero de ajedrez (ver la figura 11.2*d*), que da los momentos máximos en la columna pero a una fuerza axial menor que la máxima. Como una simplificación en el cálculo de los momentos que generan las cargas gravitacionales, los extremos más alejados de las columnas pueden tratarse como empotrados. El momento encontrado en una unión columna-viga,

para determinada distribución de cargas, debe asignarse a la columna superior y a la inferior en proporción a las rigideces relativas de las columnas y a las condiciones de restricción.

Los cortantes en los extremos de las luces de un pórtico continuo se modifican a partir del valor $w_u l_n/2$ para una viga simplemente apoyada porque los momentos en los extremos están por lo general desbalanceados. Para luces interiores, dentro de las limitaciones del método de los coeficientes del Código ACI, este efecto excederá pocas veces el ocho por ciento en forma aproximada y, por consiguiente, puede ignorarse como lo sugiere la tabla 11.1. Sin embargo, para luces externas, en la cara del primer apoyo interior, el cortante adicional es significativo y la tabla 11.1 indica un incremento del 15 por ciento por encima del cortante para una viga simple equivalente. La correspondiente reducción en el cortante en la cara del apoyo exterior se desprecia conservadoramente.

11.9 ANÁLISIS LÍMITE

a. Introducción

En la actualidad, la mayor parte de las estructuras de concreto reforzado se diseñan para momentos, cortantes y fuerzas axiales encontrados mediante la teoría elástica, con métodos como los descritos en las secciones 11.1 a 11.8 de este capítulo. Por otra parte, el dimensionamiento real de los elementos se lleva a cabo con modelos de resistencia que reconocen que se tendría una respuesta inelástica de la sección y del elemento para estados de sobrecarga. Por ejemplo, las cargas mayoradas se utilizan en el análisis elástico para determinar los momentos de viga continua después de lo cual las secciones críticas de viga se diseñan con el conocimiento de que el acero estaría muy dentro del intervalo de fluencia y que la distribución de esfuerzos en el concreto sería no lineal antes del colapso final. Evidentemente, éste es un planteamiento inconsistente dentro del proceso total de análisis y diseño, aunque puede demostrarse que es seguro y conservador. Una viga o pórtico analizado y diseñado de este modo no va a fallar ante la aplicación de una carga inferior al valor calculado de esta manera†.

Por otra parte, se sabe que una viga o pórtico continuo no va a fallar normalmente cuando se alcanza la capacidad última a momento en apenas una sección crítica. En esta sección se formará una *rótula plástica* que permite grandes rotaciones con un momento resistente constante y la transferencia por este medio de la carga a otros sitios a lo largo de la luz donde no se alcanza aún la resistencia límite. Normalmente, en vigas y pórticos continuos habrá capacidad adicional en aquellos otros sitios puesto que éstos habrían sido reforzados para momentos generados por distribuciones diferentes de carga, seleccionadas para producir los máximos momentos en estos sitios.

A medida que la carga se incrementa pueden formarse otras rótulas plásticas en varios sitios a lo largo de la luz, que pueden generar de manera eventual el colapso de la estructura, pero sólo después de que se presente una significativa *redistribución de momentos.* Por ejemplo, la relación de momentos negativos a positivos, encontrada con el análisis elástico, no sigue siendo válida y la relación verdadera después de la redistribución depende de las resistencias reales a la flexión en las secciones donde se formaron rótulas.

El reconocimiento de la redistribución de momentos puede ser importante porque permite una aproximación más realista a la capacidad verdadera de una estructura para resistir cargas, lo cual conduce a un aumento en la economía. Asimismo, permite al diseñador modificar, dentro de ciertos límites, los diagramas de momento de diseño para los elementos. Algunas secciones pueden

† Para más detalles sobre este tema, ver el análisis relacionado con los teoremas del límite superior e inferior de la teoría de la plasticidad en la sección 14.2.

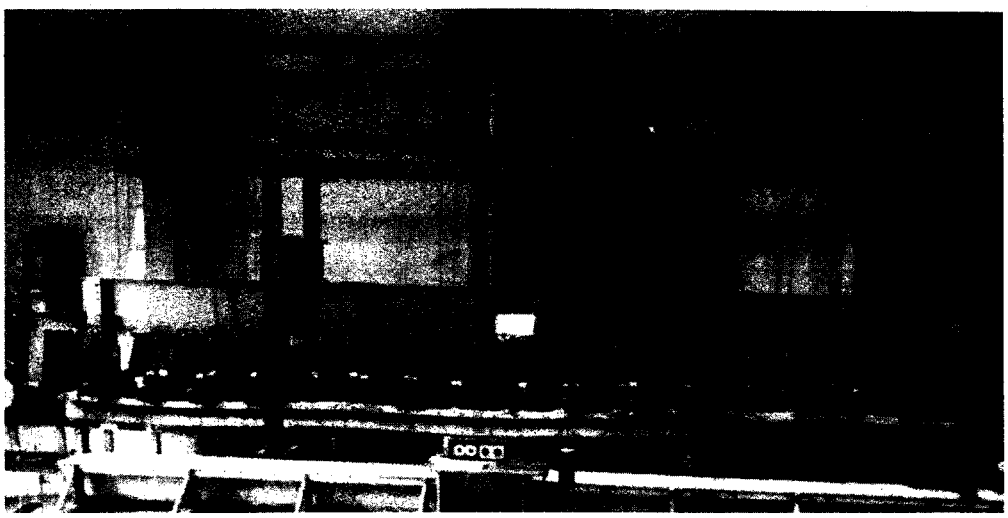


FIGURA 11.10
Viga continua de tres luces después de la formación de rótulas plásticas en los apoyos interiores.

dejarse subreforzadas en forma deliberada si la resistencia a momentos en las secciones adyacentes críticas se incrementa de modo correspondiente. Así, los ajustes realizados en los momentos de diseño permiten al diseñador reducir la congestión del refuerzo que se presenta a menudo en las áreas de momentos grandes como, por ejemplo, en las uniones viga-columna.

La formación de las rótulas plásticas se establece bastante bien mediante ensayos como el ilustrado en la figura 11.10, llevado a cabo en el George Winter Laboratory de la Universidad de Cornell. La viga continua de tres luces ilustra la respuesta inelástica común de elementos sometidos a sobrecargas considerables. Ésta se reforzó de manera que las rótulas plásticas se formaran en las secciones del apoyo interior antes de que se alcanzara la capacidad límite de las secciones en otros sitios. La viga continuó soportando cargas crecientes muy por encima de aquellas que produjeron la primera fluencia en los apoyos. Las deflexiones extremas y los cambios repentinos en la pendiente del eje del elemento que se observan en la figura, se obtuvieron sólo poco antes del colapso final.

Las *inconsistencias* de los métodos actuales para el proceso completo de análisis y diseño, la posibilidad de utilizar la *reserva de resistencia* de las estructuras de concreto resultante de la redistribución de momentos y la oportunidad de *reducir la congestión del acero* en las regiones críticas, han motivado un interés considerable en el análisis límite de estructuras de concreto reforzado, basado en los conceptos descritos anteriormente. Para vigas y pórticos, el Código ACI 8.4 permite una redistribución limitada de los momentos según la cuantía de acero a tensión. Para losas donde se utilizan casi siempre cuantías muy bajas de acero y que por tanto disponen de grandes ductilidades, los métodos de diseño plástico son especialmente adecuados.

b. Rótulas plásticas y mecanismos de colapso

Si un segmento corto de una viga de concreto reforzado se somete a un momento flector, se obtendrá una curvatura del eje de la viga y se presentará una rotación correspondiente en una cara del segmento con respecto a la otra; es conveniente expresar este efecto en términos de variación angular por unidad de longitud del elemento. La relación entre momento y variación del ángulo por unidad de longitud de la viga, o curvatura, para una sección de viga de concreto reforzado sometida a agrietamiento por tensión, se desarrolló en la sección 6.9 del capítulo 6. Allí se presentaron métodos mediante los cuales puede dibujarse un gráfico teórico que relaciona el momento y la curvatura para determinada sección de viga, como aparece en la figura 6.16.

La relación real momento-curvatura medida en ensayos de vigas difiere un poco de aquélla expuesta en la figura 6.16, en especial porque, a partir de ensayos, las curvaturas se calculan con base en deformaciones unitarias promedio calculadas sobre una longitud de medición finita, por lo general similar a la altura efectiva de la viga. En particular, el aumento repentino de la curvatura cuando ocurre el agrietamiento del concreto, que se ilustra en la figura 6.16, no se detecta a menudo porque la grieta ocurre en un solo sitio a lo largo de la longitud de medición. Para otros sitios de la viga, el concreto no fisurado comparte la resistencia a la tensión por flexión lográndose lo que se conoce como *rigidización a tensión*; este efecto tiende a reducir la curvatura. Más aún, la forma exacta de la relación momento-curvatura depende considerablemente de la cuantía de acero al igual que de las curvas exactas esfuerzo-deformación unitaria para el concreto y el acero.

La figura 11.11 ilustra un diagrama un poco simplificado de momento-curvatura para una sección de viga real de concreto que tiene una cuantía de acero a tensión aproximadamente igual a la mitad del valor balanceado. El diagrama es lineal hasta que se llega al momento de agrietamiento M_{cr}, después de lo cual se obtiene una línea recta con una pendiente un poco más tendida. Para el valor de momento donde se inicia la fluencia, M_y, la rotación unitaria comienza a aumentar en forma desproporcionada. Incrementos adicionales en el momento aplicado producen una rotación inelástica sustancial hasta que se alcanza de modo eventual la deformación unitaria límite a compresión del concreto con la rotación última ψ_u. El momento resistente para la capacidad última es, por lo general, un poco superior a la resistencia a la flexión calculada M_n, principalmente a causa del endurecimiento por deformación del refuerzo.

El efecto de la respuesta inelástica del concreto antes de la fluencia del acero es pequeño para secciones subreforzadas típicas, como se indica en la figura 6.16, y el momento de fluencia puede calcularse con base en la distribución de esfuerzos elásticos en el concreto que aparece en la figura 11.11*b*:

$$M_y = A_s f_y \left(d - \frac{kd}{3}\right) \tag{11.1}$$

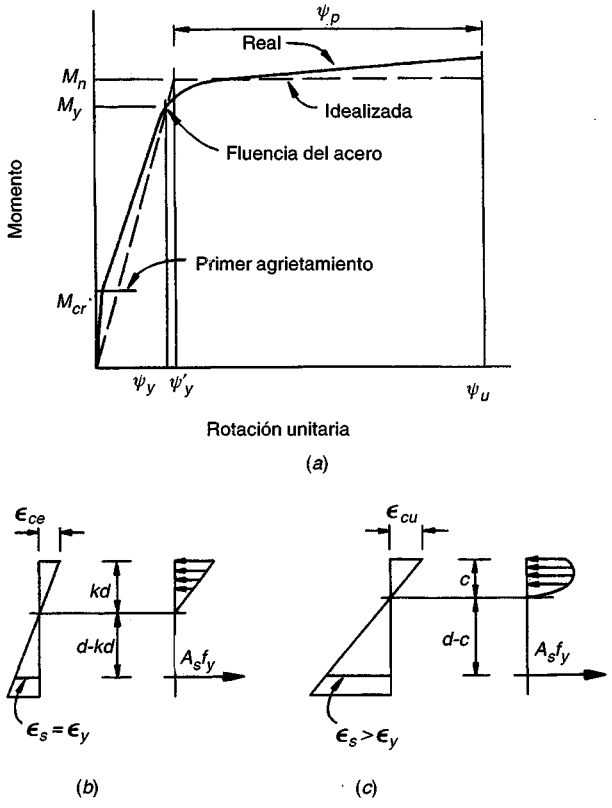


FIGURA 11.11
Características de una rótula plástica en un elemento de concreto reforzado: (*a*) diagrama típico momento-rotación; (*b*) deformaciones unitarias y esfuerzos al inicio de la fluencia; (*c*) deformaciones unitarias y esfuerzos en la falla incipiente.

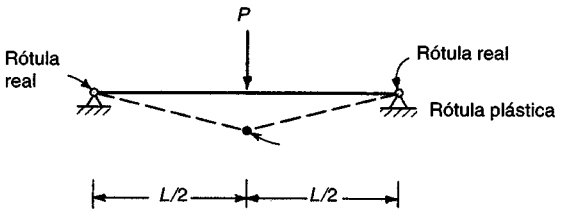


FIGURA 11.12
Elemento estáticamente determinado después de la formación de una rótula plástica.

donde *kd* es la distancia de la cara de compresión hasta el eje neutro de la sección elástica fisurada (ver la sección 3.3*b*). Con base en la figura 11.11*c* se calcula la capacidad a momento último M_n, mediante la expresión usual:

$$M_n = A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = A_s f_y\left(d - \frac{\beta_1 c}{2}\right) \tag{11.2}$$

Para propósitos de análisis límite, la curva $M - \psi$ se idealiza como se indica con la línea punteada de la figura 11.11*a*. La pendiente de la porción elástica de la curva se obtiene con suficiente precisión utilizando el momento de inercia de la sección fisurada transformada. Una vez que se alcanza el momento último calculado M_n se supone que ocurre una rotación plástica continua sin cambio en el momento aplicado. La curva elástica de la viga presentará un cambio abrupto en la pendiente para esta sección. La viga se comporta como si existiera una rótula en este punto; sin embargo, la rótula no estará "libre de fricción", sino que tendrá una resistencia a la rotación constante.

Si estas rótulas plásticas se forman en una estructura estáticamente determinada como la que aparece en la figura 11.12, ocurren deflexiones sin control y la estructura presentará colapso. El sistema resultante se identifica como un *mecanismo,* en analogía con los sistemas articulados en mecánica. Generalizando, se puede decir que los sistemas estáticamente determinados requieren la formación de apenas una rótula plástica para convertirse en mecanismos.

Esto no sucede con las estructuras estáticamente indeterminadas. En este caso, la estabilidad puede mantenerse aún cuando se hayan formado rótulas en diferentes secciones transversales. La formación de estas rótulas en las estructuras indeterminadas permite una redistribución de momentos dentro de la viga o pórtico. Para simplificar, se supondrá que la viga estáticamente indeterminada de la figura 11.13*a* se refuerza en forma simétrica, de modo que la capacidad a flexión negativa es igual a la positiva. Considere el caso en que la carga P se incrementa de manera gradual hasta que el momento elástico en el apoyo empotrado, $\frac{3}{16}PL$, sea justo igual a la capacidad a momento plástico de la sección M_n. Esta carga es

$$P = P_{el} = \frac{16}{3}\frac{M_n}{L} = 5.33\frac{M_n}{L} \tag{a}$$

Para esta carga, el momento positivo en el punto de aplicación de la carga es $\frac{5}{32}PL$, como se indica en la figura 11.13*b*. La viga aún responde elásticamente en todas partes excepto en el apoyo izquierdo; en ese punto, el apoyo realmente empotrado puede remplazarse, para propósitos de análisis, con una rótula plástica que ofrece una resistencia conocida a momento M_n. Puesto que se remplaza una reacción redundante por un momento conocido, la viga ahora es determinada.

La carga puede aumentarse aún más hasta que el momento en el punto de su aplicación resulte igual a M_n, carga para la cual se forma la segunda rótula. Así, la estructura se convierte en un mecanismo, como aparece en la figura 11.13*c,* y se presenta el colapso. El diagrama de momentos con la carga de colapso es el de la figura 11.13*d.*

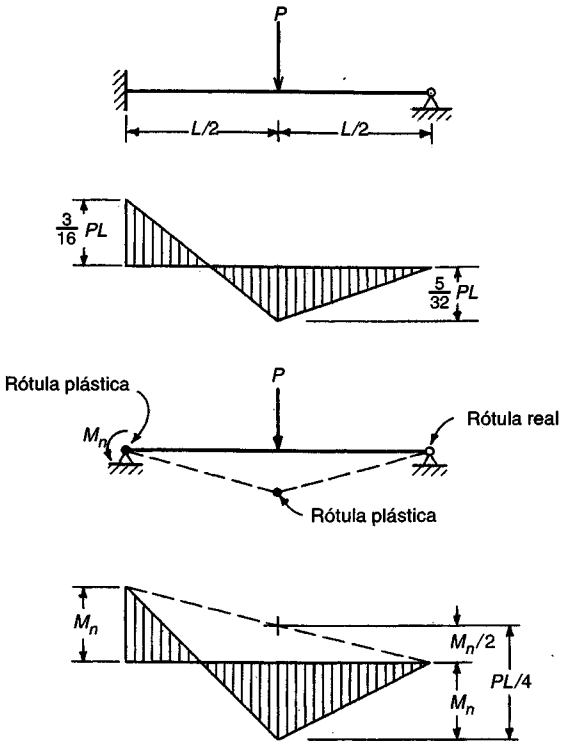


FIGURA 11.13
Viga estáticamente indeterminada con rótulas plásticas en los apoyos y en el centro de la luz.

La magnitud de la carga que produce el colapso se puede calcular considerando la geometría de la figura 11.13*d:*

$$M_n + \frac{M_n}{2} = \frac{PL}{4}$$

a partir de la cual

$$P = P_n = \frac{6M_n}{L} \qquad (b)$$

Si se comparan las ecuaciones (*b*) y *(a),* es evidente que es posible un incremento en P del 12.5 por ciento por encima de la carga que produce la formación de la primera rótula plástica, antes de que se presente el colapso de la viga. A causa de la formación de rótulas plásticas se presenta una redistribución de momentos de tal manera que, en la falla, la relación entre el momento negativo y el positivo es igual a la supuesta cuando se refuerza la estructura.

c. Demanda de rotación

Es evidente que hay una relación directa entre la cantidad deseada de redistribución y la cantidad de rotación inelástica requerida en las secciones críticas de una viga para producir la redistribución esperada. En general, cuanto mayor sea la modificación de la relación de momentos elásticos, mayor será la capacidad requerida de rotación para poder efectuar este cambio. Para ilustrar lo anterior, si la viga de la figura 11.13*a* se hubiera reforzado de acuerdo con el diagrama de momentos elásticos de la figura 11.13*b*, no se requeriría ninguna capacidad de rotación inelástica. La viga presentaría fluencia, al menos en teoría, en forma simultánea en el apoyo izquierdo y en el centro de la luz. Por otro lado, si el refuerzo en el apoyo izquierdo se redujera deliberadamente (y el refuerzo en el centro de la luz se incrementara de manera recíproca), se requeriría una rotación inelástica en el apoyo antes de alcanzar la resistencia en el centro de la luz.

La cantidad de rotación requerida en las rótulas plásticas para cualquier diagrama de momentos supuesto puede encontrarse si se tienen en cuenta los requisitos de compatibilidad. El elemento debe deflectarse bajo los efectos combinados del momento elástico y de las rótulas plásticas, de modo que se satisfagan las condiciones correctas de frontera en los apoyos. Por lo general, la deflexión en los apoyos se mantiene igual a cero. Los principios del área de momentos y de la viga conjugada son útiles en la determinación cuantitativa de la demanda de rotación (ver la referencia 11.9). En el cálculo de las deflexiones, es conveniente suponer que las rótulas plásticas ocurren en un solo punto en vez de distribuirse sobre una longitud *finita de articulación,* como ocurre en realidad. En consecuencia, al cargar la viga conjugada con rotaciones unitarias, las rótulas plásticas se representan mediante cargas concentradas.

El cálculo de las demandas de rotación se ilustrará con la viga continua de dos luces de la figura 11.14*a*. El diagrama de momento elástico que resulta de la aplicación de una carga concentrada se indica en la figura 11.14*b*. El momento en el apoyo B es $0.096Pl$, mientras que el momento bajo la carga es $0.182Pl$. Si la deflexión de la viga en el apoyo C se calculara utilizando las rotaciones unitarias iguales a M/EI, con base en este diagrama de momentos elásticos se obtendría un resultado de cero.

La figura 11.14*c* presenta como alternativa un diagrama de momentos estáticamente admisible que se obtuvo aumentando en forma arbitraria el momento en el apoyo de $0.096Pl$ hasta $0.150Pl$. Si se calculara la deflexión de la viga en C utilizando este diagrama como base, se obtendría un valor diferente de cero. Esto indica la necesidad de que haya rotación inelástica en uno o más puntos para mantener la compatibilidad geométrica en el apoyo derecho.

Si la viga estuviera reforzada de acuerdo con la figura 11.14*c*, las cargas crecientes producirían la primera rótula plástica en D, donde la viga se hace de baja resistencia en forma deliberada. Es posible que el aumento continuo de la carga genere la formación de una segunda rótula plástica en B, creando un mecanismo y ocasionando el colapso de la estructura.

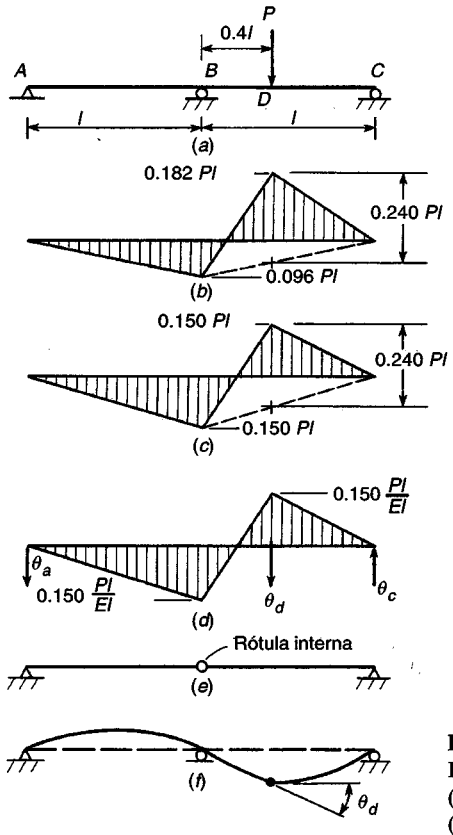


FIGURA 11.14
Redistribución de momentos en una viga de dos luces: (*a*)viga cargada; (*b*) momentos elásticos; (*c*) momentos modificados; (*d*) cargas M/EI; (*e*) una viga conjugada; (*f*) curva de la deflexión.

El análisis límite exige el cálculo de las rotaciones en todas las rótulas plásticas hasta, pero sin incluir, la última rótula que precipita el colapso real. La figura 11.14*d* indica la carga *M/El* que debe aplicarse sobre la viga conjugada de la figura 11.14*e*. También se muestra el cambio de ángulo concentrado θ_d, que debe evaluarse. Si se comienza con la luz izquierda y se toman los momentos de las cargas *M/EI* con respecto a la rótula interna de la viga conjugada en *B*, se obtiene la reacción a la izquierda de la viga conjugada (igual a la pendiente de la viga real):

$$\theta_a = 0.025 \frac{Pl^2}{EI}$$

Una vez conocida esta reacción, se toman momentos con respecto al apoyo en *C* de la viga conjugada y se iguala a cero para obtener

$$\theta_d = 0.060 \frac{Pl^2}{EI}$$

Este valor representa la discontinuidad necesaria en la pendiente de la curva elástica expuesta en la figura 11.14*f* para eliminar la deflexión de la viga en el apoyo derecho. La viga debe ser capaz de desarrollar al menos esta cantidad de rotación plástica si se supone que el diagrama modificado de momentos de la figura 11.14*c* es válido.

d. Capacidad de rotación

La capacidad de las estructuras de concreto para absorber rotaciones inelásticas en los sitios de formación de rótulas plásticas no es ilimitada. El diseñador que adopta en su totalidad el análisis límite para estructuras de concreto debe calcular no sólo la cantidad de rotación requerida en las secciones críticas que alcance el grado supuesto de redistribución de momentos, sino también la capacidad de rotación de los elementos en estas secciones para asegurar que ésta es adecuada.

La curvatura para la iniciación de la fluencia se calcula a partir de la distribución de deformaciones elásticas que ilustra la figura 11.11*b*:

$$\psi_y = \frac{\epsilon_y}{d(1-k)} \tag{11.3}$$

en la cual el valor de *k* que establece la profundidad del eje neutro elástico se encuentra con la ecuación (3.12). La rotación unitaria última puede obtenerse a partir de la geometría de la figura 11.11*c*:

$$\psi_u = \frac{\epsilon_{cu}}{c} \tag{11.4}$$

Aunque para el análisis de resistencia a la flexión se acostumbra adoptar un valor de $\epsilon_{cu} = 0.003$, para efectos del análisis límite se necesita un valor más refinado. Diversos estudios experimentales (ver las referencias 11.10 y 11.11) indican que la capacidad a deformaciones últimas del concreto está fuertemente influida por el ancho de la viga *b*, por el gradiente del momento y por la presencia de refuerzo adicional en forma de acero a compresión y de acero de "amarre" (es decir, refuerzo en el alma). Este último parámetro se introduce en forma conveniente mediante una cuantía de acero ρ'', definida como la relación entre el volumen de un estribo más el del acero a compresión tributario a éste, y el volumen de concreto tributario a un estribo. Con base en estudios empíricos, la deformación última a flexión en una rótula plástica es

$$\epsilon_{cu} = 0.003 + 0.02\frac{b}{z} + \left(\frac{\rho'' f_y}{14.5}\right)^2 \tag{11.5}$$

donde *z* es la distancia entre el punto de momento máximo y el de momento cero. Con base en las ecuaciones (11.3) a (11.5), la rotación unitaria inelástica para la relación idealizada que aparece en la figura 11.11*a* es

$$\psi_p = \psi_u - \psi_y \frac{M_n}{M_y} \tag{11.6}$$

Esta rotación plástica no se limita a una sección transversal sino que está distribuida sobre una longitud finita llamada *longitud de articulación*. Los estudios experimentales en los cuales se basa la ecuación (11.5) incluyen mediciones de rotaciones y deformaciones en una longitud igual a la altura efectiva d de los elementos ensayados. En consecuencia, ϵ_{cu} es un valor *promedio* de la deformación última sobre una longitud finita, y ψ_p, determinada mediante la ecuación (11.6), es un valor *promedio* de la rotación unitaria. La rotación inelástica total θ_p puede encontrarse multiplicando la rotación unitaria promedio por la longitud de articulación:

$$\theta_p = \left(\psi_u - \psi_y \frac{M_n}{M_y}\right) l_p \tag{11.7}$$

Con base en la evidencia actual, parece que la longitud de articulación l_p en las zonas de apoyo y para cada uno de los lados del apoyo, puede estimarse mediante la expresión

$$l_p = 0.5d + 0.05z \tag{11.8}$$

en la cual z es la distancia desde el punto de máximo momento hasta el punto de momento cero más cercano.

e. Redistribución de momentos según el Código ACI

La utilización total de la capacidad plástica de vigas y pórticos de concreto reforzado requiere un análisis extenso de todos los posibles mecanismos y una investigación de las demandas y las capacidades de rotación en todos los sitios de posible formación de rótulas. El incremento del tiempo de diseño puede no justificar los beneficios obtenidos. De otra parte, se puede realizar una cantidad restringida de redistribución de momentos elásticos en forma segura sin llevar a cabo el análisis completo, lo cual puede ser suficiente para obtener muchas de las ventajas del análisis límite.

El Código ACI 8.4 permite una cantidad limitada de redistribución, según una medida burda de la ductilidad disponible, sin necesidad de calcular de manera explícita las demandas y capacidades de rotación. La relación ρ/ρ_b, o para el caso de elementos doblemente reforzados, $(\rho - \rho')/\rho_b$, se utiliza como un indicativo de la capacidad de rotación, donde ρ_b, es la cuantía balanceada de acero dada por la ecuación (3.28). Para elementos simplemente reforzados con $\rho = \rho_b$, diversos ensayos indican que casi no hay capacidad de rotación plástica porque la deformación en el concreto está muy cercana a ϵ_{cu} cuando se inicia la fluencia del acero. Asimismo, para un elemento doblemente reforzado, cuando $\rho - \rho' = \rho_b$, habrá muy poca rotación después de la fluencia del acero y antes de que el concreto falle por aplastamiento. Sin embargo, cuando ρ o $\rho - \rho'$ son bajos, por lo general es factible lograr una rotación considerable. De acuerdo con lo anterior, el Código ACI 8.4 establece lo siguiente:

> Excepto cuando se utilicen valores aproximados para los momentos, los momentos negativos en los apoyos de elementos continuos a flexión, calculados mediante la teoría elástica para cualquier distribución supuesta de carga, pueden incrementarse o disminuirse en no más de $20[1 - (\rho - \rho')/\rho_b]$ por ciento. Estos momentos negativos modificados se utilizarán para el cálculo de momentos en las secciones dentro de la luz. Tales ajustes se harán sólo cuando la sección para la cual se reduce el momento esté diseñada de manera que ρ o $\rho - \rho'$ sean iguales o menores que $0.50\rho_b$.

La redistribución para cuantías de acero por encima de $0.50\rho_b$ se prohíbe conservadoramente. Las disposiciones del Código ACI se representan en la figura 11.15.

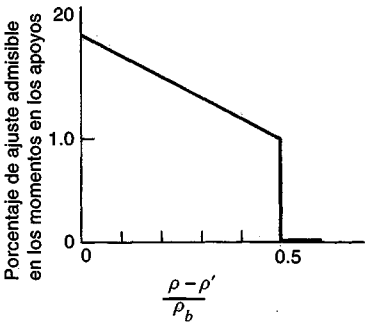


FIGURA 11.15
Redistribución de momentos permitida por el Código ACI.

Para demostrar las ventajas de la redistribución de momentos cuando se incluyen distribuciones alternas de carga, considere la viga de concreto de la figura 11.16. En ésta aparece una viga continua de tres luces con una carga muerta de 1 klb-pie y una carga viva de 2 klb/pie. Para obtener los momentos máximos en todas las secciones críticas de diseño es necesario tener en cuenta tres alternativas para aplicación de cargas. El caso *a*, con cargas viva y muerta sobre las luces exteriores y carga muerta únicamente sobre la luz interior, producirá el máximo momento positivo en las luces exteriores. El caso *b*, con carga muerta sobre las luces exteriores y cargas muerta y viva sobre la luz interior, producirá el máximo momento positivo en la luz interior. El máximo momento negativo sobre el apoyo interior se obtiene colocando las cargas muerta y viva sobre dos luces adyacentes y la carga muerta solamente en la luz exterior más alejada como se indica en el caso *c*.

Para simplificar se supondrá que se permite un ajuste del 20 por ciento en todos los momentos de los apoyos, siempre y cuando los momentos en las luces se modifiquen en forma recíproca. Es posible, entonces, una reducción global de los momentos de diseño a lo largo de la totalidad de la viga de tres luces. Por ejemplo, el caso *a* produce un momento elástico máximo en la luz para las luces exteriores de 109 klb-pie. Asociado a éste, existe un momento elástico negativo de 82 klb-pie en el apoyo interior. Si se ajusta hacia arriba el momento en el apoyo en un 20 por ciento, se obtiene un momento negativo de 98 klb-pie, que genera un ajuste hacia abajo del momento en la luz hasta un valor de 101 klb-pie.

Considere ahora el caso *b*. Con una redistribución similar de momentos, se obtiene un momento reducido en el centro de la luz igual a 57 klb-pie, mediante un incremento del momento en el apoyo de 78 a 93 klb-pie.

El momento que se obtiene en el primer apoyo interior para el caso de carga *c* puede ajustarse en la dirección contraria, es decir, el momento en el apoyo se disminuye en un 20 por ciento hasta un valor de 107 klb-pie. Para evitar el aumento del momento que controla en la luz interior, el momento del apoyo interior derecho se ajusta hacia arriba en un 20 por ciento hasta un valor de 80 klb-pie. Los momentos positivos en la luz izquierda exterior y en la interior, asociados con estos momentos modificados en los apoyos son 96 y 56 klb-pie, respectivamente.

Se observa que las reducciones obtenidas para los momentos de luces en los casos *a* y *b* se lograron a expensas del incremento de momento en el primer apoyo interior. Pero, el momento incrementado en el apoyo en cada caso fue menor que aquél para el cual el apoyo hubiese tenido que diseñarse con base en la distribución de cargas *c*, que producía el máximo momento en el apoyo. De igual manera, la reducción en el momento del apoyo en el caso *c* se logró a expensas de un incremento en los momentos para las dos luces adyacentes. Sin embargo, en cada caso los nuevos momentos en las luces fueron menores que los máximos momentos obtenidos para otras condiciones de carga. Los momentos finales de diseño para todas las secciones críticas se subrayan en la figura 11.16. Es posible observar que el resultado neto es una reducción de los momentos de diseño a lo largo de toda la viga. Esta modificación en los momentos no significa una reducción en el factor de seguridad por debajo del implícito en las disposiciones de seguridad del

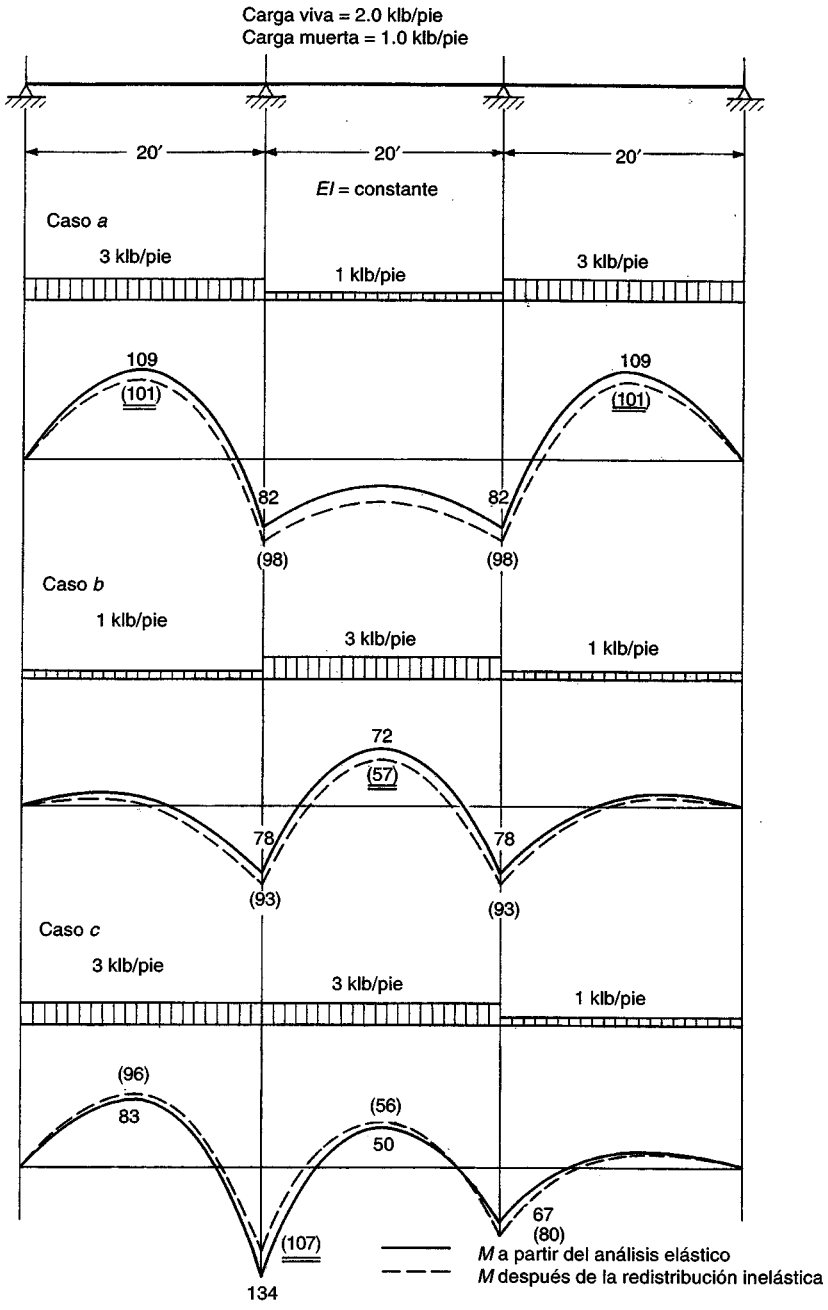


FIGURA 11.16
Redistribución de momentos en una viga continua de tres luces.

Código; por el contrario, esta modificación significa una reducción de la resistencia en *exceso* que, de otro modo, existiría en la estructura gracias a la redistribución de momentos que ocurriría realmente previa a la falla. Esto refleja el hecho de que los máximos momentos de diseño se obtienen a partir de distribuciones alternas de carga, que no pueden existir en forma simultánea. El resultado final es una aproximación más realista de la carga real de colapso de la estructura estáticamente indeterminada.

11.10 CONCLUSIONES

Los problemas relacionados con el análisis de las estructuras de concreto reforzado son diversos. El ingeniero no sólo debe aceptar las incertidumbres asociadas a la colocación, magnitud y duración de las cargas típicas de cualquier análisis estructural, sino que también tiene que considerar las otras complicaciones que son únicas del concreto reforzado. Éstas están asociadas principalmente con la estimación del momento de inercia de las secciones de concreto reforzado y con la influencia del flujo plástico del concreto. Se pueden resumir brevemente de la manera siguiente: (1) los momentos de inercia efectivos cambian dependiendo del signo del momento flector; (2) los momentos de inercia dependen no sólo de la sección efectiva del concreto sino también del acero, parte del cual puede ser discontinuo; (3) los momentos de inercia dependen del agrietamiento el cual, a su vez, varía a lo largo del elemento y depende de la carga; (4) el concreto está sujeto a flujo plástico bajo carga sostenida reduciendo así su módulo efectivo. Adicionalmente, las restricciones de los nudos y las condiciones de los apoyos para estructuras complejas muy rara vez corresponden completamente a la idealización. El estudiante debe conocer bien los cálculos aproximados de las fuerzas internas para las cuales deben diseñarse los elementos de un pórtico de concreto reforzado.

Puede ser reconfortante saber que el concreto reforzado tiene una capacidad importante de adaptarse a las suposiciones del diseñador. Esto ha sido señalado por numerosos ingenieros sobresalientes. Luigi Nervi, el reconocido arquitecto-ingeniero italiano lo ha establecido de manera elocuente de la siguiente forma:

> Principalmente gracias al flujo plástico, una estructura de concreto trata de adaptarse ella misma a nuestros cálculos con admirable docilidad, lo cual no siempre representa la más lógica y espontánea respuesta a los requerimientos de las fuerzas en juego, y aún trata de corregir nuestras deficiencias y errores. Las secciones y las regiones sometidas a esfuerzos muy elevados fluyen y ceden parte de su carga a otras secciones o regiones, las cuales aceptan este trabajo adicional con un espíritu comendable de colaboración, dentro de los límites de sus propias resistencias†.

Hardy Cross, más conocido por el desarrollo del método de análisis de distribución de momentos (ver la sección 11.4), observó los efectos benéficos del flujo plástico del concreto, mediante el cual una estructura puede adaptarse para soportar asentamientos, los cuales, con base en los análisis elásticos, producen fuerzas y momentos suficientes para generar la falla de la estructura. Halvard Birkeland, uno de los pioneros en el desarrollo del concreto preesforzado en los Estados Unidos, se refiere a "la sabiduría de las estructuras" observando que "... la estructura, en muchas circunstancias, aceptará nuestras suposiciones burdas y nuestros modelos matemáticos imperfectos... la estructura agotará todos los medios para mantenerse en pie antes de decidir el colapso"‡.

Por esto, puede ser reconfortante saber que *una estructura de concreto reforzado tratará de comportarse tal como el ingeniero ha supuesto que ella se va a comportar*. Pueden hacerse así de manera segura suposiciones razonables en el análisis. Pero el corolario de este importante principio es la aceptación de sus límites: *Deben reconocerse los patrones generales de fuerzas y momentos, y debe proporcionarse al menos una trayectoria de carga razonable*. Una desviación mayor a partir de la distribución real de las fuerzas internas puede resultar en problemas de funcionalidad asociados con agrietamiento y deflexiones, y puede también llegar a producir la falla prematura. Es por esta razón que los métodos de análisis límite para concreto reforzado incluyen restricciones en la cantidad de redistribución de los momentos elásticos (ver la sección 11.9). Pero es reconfortante saber que si se utiliza un buen juicio para asignar las fuerzas internas a las secciones críticas, la *sabiduría de la estructura* va a prevalecer.

---

† P. L. Nervi, *Structures*, F. W. Doddge Corp., NewYork, 1956.

‡ H. L. Birkeland, "The Wisdom of the Structure", *J. ACI*, April 1978, pp. 105-111.

REFERENCIAS

11.1. C. H. Norris, J. B. Wilbur, and S. Utku, *Elementary Structural Analysis*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
11.2. W. McGuire and R. H. Gallagher, *Matrix Structural Analysis*, Wiley, New York, 1978.
11.3. M. D. Vanderbilt, *Matrix Structural Analysis,* Quantum, New York, 1974.
11.4. W. Weaver and J. M. Gere, *Matrix Analysis of Framed Structures*, 2d ed., D. Van Nostrand, New York, 1980.
11.5. C. K. Wang, *Structural Analysis on Microcomputers*, MacMillan, New York, 1986.
11.6. J. F. Fleming, *Structural Engineering Analysis on Personal Computers*, McGraw-Hill, New York, 1986.
11.7. J. R. Benjamin, *Statically Indeterminate Structures*, McGraw-Hill, New York, 1959.
11.8. *Continuity in Concrete Building Frames*, 4th ed., Portland Cement Association, Skokie, Illinois, 1959.
11.9. G. C. Ernst, "A Brief for Limit Design", *Trans. ASCE*, vol. 121, 1956, pp. 605-632.
11.10. A. H. Mattock, "Rotation Capacity of Hinging Regions in Reinforced Concrete Frames", *Proc. Int. Symp. Flexural Mech. Reinforced Concrete*, ACI Publication SP-12, 1964.
11.11. J. S. Ford, D. C. Chang, and J. E. Breen, "Design Implications from Tests of Unbraced Multi-panel Concrete Frames", *Concr. Int.*, vol. 3, no. 3, 1981, pp. 37-47.

PROBLEMAS

11.1. Una viga de concreto con $b = 12$ pulg, $h = 26.5$ pulg y $d = 24$ pulg, que tiene una luz de 24 pies, puede considerarse como totalmente empotrada en el apoyo izquierdo y soportada verticalmente pero sin restricción a rotación (es decir, con un rodillo) en el extremo derecho. Esta viga está reforzada para flexión positiva con una combinación de barras que dan $A_s = 2.45$ pulg^2 y para flexión negativa en el apoyo izquierdo con $A_s = 2.88$ pulg^2. Las barras positivas se llevan hasta 6 pulg dentro de la cara del apoyo izquierdo, de acuerdo con los requisitos del Código ACI, pero no tienen la longitud de empotramiento para que sean efectivas como acero a compresión. Se proporcionan estribos en forma de aros cerrados No. 3 con un espaciamiento de 9 pulg a lo largo de toda la luz. La carga mayorada consiste en una fuerza concentrada única de 63.3 klb en el centro de la luz. En los cálculos se puede despreciar el peso propio de la viga. Calcule la demanda de rotación en la primera rótula plástica que se forma: (*a*) si la viga está reforzada como se describió arriba, (*b*) si, con el fin de reducir la congestión de las barras en el apoyo izquierdo, esta área de acero se reduce un 12.5 por ciento con el aumento asociado en el área de acero positiva, y (*c*) si el área de acero en el apoyo izquierdo se reduce un 25 por ciento en comparación con la descripción original, con el aumento correspondiente en el área de acero positiva. Calcule también la capacidad de rotación de la sección crítica, para compararla con los requisitos de (*a*), (*b*) y (*c*). Comente sus resultados y compare con el método de redistribución de momentos expuesto en el Código ACI. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60$ klb/pulg^2 y $f'_c = 4$ klb/pulg^2.

11.2. Una viga continua de concreto reforzado en forma de T, de doce vanos, debe sostener una carga muerta calculada de 900 lb/pie que incluye su peso propio, más una carga viva de servicio de 1400 lb/pie, sobre luces uniformes que miden 26.5 pies entre centros de las columnas de apoyo (luces libres de 25 pies). El espesor de la losa es 6 pulg y el ancho efectivo del ala es 75 pulg. Las dimensiones del alma son $b_w = 0.6d$, la máxima cuantía de acero se establecerá en $0.50\rho_b$. Todas las columnas serán cuadradas de 18 pulg. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

(*a*) Determine los momentos de diseño para la luz exterior y para la primera luz interior con base en los coeficientes de momento del Código ACI de la tabla 11.1.

(*b*) Determine los momentos de diseño en la luz exterior y en la primera luz interior mediante un análisis elástico del pórtico suponiendo una altura entre pisos de 10 pies. Observe que deben tenerse en cuenta distribuciones alternas de carga viva (ver la sección 11.2) y que los momentos pueden reducirse para incluir el ancho de los apoyos (ver la sección 11.5*a*). Compare sus resultados con los obtenidos utilizando los coeficientes de momento del Código ACI.

(*c*) Ajuste los momentos negativos y positivos de diseño aprovechando al máximo las disposiciones de redistribución del Código ACI.

(*d*) Diseñe las luces exterior y primera interior para flexión y cortante, y determine las dimensiones de la sección de concreto y las necesidades de refuerzo, basando su diseño en los momentos modificados.

11.3. Un pórtico continuo de concreto reforzado consta de una viga rectangular de dos vanos ABC, con luces entre centros AB y BC de 24 pies. Se proporcionan columnas cuadradas de 14 pulg en A, B y C. Para efectos del análisis, las columnas pueden considerarse totalmente empotradas en los pisos superior e inferior. La viga va a soportar una carga viva de servicio de 1200 libras/pie y una carga muerta calculada de 1000 libras/pie que incluye el peso propio. La altura entre pisos es de 12 pies. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 4000$ lb/pulg^2.

(*a*) Haga un análisis elástico del pórtico de dos luces considerando distribuciones alternas de carga viva para maximizar el momento flector en todas las secciones críticas. Diseñe las vigas utilizando una cuantía de acero máxima de $0.50\rho_b$ y $d = 2b$. Determine la sección de concreto requerida y las áreas de acero necesarias en las secciones sometidas a flexión positiva y negativa. Seleccione el diámetro de las barras. Los puntos de corte pueden determinarse de acuerdo con la figura 5.15*a*. Observe que los momentos de diseños negativos se toman en la cara y no en los centros de apoyo.

(*b*) Aproveche al máximo las disposiciones de redistribución del Código ACI 8.4 (ver la sección 11.9*e*) para reducir los momentos de diseño en todas las secciones críticas y rediseñar el acero para las vigas. Mantenga inalterada la sección de concreto. Seleccione el diámetro de las barras y determine los puntos de corte.

(*c*) Explique los resultados de sus dos diseños con respecto a la cantidad de acero que se requiere y a la posible congestión de acero en las secciones críticas a flexión. Puede asumir que el refuerzo a cortante se mantiene inalterado en la viga rediseñada.

CAPÍTULO

12 LOSAS APOYADAS EN LOS BORDES

12.1 TIPOS DE LOSAS

En las construcciones de concreto reforzado las losas se utilizan para proporcionar superficies planas y útiles. Una losa de concreto reforzado es una amplia placa plana, generalmente horizontal, cuyas superficies superior e inferior son paralelas o casi paralelas entre sí. Puede estar apoyada en vigas de concreto reforzado (y se vacía por lo general en forma monolítica con estas vigas), en muros de mampostería o de concreto reforzado, en elementos de acero estructural, en forma directa en columnas o en el terreno en forma continua.

Las losas se pueden apoyar sólo en dos lados opuestos, como en la figura 12.1*a*, caso en que la acción estructural de la losa es fundamentalmente en *una dirección*, puesto que transmite las cargas en la dirección perpendicular a la de las vigas de apoyo. También es posible que haya vigas en los cuatro lados, como en la figura 12.1*b*, de modo que se obtiene una acción de losa en *dos direcciones*. Asimismo pueden suministrarse vigas intermedias, como aparece en la figura 12.1*c*. Si la relación entre la longitud y el ancho de un panel de losa es mayor que un valor alrededor de dos, la mayor parte de la carga se transmite en la dirección corta hacia las vigas de apoyo y se obtiene, en efecto, acción en una dirección, aunque se proporcionen apoyos en todos los lados.

En algunos casos, las losas de concreto se pueden apoyar directamente sobre columnas, como en la figura 12.1*d*, sin la utilización de vigas secundarias o principales. Estas losas se identifican como *placas planas* y se utilizan a menudo cuando las luces no son muy largas y las cargas no son particularmente pesadas. La construcción del tipo *losa plana*, ilustrada en la figura 12.1*e*, tampoco incluye vigas pero incorpora una región con un sobreespesor de losa en la vecindad de la columna y emplea con frecuencia columnas con forma acampanada en la parte superior; ambos son mecanismos para reducir los esfuerzos generados por cortante y flexión negativa alrededor de las columnas; por lo general se llaman *paneles con ábacos o sobreespesores y capiteles de columna,* respectivamente. En estrecha relación con la placa plana está la losa con viguetas en dos direcciones o *losa reticular* que ilustra la figura 12.1*f*. Con el fin de reducir la carga muerta de la construcción con losas macizas, se forman vacíos en un patrón rectilíneo mediante elementos de aligeramiento construidos en metal o en fibra de vidrio. Se obtiene así una construcción nervada en dos direcciones. Por lo general, los aligeramientos

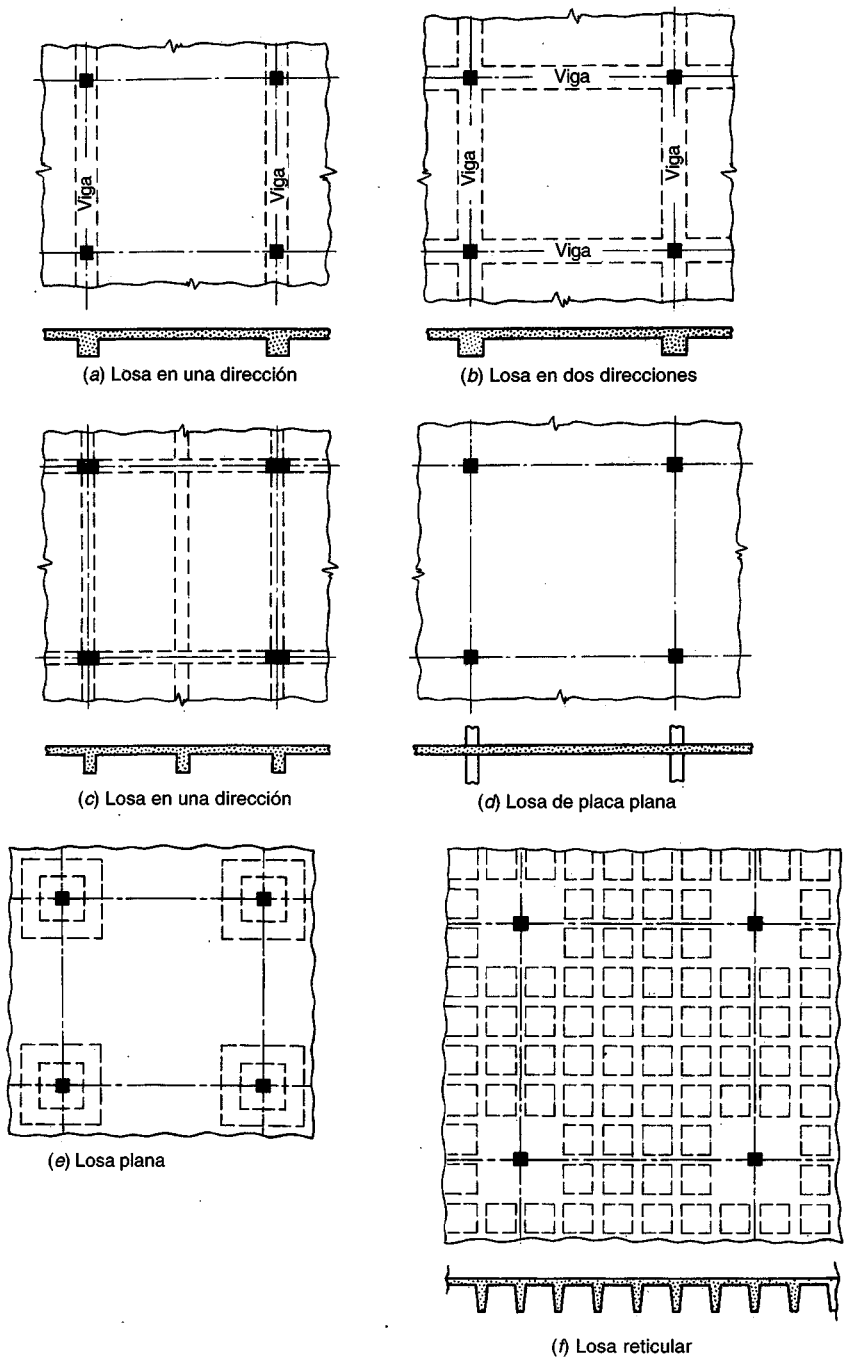


FIGURA 12.1
Tipos de losas estructurales.

se omiten cerca de las columnas de manera que se forme una losa maciza para resistir mejor los momentos y cortantes en estas áreas.

Además de los tipos de construcción apoyados en columnas que aparecen en la figura 12.1, muchas losas están apoyadas continuamente sobre el terreno, como en el caso de carreteras, pistas de aeropuerto y pisos de bodega. En tales casos, se proporciona por lo general una capa de piedra triturada o de grava bien compactada para asegurar un apoyo uniforme y permitir un drenaje adecuado del subsuelo.

El acero de refuerzo de las losas se coloca principalmente en dirección paralela a las superficies de la losa. A menudo se utilizan barras de refuerzo rectas, aunque para losas continuas las barras inferiores se doblan a veces hacia arriba para proporcionar el refuerzo negativo sobre los apoyos. Comúnmente se utilizan mallas electrosoldadas de alambrón para losas sobre el terreno. Para el mayor refuerzo requerido algunas veces en losas de carretera o pistas de aeropuerto pueden utilizarse barras o mallas de varillas. Las losas también pueden preesforzarse utilizando torones de alta resistencia a la tensión.

Las losas de concreto reforzado de los tipos expuestos en la figura 12.1 se diseñan casi siempre para cargas que se suponen distribuidas de manera uniforme sobre la totalidad de uno de los paneles de la losa, limitadas por las vigas de apoyo o por los ejes entre centros de columnas. Las pequeñas cargas concentradas pueden absorberse mediante la acción en dos direcciones del refuerzo (acero a flexión en dos direcciones para sistemas de losa en dos direcciones o acero a flexión en una dirección más acero de repartición lateral para sistemas en una dirección). Por lo general, las grandes cargas concentradas requieren vigas de apoyo.

En este capítulo se analizarán las losas apoyadas en los bordes en una o en dos direcciones, como las que ilustran las figuras 12.1*a*, *b* y *c*. Los sistemas en dos direcciones sin vigas, como los expuestos en las figuras 12.1*d*, *e* y *f*, al igual que las losas en dos direcciones apoyadas en los bordes (ver la figura 12.1*b*), se tratarán en el capítulo 13. En los capítulos 14 y 15 se introducirán métodos especiales basados en el análisis límite para estados de sobrecarga, aplicables a todos los tipos de losas.

12.2 DISEÑO DE LOSAS EN UNA DIRECCIÓN

La acción estructural de una losa en una dirección puede visualizarse en términos de la deformación de la superficie cargada. La figura 12.2 ilustra una losa rectangular simplemente apoyada en la extensión de sus dos bordes largos opuestos y libre de cualquier soporte a lo largo de los dos bordes cortos. Si se aplica una carga uniformemente distribuida a la superficie, la forma deflectada será como la que indican las líneas sólidas. Las curvaturas y, en consecuencia, los momentos flectores son los mismos en todas las franjas *s* que se extienden en la dirección corta entre los bordes apoyados, mientras que no se presenta curvatura y, por consiguiente, no existen momentos flectores para las franjas largas y paralelas a dichos bordes. La superficie que se forma es cilíndrica.

Para efectos de análisis y diseño, una franja unitaria de tal losa, cortada formando ángulos rectos con las vigas de apoyo, como lo indica la figura 12.3, puede considerarse como una viga rectangular con ancho unitario, con una altura h igual al espesor de la losa y una luz l_a igual a la distancia entre los bordes apoyados. Esta franja puede analizarse mediante los métodos que se utilizaron para vigas rectangulares, calculando los momentos flectores para la franja con ancho unitario. La carga por unidad de área sobre la losa se convierte en la carga por unidad de longitud sobre la franja de losa. Puesto que todas las cargas sobre la losa deben transmitirse a las dos vigas de soporte, se concluye que todo el

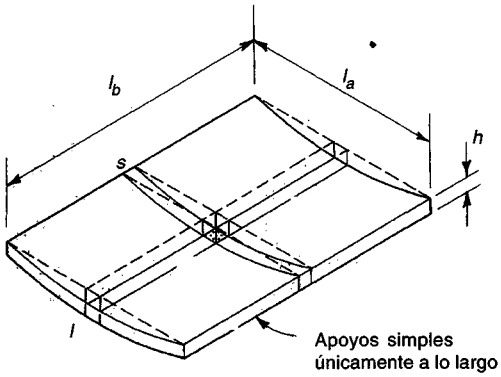


FIGURA 12.2
Forma deflectada de una losa en una dirección y cargada uniformemente.

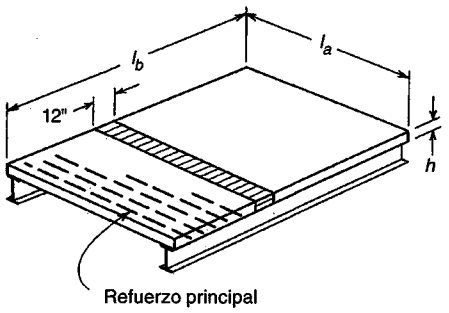


FIGURA 12.3
Principio básico de la franja unitaria para el diseño a flexión.

refuerzo debe colocarse formando ángulos rectos con estas vigas, con excepción de algunas barras que deben ubicarse en la otra dirección para controlar el agrietamiento por retracción de fraguado y temperatura. Una losa en una dirección puede considerarse entonces como un conjunto de vigas rectangulares una junto a la otra.

Este análisis simplificado, que supone una relación de Poisson igual a cero, es ligeramente conservador. En realidad, la compresión por flexión en el concreto en la dirección de l_a generará una expansión lateral en la dirección de l_b a menos que se restrinja el concreto a compresión. Para losas en una dirección, esta expansión lateral es resistida por las franjas adyacentes de la losa, que también tienden a expandirse. El resultado es un ligero fortalecimiento y rigidización en la dirección de la luz, pero este efecto es pequeño y puede despreciarse.

La cuantía de acero en una losa puede determinarse dividiendo el área transversal de una barra por el área de concreto entre dos barras sucesivas, siendo esta última área el producto de la altura hasta el centro de las barras por la distancia entre ellas, centro a centro. La cuantía de acero también puede determinarse dividiendo el área promedio de acero por pie de ancho, por el área efectiva de concreto en una franja de un pie. El área promedio de acero por pie de ancho es igual al área de una barra multiplicada por el número promedio de barras en una franja de un pie (12 dividido por el espaciamiento en pulgadas) y el área efectiva de concreto en una franja de un pie (o 12 pulg) es igual a 12 veces el espesor efectivo d.

Para ilustrar el último método para obtener la cuantía de acero ρ, se supone una losa de 5 pulg con un espesor efectivo de 4 pulg y con barras No. 4 espaciadas a $4\frac{1}{2}$ pulg centro a centro. La cantidad promedio de barras en una franja de 12 pulg de losa es $12/4.5 = 2.7$ barras y el área de acero promedio en una franja de 12 pulg es $2.7 \times 0.20 = 0.54$ pulg^2. De ahí que, $\rho = 0.54/(12 \times 4) = 0.0112$. Mediante el otro método

$$\rho = \frac{0.20}{4.5 \times 4} = 0.0112$$

El espaciamiento necesario entre las barras para suministrar un área determinada de acero por pie de ancho se obtiene dividiendo entre 12 la cantidad de barras requerida para dar esta área. Por ejemplo, para proporcionar un área promedio de 0.46 pulg^2/pie utilizando barras No. 4, se requieren $0.46/0.20 = 2.3$ barras por pie; las barras deben espaciarse a no más de $12/2.3 = 5.2$ pulg centro a centro. La determinación de las áreas de acero en losas para varias combinaciones de barras y de espaciamientos se facilita con la utilización de la tabla A.4 del apéndice A.

Los momentos y cortantes de diseño en losas en una dirección pueden encontrarse bien sea mediante análisis elásticos o por los mismos coeficientes utilizados anteriormente para vigas (ver el capítulo 11). Si la losa descansa libremente sobre sus apoyos, la longitud de la luz puede tomarse igual a la luz libre más el espesor de la losa, sin necesidad de exceder la distancia entre centros de apoyo, de acuerdo con el Código ACI 8.7.1. En general, en el análisis de losas continuas deben utilizarse las distancias centro a centro, pero se permite una reducción de los momentos negativos para tener en cuenta el ancho de los apoyos (ver el capítulo 11). Para losas con luces libres no mayores que 10 pies,

construidas integralmente con sus apoyos, el Código ACI 8.7.4 permite el análisis de losa continua apoyada sobre soportes de cuchilla tomando las longitudes de las luces iguales a las luces libres e ignorando por otra parte el ancho de las vigas. Si se utilizan los coeficientes de momento y de cortante, los cálculos deben basarse en las luces libres.

Las losas en una dirección se diseñan normalmente con cuantías de acero a tensión muy por debajo de los máximos valores admisibles de $0.75\rho_b$. Las cuantías típicas de acero varían aproximadamente de 0.004 a 0.008. Esto es, en parte, por razones económicas porque el ahorro en acero asociado con un incremento del espesor efectivo compensa ampliamente el costo del concreto adicional y, también, porque losas muy delgadas con grandes cuantías de acero serían susceptibles de sufrir grandes deflexiones. Por tanto, el diseño a flexión puede iniciarse seleccionando una cuantía de acero relativamente baja, por ejemplo cerca de $0.20\rho_b$, haciendo que $M_u = \phi M_n$, en la ecuación (3.37) y resolviendo para el espesor efectivo requerido d, sabiendo que $b = 12$ pulg para la franja unitaria. Como opción, puede utilizarse la tabla A.6 o el gráfico A.1 del apéndice A. La tabla A. 10 también es útil. Así, el área de acero que se requiere para la franja de 12 pulg, $A_s = \rho bd$, se determina fácilmente.

El Código ACI 9.5.2 especifica los espesores mínimos de la tabla 12.1 para losas no preesforzadas construidas con concreto de peso normal ($w_c = 145$ lb/pie^3) y refuerzo grado 60, siempre y cuando la losa no soporte o no esté unida a una construcción que pueda dañarse por grandes deflexiones. Pueden utilizarse espesores menores si los cálculos de las deflexiones indican que no se producen efectos adversos. Para concretos de peso unitario w_c en el intervalos de 90 a 120 lb/pie^3, los valores tabulados deben multiplicarse por $(1.65 - 0.005\, w_c)$, pero no menor que 1.09. Para refuerzo con esfuerzo de fluencia f_y diferente de 60,000 lb/pulg^2, los valores tabulados deben multiplicarse por $(0.4 + f_y/100{,}000)$. Las deflexiones de las losas pueden calcularse, cuando se requiera, con los mismos métodos que se utilizan para vigas (ver la sección 6.7).

Raras veces el cortante controlará el diseño de losas en una dirección, en particular cuando se utilizan cuantías bajas de acero a tensión. Se encontrará que la capacidad a cortante del concreto, ϕV_c, estará casi sin excepción muy por encima de la resistencia a cortante requerida V_u para las cargas mayoradas.

El espesor total de la losa h se redondea por lo general hasta el siguiente $\frac{1}{4}$ de pulg para losas hasta de 6 pulg de espesor y hasta la siguiente $\frac{1}{2}$ pulg superior para losas de mayor espesor. La protección de concreto por debajo del refuerzo debe seguir los requisitos del Código ACI, 7.7.1, que exigen un recubrimiento mínimo de $\frac{3}{4}$ de pulg por debajo de la parte inferior del acero (ver la figura 3.10*b*). En una losa común puede suponerse una distancia de 1 pulg por debajo del centro del acero. El espaciamiento lateral de las barras, excepto para aquellas que se utilizan exclusivamente para controlar las grietas de retracción de fraguado y temperatura (ver la sección 12.3), no debe exceder tres veces el espesor h o 18 pulg, el que sea menor, de acuerdo con el Código ACI 7.6.5. En general, los tamaños de las barras deben seleccionarse de tal manera que el espaciamiento real no sea menor que aproximadamente 1.5 veces el espesor de la losa, para evitar costos excesivos en la fabricación y manejo de las barras. Asimismo, para reducir costos se utilizan a menudo barras rectas para el refuerzo de las losas, cortadas en los puntos permitidos según lo descrito para vigas en la sección 5.9.

TABLA 12.1
Espesores mínimos de h para losas en una dirección no preesforzadas

Simplemente apoyadas	$l/20$
Un extremo continuo	$l/24$
Los dos extremos continuos	$l/28$
En voladizo	$l/10$

12.3 REFUERZO PARA TEMPERATURA Y RETRACCIÓN DE FRAGUADO

Tal como se anotó en la sección 2.10, el concreto se retrae a medida que la pasta de cemento se endurece. Es recomendable minimizar esta retracción de fraguado utilizando concretos con las mínimas cantidades posibles de agua y de cemento compatible con los otros requerimientos, tales como la resistencia y la trabajabilidad, y mediante un curado húmedo cuidadoso y de duración suficiente. Sin embargo, sin importar qué tantas precauciones se tomen, a menudo es inevitable cierta cantidad de retracción de fraguado. Si una losa con dimensiones moderadas descansa libremente sobre sus apoyos, puede contraerse para acomodar el acortamiento en su longitud producido por la retracción de fraguado. Sin embargo, las losas y otros elementos están por lo general rígidamente unidos a otras partes de la estructura y no pueden contraerse libremente; esto genera esfuerzos de tensión conocidos como *esfuerzos de retracción de fraguado.* Una disminución en la temperatura con respecto a la existente cuando la losa se funde, particularmente en estructuras sometidas a la intemperie como en los puentes, puede tener un efecto similar al de la retracción de fraguado. Es decir, la losa tiende a contraerse y, si está restringida para hacerlo, se generan esfuerzos internos de tensión.

Puesto que el concreto es débil a tensión, es muy probable que estos esfuerzos de temperatura y de retracción de fraguado produzcan agrietamiento. Las grietas de esta naturaleza no son perjudiciales, siempre y cuando su tamaño se limite a lo que se conoce como *grietas capilares*; esto puede lograrse colocando refuerzo en la losa para contrarrestar la contracción y para distribuir uniformemente las grietas. A medida que el concreto tiende a contraerse, este refuerzo resiste la contracción y, en consecuencia, queda sometido a compresión. La retracción total en una losa reforzada de esta manera es menor que la de una losa sin refuerzo; además, cualesquiera que sean las grietas que se formen, éstas serán de menor ancho y estarán más uniformemente distribuidas gracias a la presencia del refuerzo.

Para losas en una dirección, el refuerzo suministrado para resistir los momentos flectores tiene el efecto conveniente de reducir la retracción de fraguado y de distribuir las grietas. Sin embargo, debido a que la contracción ocurre igualmente en todas las direcciones, es necesario proporcionar refuerzo especial para limitar la contracción por retracción de fraguado y temperatura en dirección perpendicular a la del refuerzo principal. Este acero adicional se conoce como refuerzo para *temperatura o retracción de fraguado, o acero de repartición.*

El refuerzo para los esfuerzos de retracción de fraguado y temperatura en dirección perpendicular a la del refuerzo principal, debe colocarse en cualquier losa estructural donde el refuerzo principal se coloca sólo en una dirección. El Código ACI 7.12.2 especifica las relaciones mínimas entre el área de refuerzo y el área bruta de concreto que aparecen en la tabla 12.2, pero de ningún modo las barras de refuerzo deben colocarse a un espaciamiento mayor que cinco veces el espesor de la losa o 18 pulg. De ninguna manera la cuantía de acero debe ser menor que 0.0014.

El acero exigido por el Código ACI para control de grietas de retracción de fraguado y temperatura también representa el refuerzo mínimo admisible en la dirección de la luz para losas en una dirección; las cuantías mínimas usuales para acero a flexión no son aplicables en este caso.

TABLA 12.2
Cuantías mínimas de refuerzo para temperatura y retracción en losas

Losas donde se utilicen barras corrugadas grado 40 ó 50	0.0020
Losas donde se utilicen barras corrugadas grado 60 o mallas electrosoldadas de alambrón (liso o corrugado)	0.0018
Losas donde se utilice refuerzo con resistencia a la fluencia por encima de 60,000 lb/pulg² medida a una deformación de fluencia de 0.35%	$\frac{0.0018 \times 60{,}000}{fy}$

Ejemplo 12.1. Diseño de una losa armada en una dirección. Una losa de concreto reforzado se construye íntegramente con sus soportes y consta de dos vanos iguales, cada uno con luz libre de 15 pies. La carga viva de servicio es de 100 lb/pie^2 y se especifica concreto de 4000 lb/pulg^2 para utilizar con acero con esfuerzo de fluencia igual a 60,000 lb/pulg^2. Diseñe la losa según las disposiciones del Código ACI.

Solución. Primero se estima el espesor de la losa con base en los espesores mínimos de la tabla 12.1: $l/28 = 15 \times 12/28 = 6.43$ pulg. Se utilizará un espesor tentativo de 6.50 pulg, para el cual el peso es $150 \times 6.50/12 = 81$ lb/pie^2. La carga viva especificada y la carga muerta calculada se multiplican por los factores de carga del Código ACI:

$$\begin{aligned} \text{Carga muerta} &= 81 \times 1.4 &&= 113 \text{ lb/pie}^2 \\ \text{Carga viva} &= 100 \times 1.7 &&= 170 \text{ lb/pie}^2 \\ \text{Total} &&&= 283 \text{ lb/pie}^2 \end{aligned}$$

En este caso, los momentos de diseño en las secciones críticas se encuentran utilizando los coeficientes de momento del ACI (ver la tabla 11.1):

$$\begin{aligned} &\text{En el apoyo interior:} && -M = \tfrac{1}{9} \times 0.283 \times 15^2 = 7.06 \text{ klb-pie} \\ &\text{En el centro de la luz:} && +M = \tfrac{1}{14} \times 0.283 \times 15^2 = 4.53 \text{ klb-pie} \\ &\text{En el apoyo exterior:} && -M = \tfrac{1}{24} \times 0.283 \times 15^2 = 2.65 \text{ klb-pie} \end{aligned}$$

La máxima cuantía de acero permitida por el Código ACI es, de acuerdo con la ecuación (3.29):

$$0.75\rho_b = 0.75 \times 0.85^2 \times \tfrac{4}{60} \times \tfrac{87}{147} = 0.021$$

Si se utilizara en realidad este valor máximo de ρ, el espesor mínimo efectivo que se requeriría, controlado por el momento negativo en el apoyo interior, se encontraría a partir de la ecuación (3.37) y sería igual a:

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{M_u}{\phi\rho f_y b(1 - 0.59\rho f_y/f_c')} \\ &= \frac{7.06 \times 12}{0.90 \times 0.021 \times 60 \times 12(1 - 0.59 \times 0.21 \times \frac{60}{4})} = 7.67 \text{ pulg}^2 \\ d &= 2.77 \text{ pulg}\dagger \end{aligned}$$

Este valor es menor que el espesor efectivo de 6.50 – 1.00 = 5.50 pulg, que resulta de la aplicación de las restricciones del Código; en consecuencia, se adopta este último valor. En el apoyo interior, si la profundidad del bloque de esfuerzos es $a = 1.00$ pulg, el área de acero requerido por pie de ancho en la parte superior de la losa es [ecuación (3.36)]

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y(d - a/2)} = \frac{7.06 \times 12}{0.90 \times 60 \times 5.00} = 0.31 \text{ pulg}^2$$

Si se verifica el valor supuesto del espesor a con la ecuación (3.31) se obtiene

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c' b} = \frac{0.31 \times 60}{0.85 \times 4 \times 12} = 0.46 \text{ pulg}$$

Un segundo ensayo se realiza con $a = 0.46$ pulg. Entonces

$$A_s = \frac{7.06 \times 12}{0.90 \times 60 \times 5.27} = 0.30 \text{ pulg}^2$$

† Este espesor se puede encontrar más fácilmente utilizando el gráfico A.1 del apéndice A. Para $\rho = \rho_{max}$, $M_u/\phi bd^2 = 1050$ a partir de la cual, $d = 2.75$ pulg. También puede utilizarse la tabla A.6*a*.

a partir de lo cual $a = 0.46 \times 0.30/0.31 = 0.45$ pulg. No es necesaria una revisión adicional. Para las otras secciones críticas a momento, será satisfactorio utilizar el mismo brazo de palanca para determinar las áreas de acero y

En el centro de la luz $$A_s = \frac{4.53 \times 12}{0.90 \times 60 \times 5.27} = 0.19 \text{ pulg}^2$$

En el apoyo exterior $$A_s = \frac{2.65 \times 12}{0.90 \times 60 \times 5.27} = 0.11 \text{ pulg}^2$$

El refuerzo mínimo es el requerido para control del agrietamiento por retracción de fraguado y temperatura. Éste es

$$A_s = 0.0018 \times 12 \times 6.50 = 0.14 \text{ pulg}^2$$

para cada franja de 12 pulg. Esto exige un pequeño incremento en la cantidad de acero que se utiliza en el apoyo exterior.

La fuerza cortante mayorada a una distancia d de la cara del apoyo interior es

$$V_u = 1.15 \times \frac{283 \times 15}{2} - 283 \times \frac{5.50}{12} = 2310 \text{ lb}$$

Mediante la ecuación (4.12*b*), la resistencia nominal a cortante de la losa de concreto es

$$V_n = V_c = 2\sqrt{f'_c}bd = 2\sqrt{4000} \times 12 \times 5.50 = 8350 \text{ lb}$$

Así, la resistencia de diseño de la losa de concreto, $\phi V_c = 0.85 \times 8350 = 7100$ lb, está muy por encima de la resistencia requerida a cortante de $V_u = 2310$ lb.

Las áreas requeridas de acero a tensión pueden suministrarse en varias formas, pero cualquiera que sea la selección debe darse especial atención a la colocación real del acero durante la construcción. La distribución debe ser tal que el acero pueda colocarse rápidamente con costos mínimos de mano de obra, aún cuando sea necesario un poco de acero adicional al calculado para alcanzar este fin.

En la figura 12.4 aparecen dos posibles distribuciones de acero. En la figura 12.4*a* se utilizan barras dobladas, mientras que en la figura 12.4*b* todas las barras son rectas.

En la distribución de la figura 12.4*a*, las barras No. 4 colocadas cada 10 pulg proporcionan 0.24 pulg^2 de acero en el centro de la luz, ligeramente superior al necesario. Si las dos terceras partes de estas barras se doblan hacia arriba para conformar el refuerzo negativo sobre el apoyo interior, el espaciamiento promedio de estas barras dobladas en el apoyo interior será (10 + 20)/2 = 15 pulg. Puesto que un patrón idéntico de barras se dobla hacia arriba desde el otro lado del apoyo, el

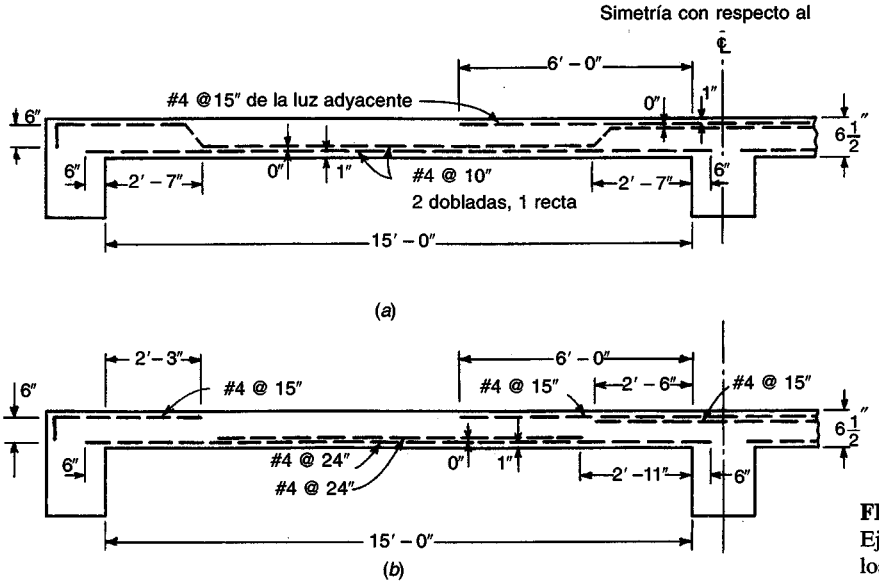


FIGURA 12.4
Ejemplo de diseño de una losa en una dirección.

espaciamiento efectivo de las barras No. 4 sobre el apoyo interior será de $7\frac{1}{2}$ pulg. Esta distribución satisface bastante bien el área exigida de acero de 0.30 pulg^2 por pie de ancho de losa sobre el apoyo. Las mismas barras dobladas en el apoyo interior se doblarán hacia arriba para conformar el refuerzo negativo en el apoyo exterior, suministrando un refuerzo equivalente a barras No. 4 espaciadas a 15 pulg, o sea, 0. 16 pulg^2 de acero.

Observe que no es necesario lograr un espaciamiento uniforme del refuerzo en las losas y que el acero suministrado se puede calcular en forma segura con base en un espaciamiento promedio como se hizo en el ejemplo. Sin embargo, debe darse especial atención para satisfacer los requisitos de espaciamiento, tanto mínimos como máximos, para el refuerzo principal.

La ubicación de los dobleces y de los puntos de corte que aparecen en la figura 12.4*a* se obtuvo utilizando el gráfico A. 3 del apéndice A como se explicó en la sección 5.9 y la tabla A.11 (ver también la figura 5.14).

La distribución de la figura 12.4*b* utiliza únicamente barras rectas. Aunque esto es satisfactorio según el Código ACI (puesto que los esfuerzos cortantes no exceden dos tercios del valor permitido), los cortes de las barras positivas y negativas más cortas, como se ilustra, producen una situación no conveniente en los extremos de estas barras, donde se presentarán concentraciones de esfuerzos en el concreto. El diseño se mejoraría si las barras negativas se cortaran a 3 pies desde la cara del apoyo interior, en vez de 2 pies 6 pulg como aparece, y si el acero positivo se cortara a 2 pies 2 pulg, en lugar de 2 pies 11 pulg. Esto generaría un traslapo de las barras recortadas positivas y negativas aproximadamente igual a 2*d*. En la figura 5.15*a* se sugiere una distribución algo más simple que también sería satisfactoria.

El área exigida de acero que debe colocarse en dirección perpendicular a la del refuerzo principal para propósitos de control de grietas por temperatura y retracción de fraguado es 0.14 pulg^2. Éste se proporcionará mediante barras No. 4 espaciadas a 16 pulg, colocadas directamente encima del refuerzo principal en la región de momento positivo y debajo del acero principal en la zona de momento negativo.

12.4 COMPORTAMIENTO DE LOSAS EN DOS DIRECCIONES APOYADAS EN LOS BORDES

Las losas expuestas en las secciones 12.2 y 12.3 se deforman bajo carga conformando una superficie cilíndrica. En estos casos la principal acción estructural es en una dirección, perpendicular a los apoyos en dos bordes opuestos de un panel rectangular. Sin embargo, en muchos casos, las losas rectangulares tienen tales proporciones, y están sostenidas de tal manera, que se obtiene una acción en dos direcciones. Cuando se aplica la carga, estas losas se deflectan conformando una superficie en forma de plato en vez de una en forma cilíndrica. Esto significa que en cualquier punto la losa tiene curvatura en las dos direcciones principales y puesto que los momentos flectores son proporcionales a las curvaturas, también existen momentos en ambas direcciones. Para resistir estos momentos, la losa debe reforzarse en las dos direcciones, al menos por dos capas de barras perpendiculares con respecto a los dos pares de bordes. La losa debe diseñarse para tomar una parte proporcional de la carga en cada dirección.

Los tipos de construcción en concreto reforzado que se caracterizan por una acción en dos direcciones incluyen losas soportadas por muros o vigas en todos los lados (ver la figura 12.1*b*), placas planas (ver la figura 12.1*d*), losas planas (ver la figura 12.1*e*) y losas reticulares (ver la figura 12.1*f*).

El tipo más simple de losa con acción en dos direcciones es el que representa la figura 12.l*b*, donde la losa o el panel de losa, está soportado a lo largo de sus cuatro bordes por vigas monolíticas de concreto relativamente altas y rígidas, por muros o por vigas principales de acero. Si las vigas de borde en concreto son de poca altura o se omiten del todo, como en el caso de las placas y losas planas, las deformaciones del sistema de piso a lo largo de los ejes entre columnas alteran en forma significativa la distribución de los momentos en el panel mismo de la losa (ver la referencia 12.1). Los sistemas en dos direcciones de este tipo se analizan de manera separada en el capítulo 13. La presente discusión se refiere al primer tipo, en el cual los soportes de borde son bastante rígidos de manera que se puede considerar que éstos no ceden bajo la carga.

Este tipo de losa se ilustra en la figura 12.5*a*. Para visualizar su comportamiento a flexión es conveniente pensar que está conformada por dos conjuntos de franjas paralelas en cada una de las dos

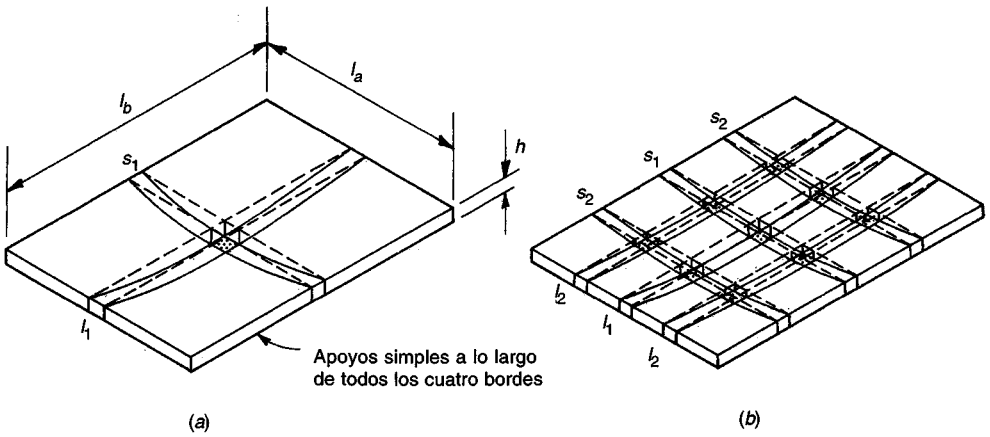


FIGURA 12.5
Losa en dos direcciones sobre apoyos de borde simples: (*a*) flexión de la franja central de la losa; (*b*) modelo reticular de la losa.

direcciones, que se interceptan entre sí. Evidentemente, parte de la carga es tomada por uno de estos conjuntos de franjas y se transmite a un par de soportes de borde, y el resto de la carga la toma el otro conjunto.

La figura 12.5*a* presenta las dos franjas centrales de una placa rectangular con luz corta l_a y luz larga l_b. Si la carga uniforme es w por pie cuadrado de losa, cada una de las dos franjas actúa casi como una viga simple cargada de manera uniforme por la parte de la carga w que le corresponde. Puesto que estas franjas imaginarias son en realidad parte de la misma losa monolítica, sus deflexiones en los puntos de intersección deben ser las mismas. Si se igualan las deflexiones en el centro de la franja corta y de la larga, se obtiene

$$\frac{5w_a l_a^4}{384EI} = \frac{5w_b l_b^4}{384EI} \qquad (a)$$

donde w_a es la fracción de la carga w que se transmite en dirección corta, y w_b es la fracción que se transmite en dirección larga. En consecuencia,

$$\frac{w_a}{w_b} = \frac{l_b^4}{l_a^4} \qquad (b)$$

Se observa que la mayor fracción de carga se transmite en la dirección corta y que la relación entre las dos porciones de la carga total es inversamente proporcional a la relación de las luces elevada a la cuarta potencia.

Este resultado es aproximado puesto que el comportamiento real de una losa es más complejo que el de las dos franjas que se interceptan. Con base en la figura 12.5*b*, que presenta un modelo de losa conformado por dos conjuntos de tres franjas cada uno, se puede lograr una mejor interpretación del comportamiento de la losa misma. Se observa que las dos franjas centrales s_1 y l_1 se deflectan de manera similar a la de la figura 12.5*a*. Sin embargo, las franjas extremas s_2 y l_2 no sólo se deflectan sino que también se tuercen. Considere por ejemplo una de las intersecciones de s_2 con l_2. Se advierte que, en el punto de intersección, el borde exterior de la franja l_2 está más elevado que el borde interior, mientras que en el extremo cercano de la franja l_2 los dos bordes se encuentran a la misma altura; la franja está sometida a torsión. Este alabeo produce esfuerzos y momentos de torsión que son más pronunciados cerca de las esquinas. En consecuencia, la carga total de la losa es tomada no sólo por los momentos flectores en las dos direcciones, sino también por los momentos de torsión. Por esta razón, los momentos flectores en losas elásticas son menores que los que resultarían del cálculo que supone un conjunto de franjas desconectadas y cargadas con w_a y w_b. Por ejemplo, para una losa cuadrada simplemente

apoyada, $w_a = w_b = w/2$. Si únicamente estuviera presente la flexión, el momento máximo para cada franja sería

$$\frac{(w/2)l^2}{8} = 0.0625wl^2 \qquad (c)$$

La teoría exacta de flexión de placas elásticas demuestra que, en realidad, el momento máximo de esta losa cuadrada es apenas $0.048\,wl^2$, así que en este caso los momentos de torsión alivian los momentos flectores en casi el 25 por ciento.

Los mayores momentos ocurren donde la curvatura es más aguda. En la figura 12.5*b* se observa que esto ocurre para el centro de la luz de la franja corta s_1. Suponga que la carga se incrementa hasta que esta sección se ve sobreesforzada, de manera que el acero en el centro de la franja s_1 esté en fluencia. Si la franja fuera una viga aislada, esta condición significaría la falla; sin embargo, al considerar la losa como un todo se observa que no se presentará una falla inmediata. Las franjas vecinas (tanto las paralelas como las perpendiculares a s_1), al ser en realidad monolíticas con ella, van a tomar la fracción de cualquier carga adicional que la franja s_1 no pueda soportar, hasta que ellas a su vez empiecen a fluir. Esta redistribución inelástica continuará hasta que, en un área relativamente grande de la porción central de la losa, todos los aceros en ambas direcciones estén en fluencia; solamente entonces se presentará la falla de toda la losa. A partir de este razonamiento, demostrado con ensayos, se concluye que las losas no necesitan diseñarse para el máximo momento absoluto en cada una de las dos direcciones (como el valor de $0.048\,wl^2$ en el ejemplo del párrafo anterior), sino únicamente para un momento promedio menor en cada una de las dos direcciones en la porción central de la losa. Por ejemplo, uno de los métodos analíticos de uso general permite diseñar la anterior losa cuadrada para un momento de $0.036\,wl^2$. En comparación con el momento máximo elástico real de $0.048\,wl^2$, se observa que se logra una reducción del 25 por ciento en el momento gracias a la redistribución inelástica.

El mayor momento en la losa se presenta en el centro de la luz de la franja corta s_1 de la figura 12.5*b*. Es evidente que la curvatura, y por tanto el momento, en cualquier punto de la franja corta s_2 es menor que en el sitio correspondiente de la franja s_1. En consecuencia, se presenta una variación del momento de la luz corta en la dirección larga de la luz; esta variación se ilustra cualitativamente en la figura 12.6. El diagrama de momentos de la luz corta de la figura 12.6*a* es válido sólo a lo largo de la franja central en 1-1. Para otras secciones, el valor del momento máximo es menor, como aparece. Las otras ordenadas de momento se reducen en forma proporcional. De igual modo, el diagrama de momentos de la luz larga de la figura 12.6*b* es aplicable únicamente en la línea central longitudinal de la losa; para otros sitios las ordenadas se reducen de acuerdo con la variación presentada. Estas variaciones en el momento máximo a través del ancho y del largo de una losa rectangular se tienen en cuenta en forma aproximada en la mayor parte de los métodos prácticos de diseño que se realizan para un momento reducido en la cuarta parte exterior de la luz de la losa en cada dirección.

Debe observarse que sólo las losas con relaciones de lados menores que aproximadamente dos necesitan tratarse como losas en dos direcciones. A partir de la ecuación (*b*) anterior, se aprecia que, para una losa de estas proporciones, la fracción de la carga transmitida en la dirección larga es apenas del orden de un dieciseisavo de la transmitida en la dirección corta. Esta losa actúa casi como si se extendiera únicamente en la dirección corta. En consecuencia, los paneles de losas rectangulares con una relación de lados de dos o más pueden reforzarse para acción en una dirección, con el acero principal en dirección perpendicular a los bordes largos. Por supuesto, debe suministrarse acero para retracción de fraguado y temperatura en la dirección larga, y refuerzo auxiliar sobre y en dirección perpendicular a las vigas de apoyo cortas y en las esquinas de la losa para controlar el agrietamiento (ver la sección 12.5).

12.5 ANÁLISIS MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS COEFICIENTES

La determinación precisa de momentos en losas en dos direcciones, con varias condiciones de continuidad en los bordes soportados, es matemáticamente muy compleja y no es adecuada para la práctica

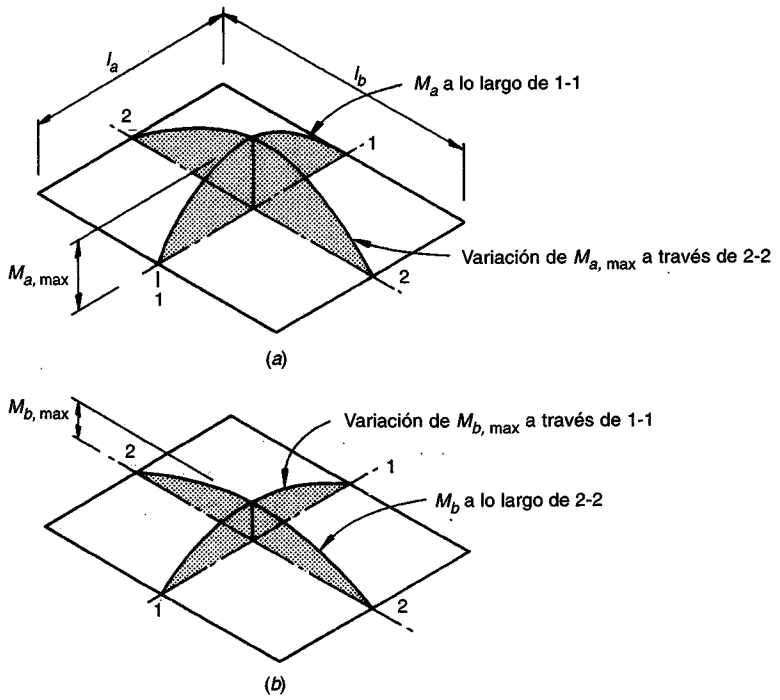


FIGURA 12.6
Momentos y variaciones de los momentos en una losa cargada uniformemente con apoyos simples en los cuatro lados.

de diseño. Por esta razón se han adoptado varios métodos simplificados para determinar momentos, cortantes y reacciones para este tipo de losas.

Con respecto al Código ACI de 1995, todos los sistemas de losas de concreto reforzado en dos direcciones que incluyen losas apoyadas en los bordes, losas y placas planas, deben analizarse y diseñarse de acuerdo con un método unificado que se presenta en detalle en el siguiente capítulo. Sin embargo, la complejidad de este método generalizado, en particular para sistemas que no cumplen los requisitos que permiten realizar el análisis mediante el "método de diseño directo" del Código actual, ha llevado a muchos ingenieros a continuar utilizando el método de diseño del Código ACI de 1963 (ver la referencia 12.2) para el caso especial de losas en dos direcciones, apoyadas en vigas de borde relativamente altas y rígidas, en los cuatro lados de cada uno de los paneles de la losa.

En este capítulo se presentará el método 3 del Código ACI de 1963. Desarrollado originalmente por Marcus (ver la referencia 12.3) y utilizado ampliamente en Europa, fue introducido en los Estados Unidos por Rogers (ver la referencia 12.4). Desde 1963 se utiliza en forma amplia para losas apoyadas en los bordes por muros, vigas de acero o vigas monolíticas de concreto, cuya altura total no sea menor que aproximadamente tres veces el espesor de la losa. Aunque no formó parte del Código ACI de 1977 o de versiones posteriores, se permite su uso continuo bajo la disposición del Código actual (Código ACI 13.5.1) con relación a que un sistema de losa puede diseñarse utilizando cualquier procedimiento que satisfaga las condiciones de equilibrio y de compatibilidad geométrica, siempre y cuando se demuestre que la resistencia de diseño en cada sección es por lo menos igual a la resistencia requerida, y que se cumplen los requisitos de funcionalidad.

El método utiliza tablas de coeficientes de momento que cubren varias condiciones. Estos coeficientes se basan en análisis elásticos pero también tienen en cuenta la redistribución inelástica. En consecuencia, el momento de diseño en cada dirección es menor en cierta cantidad que el momento máximo elástico en esa dirección. Los momentos en las franjas centrales en las dos direcciones se calculan a partir de

$$M_a = C_a w l_a^2 \tag{12.1}$$

y

$$M_b = C_b w l_b^2 \tag{12.2}$$

donde C_a, C_b = coeficientes de momento tabulados
w = carga uniforme, lb/pie^2
l_a, l_b = longitud de la luz libre en las direcciones corta y larga, respectivamente

El método establece que cada panel debe dividirse, en ambas direcciones, en una franja central cuyo ancho es la mitad del ancho del panel y en dos franjas de borde o franjas de columna con un ancho igual a un cuarto del ancho del panel (ver la figura 12.7). Tal como se analizó anteriormente y se ilustró en las figuras 12.6*a* y *b*, los momentos en las dos direcciones son mayores en la porción central de la losa que en las regiones cercanas a los bordes. Por tanto, el método establece que toda la franja central se diseña para el momento de diseño total tabulado. Para las franjas de borde, este momento se supone que disminuye desde su valor máximo en el borde de la franja central, hasta un tercio de su valor en el borde del panel. Esta distribución se indica en la figura 12.7 para los momentos M_a en dirección de la luz corta. La variación lateral de los momentos M_b en la dirección de la luz larga es similar.

Hasta ahora, el análisis se ha restringido a un panel individual simplemente apoyado en los cuatro lados. En la figura 12.8 se presenta una situación real, en la cual un sistema de vigas soporta una losa en dos direcciones. Se observa que algunos de los paneles, como el *A*, tienen dos bordes exteriores discontinuos, mientras que los demás son continuos con sus vecinos. El panel *B* tiene un borde discontinuo y tres bordes continuos; el panel interior *C* tiene todos los bordes continuos y así sucesivamente. En un borde continuo de losa se generan momentos negativos de manera similar al caso de los apoyos interiores de vigas continuas. También, la magnitud de los momentos positivos depende de las condiciones de continuidad en todos los cuatro bordes.

De acuerdo con esto, la tabla 12.3 da coeficientes de momento *C, para momentos negativos en bordes continuos*. Los detalles de las tablas se explican por sí mismos. Los máximos momentos negativos de borde se obtienen cuando dos paneles adyacentes a un borde particular sostienen la totalidad de la carga muerta y viva; de ahí que el momento se calcula para esta carga total. Los *momentos negativos en bordes discontinuos* se suponen iguales a un tercio de los momentos positivos para la misma dirección. Estos momentos deben tenerse en cuenta en el diseño puesto que la rigidez torsional de la viga de borde o del muro de apoyo suministra en general un grado de restricción en los bordes discontinuos.

Para los *momentos positivos* se va a presentar, si acaso, muy poca rotación en los bordes continuos cuando la *carga muerta* actúa sola porque las cargas en los dos paneles adyacentes tienden a producir rotaciones opuestas que se cancelan entre sí o se balancean aproximadamente. Para esta condición, los bordes continuos pueden considerarse empotrados y los coeficientes apropiados para los momentos positivos ocasionados por carga muerta se determinan mediante la tabla 12.4. Por otra

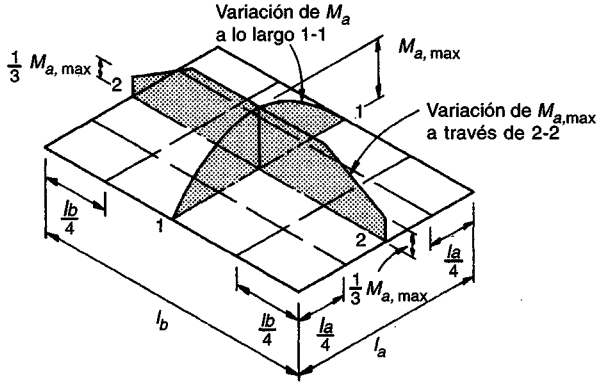


FIGURA 12.7
Variación de los momentos a través del ancho de las secciones críticas supuestas para el diseño.

TABLA 12.3
Coeficientes para momentos negativos en losas[a]

$M_{a,neg} = C_{a,neg} w l_a^2$

$M_{b,neg} = C_{a,neg} w l_b^2$

donde w = carga muerta más viva uniforme total

Relación $m = \frac{l_a}{l_b}$		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9
1.00	$C_{a,neg}$		0.045		0.050	0.075	0.071		0.033	0.061
	$C_{b,neg}$		0.045	0.076	0.050			0.071	0.061	0.033
0.95	$C_{a,neg}$		0.050		0.055	0.079	0.075		0.038	0.065
	$C_{b,neg}$		0.041	0.072	0.045			0.067	0.056	0.029
0.90	$C_{a,neg}$		0.055		0.060	0.080	0.079		0.043	0.068
	$C_{b,neg}$		0.037	0.070	0.040			0.062	0.052	0.025
0.85	$C_{a,neg}$		0.060		0.066	0.082	0.083		0.049	0.072
	$C_{b,neg}$		0.031	0.065	0.034			0.057	0.046	0.021
0.80	$C_{a,neg}$		0.065		0.071	0.083	0.086		0.055	0.075
	$C_{b,neg}$		0.027	0.061	0.029			0.051	0.041	0.017
0.75	$C_{a,neg}$		0.069		0.076	0.085	0.088		0.061	0.078
	$C_{b,neg}$		0.022	0.056	0.024			0.044	0.036	0.014
0.70	$C_{a,neg}$		0.074		0.081	0.086	0.091		0.068	0.081
	$C_{b,neg}$		0.017	0.050	0.019			0.038	0.029	0.011
0.65	$C_{a,neg}$		0.077		0.085	0.087	0.093		0.074	0.083
	$C_{b,neg}$		0.014	0.043	0.015			0.031	0.024	0.008
0.60	$C_{a,neg}$		0.081		0.089	0.088	0.095		0.080	0.085
	$C_{b,neg}$		0.010	0.035	0.011			0.024	0.018	0.006
0.55	$C_{a,neg}$		0.084		0.092	0.089	0.096		0.085	0.086
	$C_{b,neg}$		0.007	0.028	0.008			0.019	0.014	0.005
0.50	$C_{a,neg}$		0.086		0.094	0.090	0.097		0.089	0.088
	$C_{b,neg}$		0.006	0.022	0.006			0.014	0.010	0.003

[a] Un borde achurado indica que la losa continúa a través o se encuentra empotrada en el apoyo; un borde sin marcas indica un apoyo donde la resistencia torsional es despreciable.

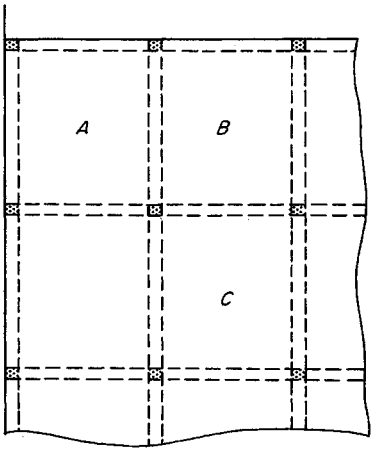


FIGURA 12.8
Planta de una losa de piso típica en dos direcciones con vigas en los ejes de columnas.

TABLA 12.4
Coeficientes para momentos positivos debidos a carga muerta en losas[a]

$M_{a,pos,dl} = C_{a,dl} w l_a^2$

donde w = carga muerta uniforme total

$M_{b,pos,dl} = C_{b,dl} w l_b^2$

Relación $m = \frac{l_a}{l_b}$		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9
1.00	$C_{a,dl}$	0.036	0.018	0.018	0.027	0.027	0.033	0.027	0.020	0.023
	$C_{b,dl}$	0.036	0.018	0.027	0.027	0.018	0.027	0.033	0.023	0.020
0.95	$C_{a,dl}$	0.040	0.020	0.021	0.030	0.028	0.036	0.031	0.022	0.024
	$C_{b,dl}$	0.033	0.016	0.025	0.024	0.015	0.024	0.031	0.021	0.017
0.90	$C_{a,dl}$	0.045	0.022	0.025	0.033	0.029	0.039	0.035	0.025	0.026
	$C_{b,dl}$	0.029	0.014	0.024	0.022	0.013	0.021	0.028	0.019	0.015
0.85	$C_{a,dl}$	0.050	0.024	0.029	0.036	0.031	0.042	0.040	0.029	0.028
	$C_{b,dl}$	0.026	0.012	0.022	0.019	0.011	0.017	0.025	0.017	0.013
0.80	$C_{a,dl}$	0.056	0.026	0.034	0.039	0.032	0.045	0.045	0.032	0.029
	$C_{b,dl}$	0.023	0.011	0.020	0.016	0.009	0.015	0.022	0.015	0.010
0.75	$C_{a,dl}$	0.061	0.028	0.040	0.043	0.033	0.048	0.051	0.036	0.031
	$C_{b,dl}$	0.019	0.009	0.018	0.013	0.007	0.012	0.020	0.013	0.007
0.70	$C_{a,dl}$	0.068	0.030	0.046	0.046	0.035	0.051	0.058	0.040	0.033
	$C_{b,dl}$	0.016	0.007	0.016	0.011	0.005	0.009	0.017	0.011	0.006
0.65	$C_{a,dl}$	0.074	0.032	0.054	0.050	0.036	0.054	0.065	0.044	0.034
	$C_{b,dl}$	0.013	0.006	0.014	0.009	0.004	0.007	0.014	0.009	0.005
0.60	$C_{a,dl}$	0.081	0.034	0.062	0.053	0.037	0.056	0.073	0.048	0.036
	$C_{b,dl}$	0.010	0.004	0.011	0.007	0.003	0.006	0.012	0.007	0.004
0.55	$C_{a,dl}$	0.088	0.035	0.071	0.056	0.038	0.058	0.081	0.052	0.037
	$C_{b,dl}$	0.008	0.003	0.009	0.005	0.002	0.004	0.009	0.005	0.003
0.50	$C_{a,dl}$	0.095	0.037	0.080	0.059	0.039	0.061	0.089	0.056	0.038
	$C_{b,dl}$	0.006	0.002	0.007	0.004	0.001	0.003	0.007	0.004	0.002

[a] Un borde achurado indica que la losa continúa a través o se encuentra empotrada en el apoyo; un borde sin marcas indica un apoyo donde la resistencia torsional es despreciable.

parte, los máximos *momentos positivos generados por carga viva* se obtienen cuando la carga viva se coloca únicamente en el panel particular y no en los paneles adyacentes. En este caso sí se presentaría algo de rotación en todos los bordes continuos. Como aproximación se supone que existe un 50 por ciento de restricción para calcular estos momentos ocasionados por carga viva. Los coeficientes correspondientes se determinan en la tabla 12.5. Finalmente, para calcular los cortantes en la losa y las cargas en las vigas de apoyo, la tabla 12.6 presenta las fracciones de la carga total W que se transmiten en cada una de las direcciones.

12.6 REFUERZO PARA LOSAS EN DOS DIRECCIONES APOYADAS EN LOS BORDES

En forma consistente con los supuestos del análisis de losas en dos direcciones y apoyadas en los bordes, el refuerzo principal a flexión se coloca en un patrón ortogonal con barras paralelas y perpendiculares a los

TABLA 12.5
Coeficientes para momentos positivos debidos a carga viva en losas[a]

$M_{a,pos,ll} = C_{a,ll} w l_a^2$

donde w = carga viva uniforme total

$M_{b,pos,ll} = C_{b,ll} w l_b^2$

Relación $m = \frac{l_a}{l_b}$		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9
1.00	$C_{a,ll}$	0.036	0.027	0.027	0.032	0.032	0.035	0.032	0.028	0.030
	$C_{b,ll}$	0.036	0.027	0.032	0.032	0.027	0.032	0.035	0.030	0.028
0.95	$C_{a,ll}$	0.040	0.030	0.031	0.035	0.034	0.038	0.036	0.031	0.032
	$C_{b,ll}$	0.033	0.025	0.029	0.029	0.024	0.029	0.032	0.027	0.025
0.90	$C_{a,ll}$	0.045	0.034	0.035	0.039	0.037	0.042	0.040	0.035	0.036
	$C_{b,ll}$	0.029	0.022	0.027	0.026	0.021	0.025	0.029	0.024	0.022
0.85	$C_{a,ll}$	0.050	0.037	0.040	0.043	0.041	0.046	0.045	0.040	0.039
	$C_{b,ll}$	0.026	0.019	0.024	0.023	0.019	0.022	0.026	0.022	0.020
0.80	$C_{a,ll}$	0.056	0.041	0.045	0.048	0.044	0.051	0.051	0.044	0.042
	$C_{b,ll}$	0.023	0.017	0.022	0.020	0.016	0.019	0.023	0.019	0.017
0.75	$C_{a,ll}$	0.061	0.045	0.051	0.052	0.047	0.055	0.056	0.049	0.046
	$C_{b,ll}$	0.019	0.014	0.019	0.016	0.013	0.016	0.020	0.016	0.013
0.70	$C_{a,ll}$	0.068	0.049	0.057	0.057	0.051	0.060	0.063	0.054	0.050
	$C_{b,ll}$	0.016	0.012	0.016	0.014	0.011	0.013	0.017	0.014	0.011
0.65	$C_{a,ll}$	0.074	0.053	0.064	0.062	0.055	0.064	0.070	0.059	0.054
	$C_{b,ll}$	0.013	0.010	0.014	0.011	0.009	0.010	0.014	0.011	0.009
0.60	$C_{a,ll}$	0.081	0.058	0.071	0.067	0.059	0.068	0.077	0.065	0.059
	$C_{b,ll}$	0.010	0.007	0.011	0.009	0.007	0.008	0.011	0.009	0.007
0.55	$C_{a,ll}$	0.088	0.062	0.080	0.072	0.063	0.073	0.085	0.070	0.063
	$C_{b,ll}$	0.008	0.006	0.009	0.007	0.005	0.006	0.009	0.007	0.006
0.50	$C_{a,ll}$	0.095	0.066	0.088	0.077	0.067	0.078	0.092	0.076	0.067
	$C_{b,ll}$	0.006	0.004	0.007	0.005	0.004	0.005	0.007	0.005	0.004

[a] Un borde achurado indica que la losa continúa a través o se encuentra empotrada en el apoyo; un borde sin marcas indica un apoyo donde la resistencia torsional es despreciable.

bordes apoyados. Como el acero positivo se coloca en dos capas, la altura efectiva d para la capa superior es menor que la de la capa inferior en un diámetro de barra. Puesto que los momentos en la dirección larga son los más pequeños, resulta económico colocar el acero en esa dirección por encima de las barras en la dirección corta. Este problema no se presenta para el refuerzo negativo perpendicular a las vigas de apoyo en los bordes, excepto en las esquinas donde los momentos son pequeños.

Para las losas en dos direcciones pueden utilizarse barras rectas, cortadas cuando ya no sean necesarias, o barras dobladas; pero la economía en la fabricación y en la colocación favorecerá generalmente la utilización de barras rectas en toda la losa. La localización precisa de los puntos de inflexión (o líneas de inflexión) no se puede determinar fácilmente porque depende de la relación de luces, de la proporción entre la carga viva y la muerta, y de las condiciones de continuidad en los bordes. Los puntos estándares de corte y doblamiento de las barras en vigas, resumidos en la figura 5.15, pueden utilizarse igualmente para losas apoyadas en los bordes.

TABLA 12.6
Relación de la carga W que se transmite en las direcciones l_a y l_b para calcular el cortante en la losa y las cargas en los apoyos[a]

Relación $m=\frac{l_a}{l_b}$		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9
										
1.00	W_a	0.50	0.50	0.17	0.50	0.83	0.71	0.29	0.33	0.67
	W_b	0.50	0.50	0.83	0.50	0.17	0.29	0.71	0.67	0.33
0.95	W_a	0.55	0.55	0.20	0.55	0.86	0.75	0.33	0.38	0.71
	W_b	0.45	0.45	0.80	0.45	0.14	0.25	0.67	0.62	0.29
0.90	W_a	0.60	0.60	0.23	0.60	0.88	0.79	0.38	0.43	0.75
	W_b	0.40	0.40	0.77	0.40	0.12	0.21	0.62	0.57	0.25
0.85	W_a	0.66	0.66	0.28	0.66	0.90	0.83	0.43	0.49	0.79
	W_b	0.34	0.34	0.72	0.34	0.10	0.17	0.57	0.51	0.21
0.80	W_a	0.71	0.71	0.33	0.71	0.92	0.86	0.49	0.55	0.83
	W_b	0.29	0.29	0.67	0.29	0.08	0.14	0.51	0.45	0.17
0.75	W_a	0.76	0.76	0.39	0.76	0.94	0.88	0.56	0.61	0.86
	W_b	0.24	0.24	0.61	0.24	0.06	0.12	0.44	0.39	0.14
0.70	W_a	0.81	0.81	0.45	0.81	0.95	0.91	0.62	0.68	0.89
	W_b	0.19	0.19	0.55	0.19	0.05	0.09	0.38	0.32	0.11
0.65	W_a	0.85	0.85	0.53	0.85	0.96	0.93	0.69	0.74	0.92
	W_b	0.15	0.15	0.47	0.15	0.04	0.07	0.31	0.26	0.08
0.60	W_a	0.89	0.89	0.61	0.89	0.97	0.95	0.76	0.80	0.94
	W_b	0.11	0.11	0.39	0.11	0.03	0.05	0.24	0.20	0.06
0.55	W_a	0.92	0.92	0.69	0.92	0.98	0.96	0.81	0.85	0.95
	W_b	0.08	0.08	0.31	0.08	0.02	0.04	0.19	0.15	0.05
0.50	W_a	0.94	0.94	0.76	0.94	0.99	0.97	0.86	0.89	0.97
	W_b	0.06	0.06	0.24	0.06	0.01	0.03	0.14	0.11	0.03

[a] Un borde achurado indica que la losa continúa a través o se encuentra empotrada en el apoyo; un borde sin marcas indica un apoyo donde la resistencia torsional es despreciable.

De acuerdo con el Código ACI 13.3.1, el refuerzo mínimo en cada una de las direcciones de losas en dos direcciones es el necesario para el control de grietas de retracción de fraguado y temperatura, como está dado en la tabla 12.2. Para sistemas en dos direcciones, el espaciamiento del refuerzo a flexión en las secciones críticas no debe exceder dos veces el espesor de la losa h.

Los momentos torsionales analizados en la sección 12.4 tienen importancia únicamente en las esquinas exteriores de un sistema de losa en dos direcciones, donde tienden a agrietar la losa en la parte inferior a lo largo de la diagonal del panel, y en la parte superior en dirección perpendicular a la diagonal del panel. Debe proporcionarse refuerzo especial tanto en la parte superior como en la inferior de las esquinas exteriores de la losa, a lo largo de una distancia en cada dirección igual a un quinto de la luz más larga del panel de esquina medida desde la esquina como aparece en la figura 12.9. El refuerzo en la parte superior de la losa debe ser paralelo a la diagonal desde la esquina, mientras que el de la parte inferior debe ubicarse en forma perpendicular a la diagonal. Como alternativa, las dos filas de acero pueden colocarse en dos bandas paralelas a los lados de la losa. En cualquier caso, de acuerdo con el Código ACI

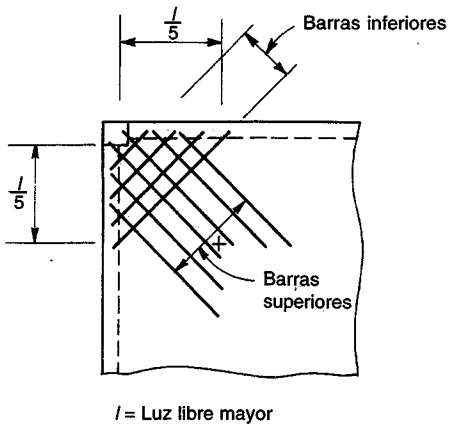


FIGURA 12.9
Refuerzo especial en las esquinas exteriores de una losa en dos direcciones apoyada en vigas.

13.3.6, los refuerzos positivo y negativo deben tener un tamaño y un espaciamiento equivalentes a los exigidos para el máximo momento positivo en el panel.

Ejemplo 12.2. Diseño de una losa en dos direcciones apoyada en los bordes. Un piso monolítico de concreto reforzado se compone de vanos rectangulares que miden 21 × 26 pies, como se ilustra en la figura 12.10. En todos los ejes de columnas se proporcionan vigas de 12 pulg de ancho y 24 pulg de altura; así que las luces libres para los paneles de losa en dos direcciones son 20 × 25 pies. El piso debe diseñarse para soportar una carga viva de servicio de 137 lb/pie^2 distribuida uniformemente sobre su superficie, adicional a su peso , utilizando concreto con resistencia f'_c = 3000 lb/pulg^2 y refuerzo con f_y = 60,000 lb/pulg^2. Determine el espesor requerido para la losa y el refuerzo para el panel de esquina mostrado.

Solución. El espesor mínimo de losas de este tipo se toma usualmente igual a $\frac{1}{180}$ veces el perímetro del panel:

$$h = 2(20 + 25) \times \frac{12}{180} = 6 \text{ pulg}$$

Este espesor se seleccionará como espesor tentativo. La carga muerta correspondiente es $\frac{1}{2} \times 150 =$ 75 lb/pie^2. Así que, las cargas mayoradas de diseño son

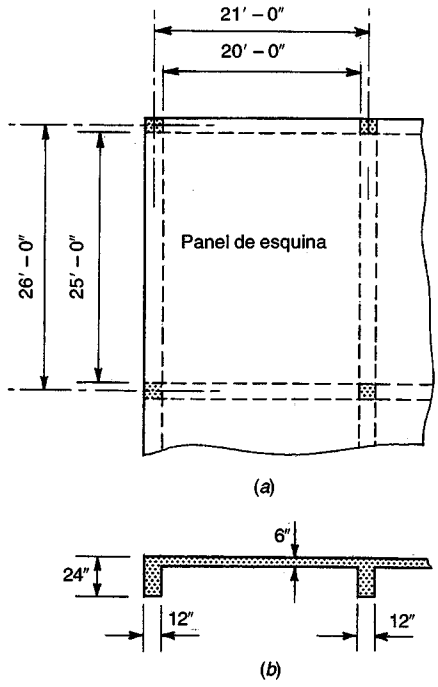


FIGURA 12.10
Ejemplo de una losa armada en dos direcciones y apoyada en los bordes: (*a*) planta parcial del piso; (*b*) sección transversal típica.

Carga viva	$= 1.7 \times 137$	$=$	233 lb/pie^2
Carga muerta	$= 1.4 \times 75$	$=$	105 lb/pie^2
	Carga total	$=$	338 lb/pie^2

Con una relación de los lados del panel $m = l_a/l_b = 20/25 = 0.8$, los cálculos del momento para las franjas centrales de la losa son los siguientes:

Momentos negativos en bordes continuos (tabla 12.3)

$$M_{a,neg} = 0.071 \times 338 \times 20^2 = 9600 \text{ lb-pie} = 115{,}000 \text{ lb-pulg}$$
$$M_{b,neg} = 0.029 \times 338 \times 25^2 = 6130 \text{ lb-pie} = 73{,}400 \text{ lb-pulg}$$

Momentos positivos (tablas 12.4 y 12.5)

$$M_{a,pos,dl} = 0.039 \times 105 \times 20^2 = 1638 \text{ lb-pie} = 19{,}700 \text{ lb-pulg}$$
$$M_{a,pos,ll} = 0.048 \times 233 \times 20^2 = 4470 \text{ lb-pie} = 53{,}700 \text{ lb-pulg}$$
$$M_{a,pos,tot} = 73{,}400 \text{ lb-pulg}$$

$$M_{b,pos,dl} = 0.016 \times 105 \times 25^2 = 1050 \text{ lb-pie} = 12{,}600 \text{ lb-pulg}$$
$$M_{b,pos,ll} = 0.020 \times 233 \times 25^2 = 2910 \text{ lb-pie} = 35{,}000 \text{ lb-pulg}$$
$$M_{b,pos,tot} = 47{,}600 \text{ lb-pulg}$$

Momentos negativos en bordes discontinuos (1/3 × momentos positivos)

$$M_{a,neg} = \tfrac{1}{3}(73{,}400) = 24{,}500 \text{ lb-pulg}$$
$$M_{b,neg} = \tfrac{1}{3}(47{,}600) = 15{,}900 \text{ lb-pulg}$$

El refuerzo requerido en *las franjas centrales* se seleccionará con la ayuda del gráfico A.1 del apéndice A.

Dirección corta

1. Centro de la luz

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{73{,}400}{0.90 \times 12 \times 5^2} = 272 \qquad \rho = 0.0048$$

$A_s = 0.0048 \times 12 \times 5 = 0.288$ pulg^2/pie. A partir de la tabla A.4 del apéndice A se seleccionan barras No. 4 con un espaciamiento de 7 pulg, obteniéndose un valor de $A_s = 0.34$ pulg^2/pie.

2. Borde continuo

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{115{,}000}{0.90 \times 12 \times 5^2} = 426 \qquad \rho = 0.0078\dagger$$

$A_s = 0.0078 \times 12 \times 5 = 0.468$ pulg^2/pie. Si dos de cada tres barras positivas se doblan hacia arriba y se hace lo mismo para el panel adyacente, el área de acero para momento negativo suministrado en el borde continuo será igual a $\frac{4}{3}$ del acero para momento positivo en la luz, o sea $A_s = \frac{4}{3} \times 0.34 = 0.453$ pulg^2/pie. Se observa que este valor es tres por ciento menor que la cantidad necesaria de 0.468. Por otro lado, el acero para momento positivo proporcionado de 0.34 pulg^2/pie, representa casi el 15 por ciento más de la cantidad requerida. Como se analizó en la sección 11.9*e*, el Código ACI permite cierta cantidad de redistribución inelástica dentro de unos límites estrictamente especificados. Para este caso, el acero negativo suministrado es suficiente para apenas el 97 por ciento del momento calculado, pero el acero positivo permite que se resista en forma aproximada el 115 por ciento del momento calculado. Esto satisface de sobra las condiciones del Código ACI para la redistribución inelástica de momentos. Este caso ilustra cómo tal redistribución de momentos puede utilizarse para obtener una distribución de acero más simple y económica.

† Observe que este valor de r, el máximo requerido para toda la losa, es aproximadamente igual a la mitad del valor máximo permitido de $0.75\,\rho_b = 0.0160$; esto indica que se hubiera podido emplear una losa más delgada. Sin embargo, la utilización del mínimo espesor posible hubiera requerido un aumento en el área de acero a tensión, lo cual sería menos económico. Además, una losa más delgada produciría deflexiones considerables no deseadas. El espesor tentativo de 6 pulg se mantendrá para el diseño final.

3. Borde discontinuo. El momento negativo en el borde discontinuo es igual a un tercio del momento positivo en la luz; sería apropiado doblar hacia arriba una de cada tres barras, desde la parte inferior, para suministrar el acero a momento negativo en el borde discontinuo. Sin embargo, esto generaría un espaciamiento de 21 pulg, que es mayor que el máximo espaciamiento de $2h$ = 12 pulg permitido por el Código ACI. De ahí que, para el borde discontinuo, se doblarán hacia arriba dos de cada tres barras del acero inferior.

Dirección larga

1. En el centro de la luz

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{47{,}600}{0.90 \times 12 \times 4.5^2} = 218 \qquad \rho = 0.0038$$

(El acero para el momento positivo en dirección larga se coloca encima de aquél para la dirección corta. Ésta es la razón para utilizar d = 4.5 pulg para el acero del momento positivo en dirección larga y d = 5 pulg en los demás sitios.) $A_s = 0.0038 \times 12 \times 4.5 = 0.205$ pulg^2/pie. A partir de la tabla A.4 del apéndice A, se seleccionan barras No. 3 espaciadas a 6 pulg, y se obtiene un valor de $A_s = 0.22$ pulg^2/pie.

2. Borde continuo

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{73{,}400}{0.90 \times 12 \times 5^2} = 272 \qquad \rho = 0.0048$$

$A_s = 0.0048 \times 12 \times 5 = 0.288$ pulg^2/pie. De nuevo, doblando hacia arriba dos de cada tres barras inferiores de los dos paneles adyacentes al borde continuo, se tiene en el borde un $A_s = \frac{4}{3} \times 0.22 = 0.29$ pulg^2/pie.

3. Borde discontinuo. Por las razones analizadas en relación con la dirección corta, se doblarán hacia arriba dos de cada tres barras inferiores en este borde.

Las selecciones anteriores de acero se refieren a las *franjas centrales* en las dos direcciones. Para las *franjas de columna* se supone que los momentos disminuyen linealmente a partir del valor total calculado en el borde interior de la franja de columna, hasta un tercio de este valor en el borde de la viga de soporte. Para simplificar la colocación del acero se utilizará un espaciamiento uniforme en las franjas de columna. Los momentos promedio en las franjas de columna son iguales a dos tercios de los momentos correspondientes en las franjas centrales; según esto, el acero adecuado para esta franja de columna se suministrará si el espaciamiento de este acero es $\frac{3}{2}$ del utilizado en la franja central. Deben verificarse las limitaciones en cuanto a espaciamientos máximos.

Los puntos de doblamiento para las barras se localizarán como se sugiere en la figura 5.15, es decir, a $l/4$ de la cara de la viga de apoyo en los extremos continuos y a $l/7$ de la misma en los extremos discontinuos. Las distancias correspondientes de la cara de la viga a los puntos de doblamiento son 5 pies 0 pulg y 2 pies 10 pulg para las barras positivas en dirección corta, y 6 pies 3 pulg y 3 pies 7 pulg para las barras positivas en dirección larga, para los extremos continuo y discontinuo respectivamente. Las barras negativas traídas de los paneles adyacentes se cortarán a $l/3$ de la cara del apoyo, a 6 pies 8 pulg para las barras negativas en dirección corta y a 8 pies 4 pulg para las barras negativas en dirección larga. En los bordes exteriores, las barras negativas se prolongarán tanto como sea posible dentro de las vigas de apoyo y luego se doblarán 90° hacia abajo formando un gancho para proporcionar anclaje.

En la esquina exterior del panel se utilizarán barras No. 4 espaciadas a 8 pulg, paralelas a la diagonal de la losa en la parte superior y perpendiculares a la diagonal en la parte inferior, de acuerdo con la figura 12.9. Esto suministrará un área de 0.29 pulg^2/pie en cada dirección, igual a la requerida para el momento flector máximo positivo en el panel. Este refuerzo se llevará hasta un punto a 25/5 = 5 pies desde la esquina, con longitudes que varían como se indica en la figura 12.9.

Las reacciones de la losa se calculan con la tabla 12.6, la cual indica que el 71 por ciento de la carga se transmite en dirección corta y el 29 por ciento en dirección larga. Puesto que la carga total sobre el panel es $20 \times 25 \times 338 = 169{,}000$ lb, la carga por pie sobre la viga larga es $(0.71 \times 169{,}000)/(2 \times 25) = 2400$ lb/pie y sobre la viga corta es $(0.29 \times 169{,}000)/(2 \times 20) = 1220$ lb/pie. El cortante que debe transmitir la losa a dichas vigas es numéricamente igual a estas cargas sobre las vigas, reducidas a una sección crítica que se localiza a una distancia d desde la cara de la viga. La resistencia a cortante de la losa es

$$\phi V_c = 0.85 \times 2\sqrt{3000} \times 12 \times 5 = 5590 \text{ lb}$$

muy por encima de la resistencia a cortante requerida para las cargas mayoradas.

12.7 CONTROL DE DEFLEXIONES

Las losas apoyadas en los bordes son en general delgadas con relación a su luz y pueden presentar grandes deflexiones, aún cuando se cumplan los requisitos de resistencia, a menos que se impongan algunos límites en el diseño para evitar esto. La forma más sencilla de controlar las deflexiones consiste en imponer una relación mínima espesor-luz. El Código ACI de 1963, que introdujo el método de análisis por coeficientes descrito en la sección anterior, establece que el espesor de la losa no debe ser menor que 3.5 pulg y no menor que el perímetro total del panel dividido por 180. Estos límites han dado resultados satisfactorios para losas apoyadas en los bordes. El procedimiento más general para análisis de sistemas en dos direcciones, que se encuentra en ediciones más recientes del Código ACI, contiene tres ecuaciones que regulan el espesor mínimo de la losa. Estas ecuaciones tienen en cuenta la rigidez relativa de la losa y de las vigas de borde, la relación de las dimensiones de los lados largo y corto del panel, y las condiciones de restricción a lo largo de los bordes. Estas ecuaciones más complejas se presentarán en el capítulo 13.

Como opción a la utilización de ecuaciones de espesor mínimo se puede calcular la deflexión en el centro de un panel de losa y comparar los resultados con limitaciones como las estipuladas por el Código ACI 9.5. Estas limitaciones, que se resumen en la tabla 6.3, son aplicables a sistemas de piso en dos direcciones al igual que a vigas.

El cálculo de las deflexiones de losas se complica por varios factores, tales como la restricción rotacional variable en los bordes, la influencia de distribuciones alternas de aplicación de las cargas, las relaciones variables de las longitudes de los lados y los efectos del agrietamiento, al igual que los efectos dependientes del tiempo relacionados con la retracción de fraguado y el flujo plástico. Sin embargo, la deflexión de una losa apoyada en los bordes puede estimarse con suficiente precisión con base en los coeficientes de momento utilizados en el análisis a flexión (ver la sección 12.5). Por lo general, las componentes de la deflexión que interesan son las deflexiones a largo plazo ocasionadas por cargas sostenidas y las deflexiones inmediatas generadas por carga viva. La tabla 6.3 establece los límites superiores para estas componentes de la deflexión en términos de la luz l. Para losas, no está claro en el Código ACI ni en el comentario, si se debe utilizar como base para el cálculo la luz más larga o la más corta, pero es conservador (y razonable cuando se considera el posible daño a los elementos soportados) basar los límites calculados en la luz más corta.

Debe comprenderse que el análisis con base en los coeficientes de momento arroja *valores máximos* para los momentos positivos y negativos en las secciones críticas de losas apoyadas en los bordes. Los coeficientes de las tablas 12.3, 12.4 y 12.5 se desarrollaron teniendo en cuenta condiciones de cargas alternas, tomando cargas muerta y viva completas sobre los dos paneles adyacentes a un borde particular para lograr el máximo momento negativo e incluyendo, para los cálculos de momento positivo, dos patrones de carga: carga muerta en ambos paneles y carga viva únicamente en el panel donde se va a determinar el máximo momento positivo. Para el cálculo de las deflexiones sería incorrecto suponer que los máximos momentos encontrados de esta manera podrían actuar en forma simultánea, puesto que sólo puede haber una distribución de cargas en determinado momento.

Por ejemplo, las deflexiones que genera la carga viva máxima se obtendrán normalmente cuando la carga viva actúa sobre determinado panel pero no sobre los paneles adyacentes, es decir, con una distribución en forma de tablero de ajedrez. Por consiguiente, la deflexión que produce la carga viva debe basarse en los máximos momentos positivos encontrados en la tabla 12.5, correspondientes a esa distribución de cargas, junto con los momentos negativos estáticamente consistentes en los bordes apoyados.

Esto se ilustrará para la losa expuesta en la figura 12.11*a*, teniendo en cuenta la franja central con ancho unitario en la dirección larga del panel. La variación del momento para una carga uniformemente distribuida es parabólica, y la suma de los momentos positivos y del promedio de los negativos, de acuerdo con la estática, debe ser

$$\overline{M} = \tfrac{1}{8} w_b l_b^2 \qquad (a)$$

donde w_b es la fracción de la carga transmitida en la dirección larga del panel (ver la figura 12.11*c*). Si hubiera empotramiento total en los apoyos, el momento negativo sería

$$M_{neg} = \tfrac{1}{12} w_b l_b^2 = \tfrac{2}{3}\overline{M} \qquad (b)$$

y el momento positivo sería:

$$M_{pos} = \tfrac{1}{24} w_b l_b^2 = \tfrac{1}{3}\overline{M} \qquad (c)$$

Anteriormente se indicó que los coeficientes para máximos momentos positivos ocasionados por la carga viva se obtuvieron con el supuesto de un 50 y no del cien por ciento de empotramiento. De acuerdo con esto, la línea base para el momento cero, asociada con el máximo momento positivo M_b obtenido con la tabla 12.5, es como aparece en la figura 12.11*c* y los momentos negativos estáticamente consistentes son la mitad del momento positivo M_b.

Los cálculos de las deflexiones se basan entonces en el diagrama parabólico de momentos, con una ordenada máxima M_b en el centro de la luz y momentos negativos en los extremos iguales a la mitad de este valor. La deflexión en el centro de la luz producto de la carga viva, Δ_l, para la franja de la losa expuesta en la figura 12.11*b* puede encontrarse fácilmente con base en el diagrama de momentos de la figura 12.11*c*. Para la losa ilustrada, con ambos bordes continuos,

$$\Delta_l = \frac{3}{32}\frac{M_b l_b^2}{E_c I_{eff}} \qquad (12.3)$$

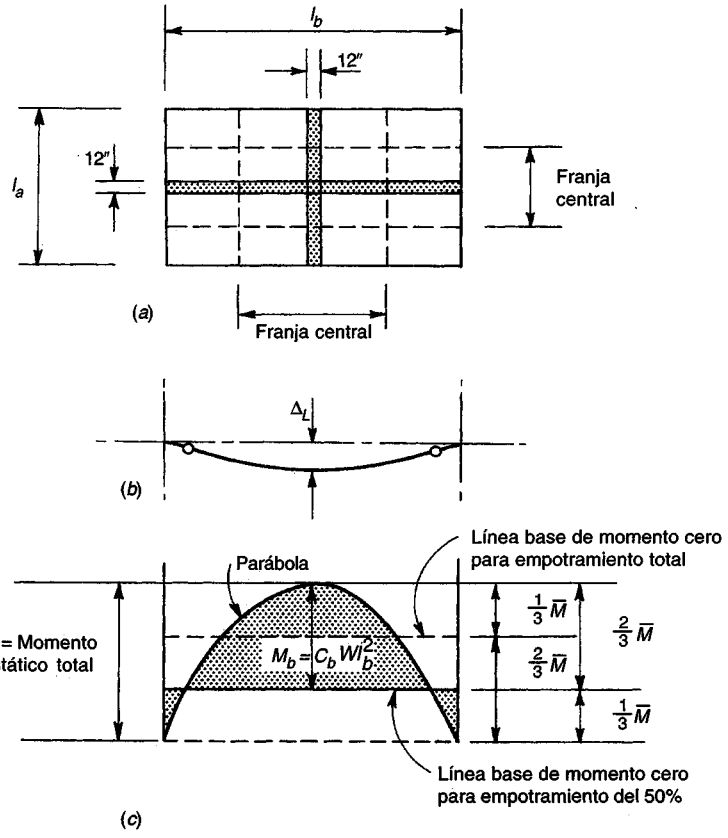


FIGURA 12.11
Análisis de deflexiones causadas por carga viva: (*a*) planta de losa; (*b*) curva de la deflexión para una franja unitaria; (*c*) diagrama para momento máximo debido a la carga viva.

donde M_b es el momento positivo ocasionado por la carga viva y obtenido mediante la utilización de los coeficientes apropiados de la tabla 12.5, E_c es el módulo elástico del concreto, e I_{eff} es el momento de inercia efectivo de la sección transversal de concreto de ancho unitario.

La ecuación (12.3) se dedujo para un panel común de losa interior, con momentos de restricción iguales en cada uno de los extremos de la franja de losa. Ecuaciones similares pueden deducirse para los casos en que uno o los dos extremos son discontinuos. Sin embargo, según el método de los coeficientes para análisis de momentos, los momentos negativos en los bordes discontinuos de las losas se suponen iguales a un tercio del momento positivo en la misma dirección; por consiguiente es claro que la ecuación resultante para la deflexión sería muy similar a la ecuación (12.3). Esta ecuación puede utilizarse, entonces, para franjas de paneles que tengan uno o los dos extremos discontinuos, pero monolíticos con las vigas de apoyo, con un margen de error mínimo. Para el caso especial en que los bordes están completamente libres de restricciones, como en las losas apoyadas en muros de mampostería, la deflexión en el centro de la luz que genera la carga viva es

$$\Delta_l = \frac{5}{48}\frac{M_b l_b^2}{E_c I_{eff}} \tag{12.4}$$

La deflexión por carga muerta debe basarse en el diagrama de momentos que se encuentra utilizando los máximos momentos positivos por carga muerta producto de esta carga, con base en la tabla 12.4, la cual supone que todos los paneles están cargados. Debe recordarse que los bordes continuos se consideraron totalmente empotrados en la deducción de los coeficientes de la tabla 12.4. De acuerdo con esto, puede demostrarse que la deflexión en el centro de la luz producida por carga muerta Δ_d, para el caso con los dos extremos continuos, es

$$\Delta_d = \frac{1}{16}\frac{M_b l_b^2}{E_c I_{eff}} \tag{12.5}$$

donde M_b es, en este caso, el momento positivo que genera la carga muerta obtenido con los coeficientes de la tabla 12.4. Para el caso especial en que ambos extremos están libres de restricciones, la deflexión en el centro de la luz por carga muerta puede encontrarse a partir de

$$\Delta_d = \frac{5}{48}\frac{M_b l_b^2}{E_c I_{eff}} \tag{12.6}$$

Aunque las deflexiones estudiadas anteriormente se refieren a una franja unitaria en la dirección larga del panel de la figura 12.11*a*, los cálculos también pueden basarse en una franja en la dirección corta. La deflexión resultante en el centro del panel debe ser la misma en cualquiera de los dos casos, aunque debido a la naturaleza aproximada de los cálculos se pueden esperar pequeñas diferencias. Un procedimiento razonable consiste en calcular la deflexión en cada una de las direcciones y luego promediar los resultados.

El Código ACI 9.5.3 sugiere que se utilice el momento de inercia I_{eff}, determinado mediante la ecuación (6.5), para tener en cuenta la influencia del agrietamiento del concreto en la reducción de la rigidez. Para losas en dos direcciones apoyadas en los bordes, el agrietamiento para las cargas de servicio no es, en general, extenso y sólo se introduce un pequeño margen de error si los cálculos se basan en el momento de inercia bruto I_g de la franja unitaria.

Las deflexiones de la losa calculadas según las ecuaciones anteriores, son las deflexiones elásticas iniciales que se producen inmediatamente después de la aplicación de las cargas. Para cargas sostenidas, como las debidas a cargas muertas, el Código ACI 9.5.3 recomienda que el aumento de la deflexión con el tiempo puede determinarse con base en la ecuación (6.11), con un multiplicador dependiente del tiempo ξ que varía de acuerdo con la figura 6.8, y con un valor último igual a 2.0. La experiencia indica que un valor de 2.0 a menudo subestima las deflexiones dependientes del tiempo en losas, probablemente porque las losas tienen relaciones de espesor a luz mucho menores que las de las vigas, con base en las cuales se determinaron los multiplicadores a largo plazo. En la referencia 12.5 Branson sugiere la utilización de un valor de $\xi = 3.0$ para losas.

Ejemplo 12.3. Deflexiones de una losa en dos direcciones apoyada en los bordes. La losa de piso del ejemplo 12.2 va a soportar particiones rígidas y otros elementos no estructurales que pueden dañarse si ocurren deflexiones grandes. Estos elementos se instalarán tres meses después de que se retiren las formaletas de construcción y se impongan las cargas muertas. Calcule el incremento en las deflexiones por cargas muerta y viva de servicio que afectarán a los elementos superpuestos y compare con los valores límites determinados por el Código ACI.

Solución. Los cálculos de las deflexiones se basarán en el análisis de momentos del ejemplo 12.2. Sin embargo, estos momentos se basaron en factores de sobrecarga de 1.4 aplicados a las cargas muertas y de 1.7 a las cargas vivas, y los momentos deben, por tanto, reducirse de acuerdo con esto, para obtener los momentos para las cargas de servicio. El módulo de elasticidad tomado de la ecuación (2.4) es $E_c = 57{,}000\sqrt{3000} = 3.12 \times 10^6$ lb/pulg^2. El momento de inercia se tomará como el de la sección bruta de concreto, y para una franja de 12 pulg es $I_g = 12 \times 6^3/12 = 216$ pulg^4.

La deflexión instantánea en el centro del panel que produce la carga muerta se encontrará mediante la ecuación (12.5), primero para la franja de dirección larga y luego para la franja de dirección corta, y los resultados se promediarán si resultan diferentes. En la dirección larga, a partir del ejemplo 12.2, el momento positivo producto de la carga muerta es 12,600 lb-pulg para las cargas mayoradas, o sea, 12,600/1.4 = 9000 lb-pulg para las cargas de servicio. Así que,

$$\Delta_d = \frac{9000\,(25 \times 12)^2}{16 \times 3.12 \times 10^6 \times 216} = 0.08 \text{ pulg}$$

Por comparación, en la dirección corta el momento para las cargas de servicio que genera la carga muerta es 19,700/1.4 = 14,100 lb-pulg y la deflexión correspondiente en el centro del panel es igual que antes.

$$\Delta_d = \frac{14{,}100\,(20 \times 12)^2}{16 \times 3.12 \times 10^6 \times 216} = 0.08 \text{ pulg}$$

El incremento en la deflexión dependiente del tiempo se calculará con base en un multiplicador a cinco años de $\xi = 3.0$, pero se utilizará la variación en el tiempo establecida por el Código ACI como aparece en la figura 6.8. Ésta indica que la mitad de la deflexión dependiente del tiempo habrá ocurrido en tres meses; sólo la mitad restante se presentará después de la instalación de las particiones y los otros elementos. Así, la fracción de las deflexiones dependientes del tiempo por carga muerta que pueden causar daño es $0.08 \times 3 \times \frac{1}{2} = 0.12$ pulg.

La deflexión producida por carga viva se calculará a partir de la ecuación (12.3). En la dirección de la luz larga, el momento positivo que genera la carga viva para las cargas de servicio es 35,000/1.7 = 20,600 lb-pulg y la deflexión en el centro del panel es

$$\Delta_l = \frac{3 \times 20{,}600\,(25 \times 12)^2}{32 \times 3.12 \times 10^6 \times 216} = 0.26 \text{ pulg}$$

A manera de verificación, en dirección de la luz corta el momento positivo por carga viva es 53,700/1.7 = 31,600 lb-pulg, y la deflexión es

$$\Delta_l = \frac{3 \times 31{,}600\,(20 \times 12)^2}{32 \times 3.12 \times 10^6 \times 216} = 0.25 \text{ pulg}$$

la misma que antes, para todos los efectos prácticos.

La deflexión que produce daño potencial es la suma del incremento en deflexión dependiente del tiempo ocasionado por la carga muerta que ocurre después de los tres meses, y la deflexión inmediata que produce la carga viva, es decir,

$$\Delta = 0.12 + 0.26 = 0.38 \text{ pulg}$$

De acuerdo con los límites del Código ACI, de la tabla 6.3, la deflexión máxima admisible para las condiciones establecidas es 20 × 12/480 = 0.50 pulg, de manera que, con base en las deflexiones, el diseño puede considerarse satisfactorio.

12.8 OTRAS CONSIDERACIONES

Con cierta frecuencia, en la práctica deben incluirse aberturas en las losas, por ejemplo, para el paso de ductos de calefacción y ventilación o de tuberías. Las losas en dos direcciones con vigas en los bordes son menos sensibles a los huecos que las losas de placa plana sin vigas, y para aberturas de tamaño moderado por lo general es suficiente suministrar un refuerzo adicional en cada dirección, adyacente a la abertura en cada lado, equivalente al acero interrumpido y extendiéndolo una longitud de desarrollo completa más allá de la abertura en todas las direcciones. Deben especificarse barras en las esquinas, a 45°, para controlar el agrietamiento de la losa en las esquinas de las aberturas. Las aberturas más grandes requieren tratamientos especiales y pueden necesitar reforzamiento de la losa con vigas para restaurar la continuidad. Las cargas concentradas también pueden llegar a requerir vigas de apoyo.

Las aberturas en losas se analizarán con mayor detalle en el capítulo 13, y en los capítulos 14 y 15 se desarrollarán métodos especiales de análisis que pueden tener en cuenta tanto las aberturas en losas como las cargas concentradas.

REFERENCIAS

12.1. W. L. Gamble, "Moments in Beam-Supported Slabs", *J. ACI*, vol. 69, no. 3, 1972, pp. 149-157.
12.2. "Building Code Requirements for Reinforced Concrete", ACI Publication 318-63, American Con crete Institute, Farmington Hills, MI, 1963.
12.3. H. Marcus, *Die Vereinfachte Beredhnung Biegsamer Platten*, Julius Springer, Berlin, 1929.
12.4. P. Rogers, "Two-Way Reinforced Concrete Slabs", *J. ACI*, vol. 41, no. 41, 1944, pp. 21-36.
12.5. D. E. Branson, *Deformation of Concrete Structures*, McGraw-Hill, New York, 1977.

PROBLEMAS

12.1. Se va a construir un puente peatonal que consta de una losa maciza en una dirección que se extiende 16 pies entre estribos de mampostería, como se indica en la figura P12.1. El puente debe soportar una carga viva de servicio de 100 lb/pie^2. Adicionalmente, puede actuar una carga concentrada de 2000 lb, que se supone uniformemente distribuida a lo ancho del puente y aplicada en cualquier sitio sobre la luz. Se utilizará una superficie de terminado en asfalto de 2 pulg, que pesa 20 lb/pie^2. Se colocarán bordillos prefabricados de concreto de manera tal que no tengan ningún efecto estructural. Realice el diseño de la losa utilizando resistencias de los materiales f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2, y resuma sus resultados en forma de esquemas, mostrando todas las dimensiones del concreto y el refuerzo.

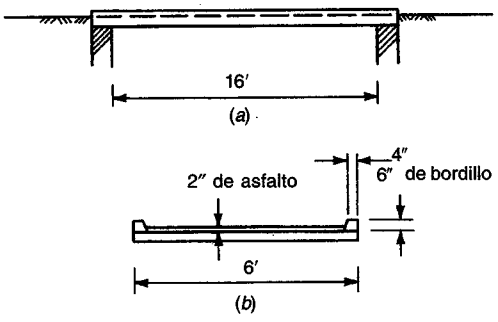


FIGURA P12.1

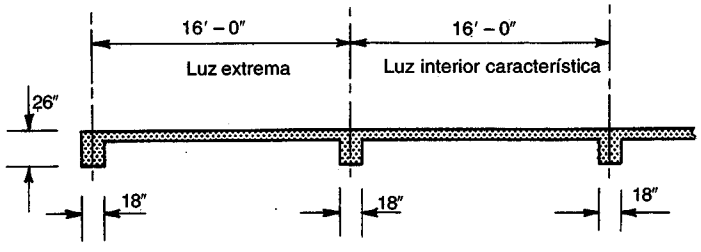


FIGURA P12.2

12.2. Un sistema de entrepiso para un edificio de concreto reforzado consiste en una losa continua en una dirección, construida monolíticamente con sus vigas de apoyo, como se ilustra en la sección transversal de la figura P12.2. La carga viva de servicio será de 125 lb/pie^2; las cargas muertas incluyen una consideración de 10 lb/pie^2 para el relleno y el terminado del piso en concreto ligero no estructural, y otra de 10 lb/pie^2 para las cargas suspendidas, más el propio peso del piso. Utilizando los coeficientes del ACI, calcule los momentos y cortantes de diseño y diseñe la losa haciendo uso de una cuantía de acero a tensión máxima de 0.006. Todo el refuerzo debe ser en barras rectas. La mitad de las barras para momento positivo se interrumpirán cuando no se necesiten más; la otra mitad se prolongará dentro de las vigas de apoyo, como lo especifica el Código ACI. Todo el acero negativo se interrumpirá a la misma distancia desde la cara de apoyo en cada caso. Resuma su diseño mediante un esquema que indique las dimensiones del concreto, y el tamaño, espaciamiento y puntos de corte de todas las barras. Las resistencias de los materiales son f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c =3000 lb/pulg^2.

12.3. Para la losa de piso en una dirección del problema 12.2, calcule las deflexiones instantánea y a largo plazo ocasionadas por la carga muerta. Suponga que todas las cargas muertas se aplican una vez se retiran las formaletas de construcción. Determine también la deflexión por la aplicación de la totalidad de la carga viva de servicio. Si se supone que se instalará un equipo sensible seis meses después de que se retiren las formaletas, calcule las componentes relevantes de la deflexión y compare la deflexión total con los valores máximos establecidos por el Código ACI.

12.4. Una losa de cubierta en concreto, en dos direcciones, debe diseñarse para cubrir una bóveda con transformadores. Las dimensiones exteriores de la bóveda son 17 × 20 pies y los muros de apoyo están hechos en ladrillo de 8 pulg. Se supondrá una carga viva de servicio de 80 lb/pie^2 distribuida uniformemente sobre la superficie de la cubierta y se tendrá en cuenta una carga muerta de 10 lb/pie^2 adicional al peso propio de la losa. Diseñe la cubierta como una losa en dos direcciones apoyada en los bordes, utilizando f'_c = 4000 lb/pulg^2 y f_y = 50,000 lb/pulg^2.

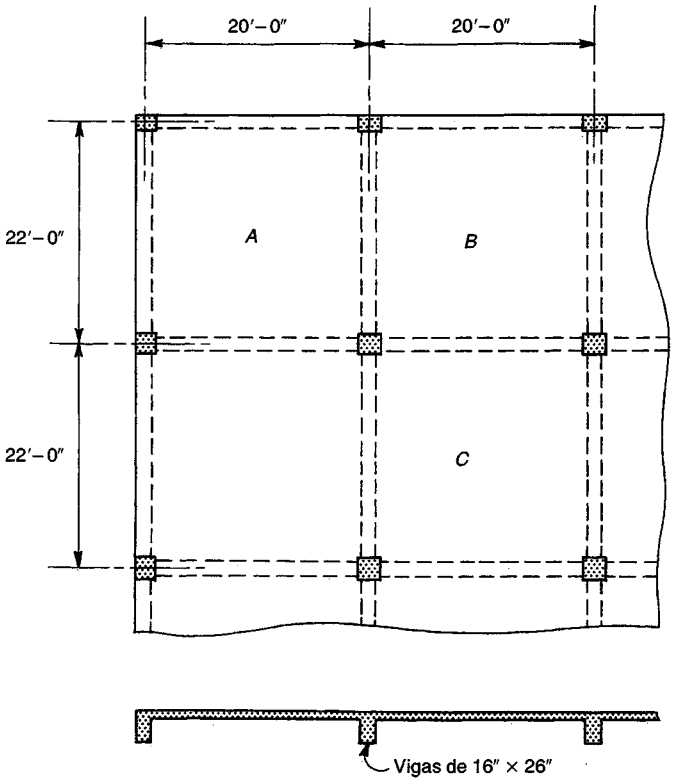


FIGURA P12.5

12.5. Un garaje de estacionamiento debe diseñarse utilizando una losa en dos direcciones y apoyada en vigas monolíticas de 16 × 26 pulg a lo largo de los ejes de columnas, como se ilustra en la figura P12.5. Se especifica una carga viva de 100 lb/pie^2. Determine el espesor requerido para la losa utilizando una

cuantía máxima de acero de aproximadamente 0.005, y diseñe el refuerzo para paneles característicos de esquina *A*, de borde *B* e interior C. Detalle el refuerzo mostrando el tamaño, el espaciamiento y las longitudes de las barras. Se utilizarán barras rectas para todo el refuerzo. Las resistencias de los materiales son $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 4000$ lb/pulg^2.

12.6. Para el panel interior *C* característico del garaje de estacionamiento del problema 12.5, (*a*) calcule las deflexiones instantáneas y a largo plazo ocasionadas por la carga muerta, y (*b*) calcule la deflexión por la carga viva de servicio total. Compare con los valores máximos permitidos por el Código ACI, considerando que no existen elementos unidos que podrían dañarse por deflexiones grandes.

CAPÍTULO

13 LOSAS EN DOS DIRECCIONES APOYADAS SOBRE COLUMNAS

13.1 INTRODUCCIÓN

Cuando las losas en dos direcciones se apoyan sobre vigas relativamente delgadas y flexibles (figura 12.1*b*), o si las vigas en los ejes entre columnas se omiten del todo, como en el caso de las losas de tipo placa plana (figura 12.1*d*), las losas planas (figura 12.1*e*) o los sistemas de viguetas en dos direcciones (figura 12.1*f*), se generan una serie de consideraciones adicionales a las anteriores. La figura 13.1*a* ilustra una porción de un sistema de entrepiso donde un panel de losa rectangular está apoyado en vigas relativamente delgadas en los cuatro lados. Las vigas están sostenidas a su vez por columnas en las intersecciones de sus ejes centrales. Si se aplica una carga superficial w, ésta se comparte entre franjas imaginarias de losa l_a en la dirección corta y l_b en la dirección larga, como se explicó en la sección 12.4. Observe que la porción de carga transmitida por las franjas largas l_b es transferida a las vigas $B1$ que se extienden en la dirección corta del panel. La porción tomada por las vigas $B1$ más la que se transmite directamente en la dirección corta por las franjas de losa l_a totalizan el cien por ciento de la carga aplicada al panel. Asimismo, las franjas de losa en la dirección corta l_a entregan una parte de la carga a las vigas $B2$ en la dirección larga. Esta carga, más aquella tomada en forma directa en la dirección larga por la losa, constituyen el cien por ciento de la carga aplicada. Es un requisito claro de estática que, para construcción apoyada sobre columnas, el ciento por ciento *de la carga aplicada debe transmitirse en cada dirección*, en forma conjunta por la losa y por sus vigas de apoyo (ver la referencia 13.1).

Una situación similar se obtiene en la losa de piso del tipo placa plana que aparece en la figura 13.1*b*. En este caso se omiten las vigas. Sin embargo, las franjas anchas de la losa centradas en los ejes entre columnas en cada dirección cumplen la misma función que las vigas de la figura 13.1*a*; también para este caso, la totalidad de la carga debe transmitirse en cada dirección. La presencia de ábacos o de capiteles en la zona doblemente achurada cercana a las columnas (figura 12.1*e*) no modifica el anterior requisito de la estática.

La figura 13.2*a* presenta un sistema de piso del tipo placa plana soportado por columnas en A, B, C y D. La figura 13.2*b* presenta el diagrama de momentos para la dirección de la luz l_1. En esta dirección, la losa puede considerarse como una viga ancha y plana con ancho l_2. De acuerdo con esto, la carga por pie de longitud de la luz es wl_2. Para cualquier luz de una viga continua, la suma

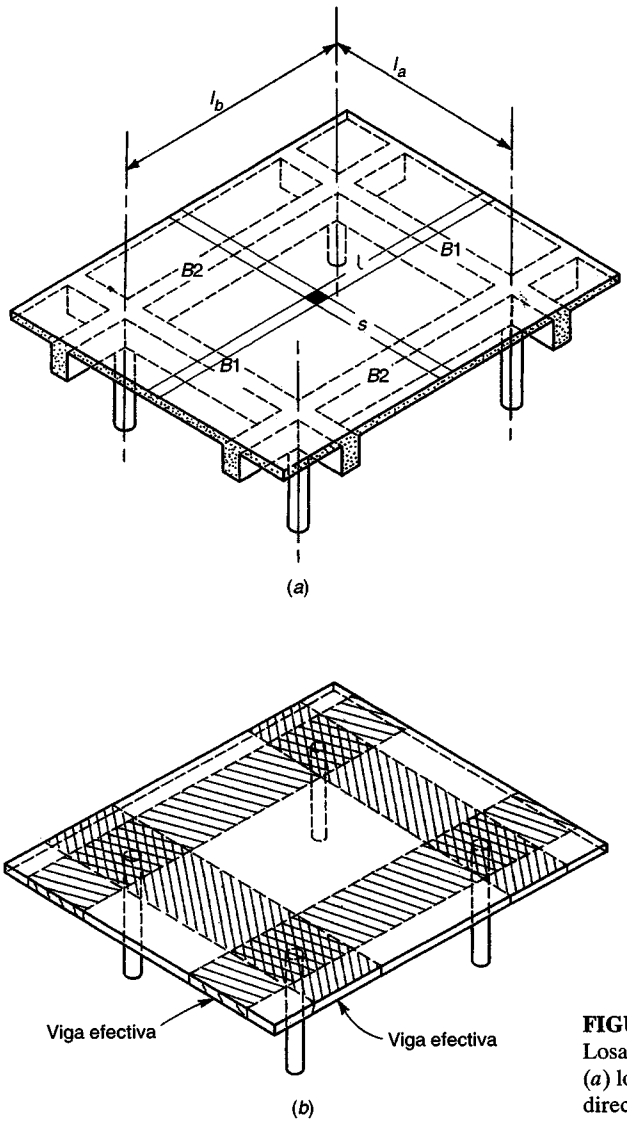


FIGURA 13.1
Losas en dos direcciones apoyadas sobre columnas: (*a*) losa en dos direcciones con vigas; (*b*) losa en dos direcciones sin vigas.

del momento positivo en el centro de la luz y del promedio de los momentos negativos en los apoyos adyacentes, es igual al momento positivo en el centro de la luz de la viga simplemente apoyada correspondiente. Con referencia a la losa, este requisito de la estática puede formularse de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}(M_{ab} + M_{cd}) + M_{ef} = \frac{1}{8}wl_2l_1^2 \qquad (a)$$

En dirección perpendicular debe cumplirse un requisito similar que lleva a la relación:

$$\frac{1}{2}(M_{ac} + M_{bd}) + M_{gh} = \frac{1}{8}wl_1l_2^2 \qquad (b)$$

Estos resultados no revelan nada con respecto a las magnitudes relativas de los momentos en los apoyos y de los momentos en la luz. La proporción del momento estático total que hay en cada sección crítica puede encontrarse a partir de un análisis elástico que tenga en cuenta las longitudes relativas de las luces en paneles adyacentes, la distribución de las cargas y la rigidez relativa de las vigas de apoyo, si existen, y de las columnas. Como alternativa, pueden adoptarse métodos empíricos que han demostrado ser confiables bajo ciertas condiciones restringidas.

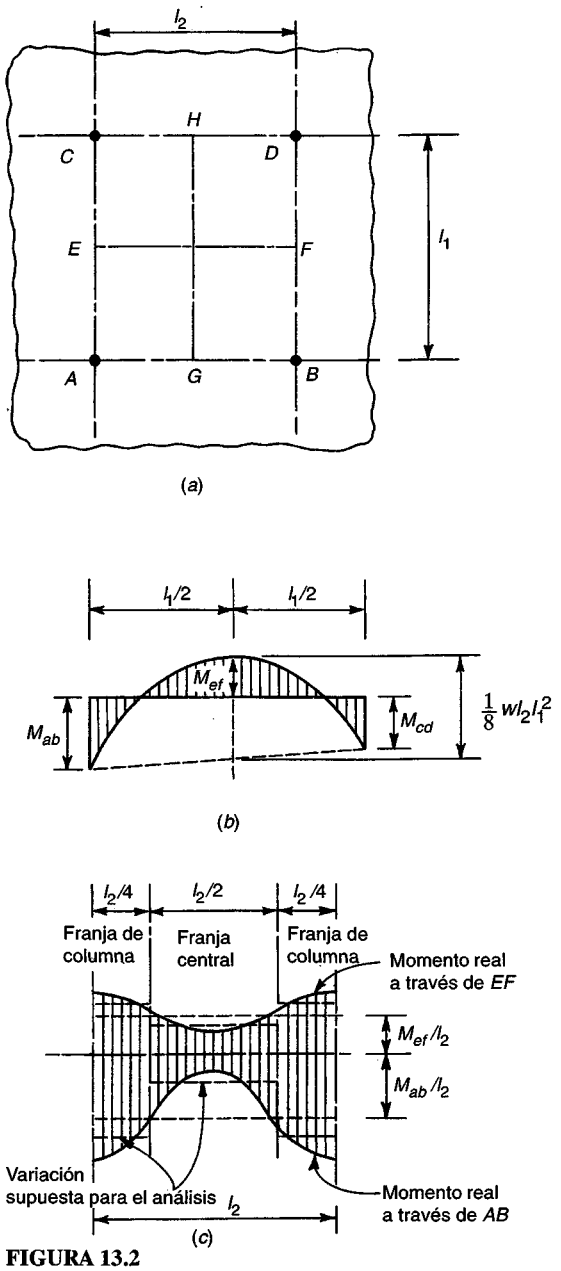


FIGURA 13.2
Variación del momento para losas en dos direcciones apoyadas sobre columnas: (*a*) secciones de momento crítico; (*b*) variación del momento a lo largo de la luz; (*c*) variación del momento a través del ancho de las secciones críticas.

Los momentos a través del ancho de las secciones críticas, como la *AB* o la *EF*, no son constantes sino que varían, como se ilustra en forma cualitativa en la figura 13.2*c*. La variación exacta depende de la presencia o ausencia de vigas en los ejes entre columnas, de la existencia de paneles con ábacos o de capiteles en las columnas, al igual que de la intensidad de la carga. Para propósitos de diseño es conveniente dividir cada panel, como se indica en la figura 13.2*c*, en franjas de columna con un ancho igual a un cuarto del ancho del panel a cada lado del eje entre centros de columnas, y en franjas centrales con un ancho igual a la mitad del ancho del panel entre las dos franjas de columna. Los momentos pueden considerarse constantes dentro de los límites de una franja central o una de columna, como aparece, a menos que haya vigas sobre los ejes entre columnas. En este último caso, ya que la viga debe tener la misma curvatura que la franja de losa adyacente, el momento en la viga será mayor en proporción a su mayor rigidez, produciendo una discontinuidad de la curva de varia-

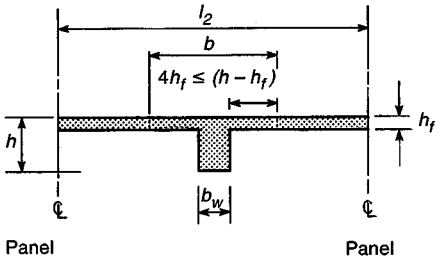


FIGURA 13.3
Sección transversal de una losa y de la viga efectiva.

ción del momento en la cara lateral de la viga. Puesto que, de acuerdo con la estática, el momento total debe ser el mismo que antes, los momentos en la losa deben ser menores.

El capítulo 13 del Código ACI trata de manera unificada todos los anteriores sistemas en dos direcciones. Sus disposiciones son aplicables a losas apoyadas sobre vigas, a losas planas y a placas planas, al igual que a losas con viguetas en dos direcciones. Aunque se permite el diseño "mediante cualquier procedimiento que satisfaga las condiciones de equilibrio y compatibilidad geométrica", se hace referencia específica a dos métodos alternos: el semiempírico, *método de diseño directo*, y un análisis elástico aproximado, conocido como el *método del pórtico equivalente*.

Para propósitos de diseño, en cualquiera de los dos casos un panel corriente se divide en *franjas de columna* y en *franjas centrales*. Una franja de columna se define como una franja de losa con un ancho a cada lado del eje entre centros de columnas igual a un cuarto de la menor de las dimensiones del panel l_1 y l_2. Esta franja incluye las vigas en los ejes de columnas si éstas existen. Una franja central es una franja de diseño limitada por otras dos franjas de columna. En todos los casos, l_1 se define como la luz en la dirección del análisis de los momentos y l_2 como la luz en la dirección transversal. Las luces se miden hasta los ejes entre centros de columnas, excepto donde se indique de otra manera. Para el caso de construcción monolítica, las vigas incluyen la parte de la losa a cada lado de la viga que se extiende una distancia igual a la proyección de la viga por encima o por debajo de la losa (la que sea mayor) pero que no exceda cuatro veces el espesor de la losa (ver la figura 13.3)

13.2 MÉTODO DE DISEÑO DIRECTO

Los momentos en losas en dos direcciones pueden determinarse utilizando un método de diseño directo semiempírico, con las siguientes restricciones:

1. Debe haber un mínimo de tres luces continuas en cada dirección.
2. Los paneles deben ser rectangulares con una relación de luz larga a corta no mayor que dos dentro de un panel.
3. Las longitudes de luces sucesivas en cada dirección no deben diferir en más de un tercio de la luz más larga.
4. Las columnas pueden correrse con respecto a cualquier eje de columnas sucesivas un máximo del diez por ciento de la luz respectiva en la dirección del desplazamiento.
5. Las cargas son únicamente las gravitacionales y la carga viva no debe exceder dos veces la carga muerta.
6. Si se utilizan vigas en los ejes de columnas, la rigidez relativa de las vigas en las dos direcciones perpendiculares, determinada por la relación $\alpha_1 l_2^2 / \alpha_2 l_1^2$, debe estar entre 0.2 y 5.0 (las definiciones se indican más adelante).

a. Momento estático total para cargas mayoradas

Con el fin de calcular el momento estático total M_o en un panel, se utiliza la luz libre l_n en la dirección de los momentos. La luz libre se define como la distancia entre caras de columnas, capiteles, ménsulas o muros, pero no debe ser menor que $0.65l_1$. El momento mayorado total en una luz, para una franja limitada lateralmente por la línea central de los paneles a cada lado del eje central entre apoyos, es

$$M_o = \frac{w_u l_2 l_n^2}{8} \tag{13.1}$$

b. Asignación de momentos a las secciones críticas

En las luces interiores, el momento estático total se reparte entre las secciones críticas a flexión positiva y negativa de acuerdo con las siguientes relaciones:

$$\text{Momento mayorado negativo: Neg } M_u = 0.65M_o \tag{13.2}$$
$$\text{Momento mayorado positivo: Pos } M_u = 0.35M_o \tag{13.3}$$

como se ilustra en la figura 13.4. La sección crítica para flexión negativa se toma en la cara de apoyos rectangulares o en la cara de un apoyo cuadrado equivalente que tenga una sección transversal con la misma área que la de un apoyo circular.

En el caso de luces extremas, la repartición del momento estático total entre las tres secciones críticas a momento (negativa interior, positiva y negativa exterior, como se ilustra en la figura 13.4) depende de la restricción a flexión suministrada a la losa por la columna exterior o el muro exterior, según el caso, y depende también de la presencia o ausencia de vigas en los ejes de columnas. El Código ACI 13.6.3 especifica cinco conjuntos alternativos para estimar los coeficientes de distribución de momentos para las luces extremas, como aparece en la tabla 13.1 y se ilustra en la figura 13.5.

En el caso (*a*), el borde exterior no tiene una restricción a momento, como sería el caso de un muro en mampostería, que proporciona apoyo vertical pero no restricción rotacional. El caso (*b*) representa una losa en dos direcciones con vigas en todos los lados de los paneles. El caso (*c*) es una placa plana sin vigas, mientras que el caso (*d*) es una placa plana donde se provee una viga a lo largo del borde exterior. Por último, el caso (*e*) representa un borde totalmente restringido, como

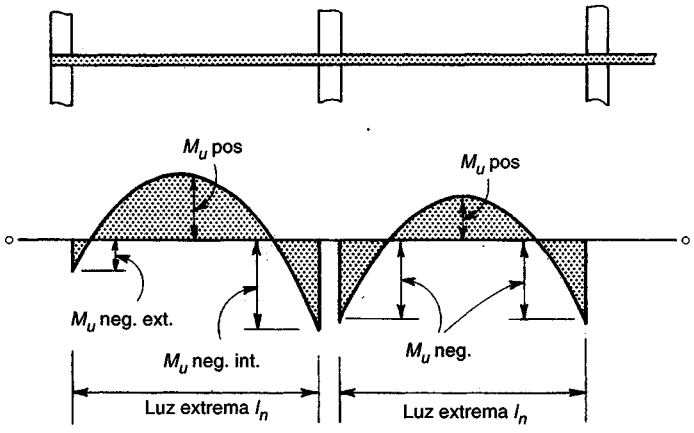


FIGURA 13.4
Distribución del momento estático total M_o a las secciones críticas para flexión positiva y negativa.

TABLA 13.1
Factores de distribución aplicados al momento estático M_o para calcular momentos positivos y negativos en la luz extrema

	(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*)	(*e*)
			Losa sin vigas entre los apoyos interiores		
	Borde exterior sin restricción	Losas con vigas entre todos los apoyos	Sin viga de borde	Con viga de borde	Borde exterior totalmente restringido
Momento negativo interior	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65
Momento positivo	0.63	0.57	0.52	0.50	0.35
Momento negativo exterior	0	0.16	0.26	0.30	0.65

el que se obtiene cuando la losa es monolítica con un muro muy rígido de concreto reforzado. Los coeficientes apropiados para cada caso están dados en la tabla 13.1 y se basan en análisis elásticos tridimensionales modificados hasta cierto punto a la luz de ensayos experimentales y de la práctica (ver las referencias 13.2 a 13.9).

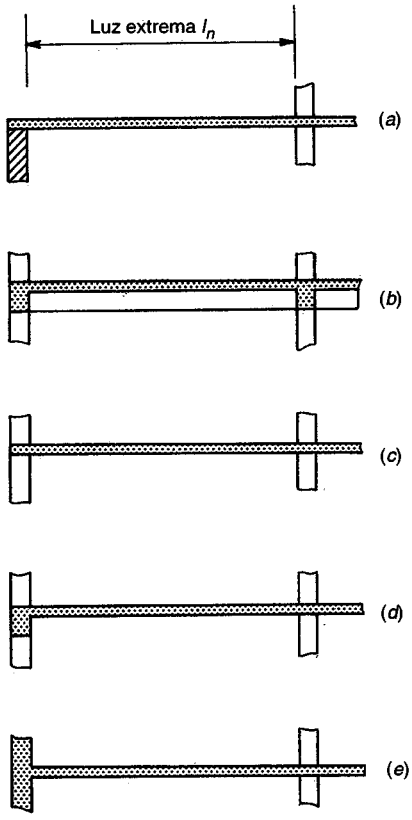


FIGURA 13.5
Condiciones de restricción en los bordes, consideradas en la distribución del momento estático total M_o a las secciones críticas en una luz extrema: (*a*) borde exterior no restringido, por ejemplo, apoyado sobre un muro de mampostería; (*b*) losa con vigas entre todos los apoyos; (*c*) losa sin vigas, es decir, una placa plana; (*d*) losa sin vigas entre los apoyos interiores pero con viga en el borde exterior; (*e*) borde exterior totalmente restringido, por ejemplo, por un muro de concreto monolítico.

En los apoyos interiores pueden presentarse diferencias entre los momentos negativos de luces que llegan hasta el apoyo. En tal caso, la losa debe diseñarse para resistir el mayor de los dos momentos, a menos que se lleve a cabo un análisis especial con base en las rigideces relativas para distribuir el momento no balanceado (ver el capítulo 11). Las vigas de borde, cuando se utilizan, o el borde de losa cuando no hay vigas, deben diseñarse para resistir a torsión la porción del momento negativo exterior que indica la tabla 13.1 (ver el capítulo 7).

c. Distribución lateral de momentos

Una vez distribuido el momento M_o a las secciones de momento positivo y negativo, como se explicó anteriormente, el diseñador debe, además, distribuir estos momentos de diseño a través del ancho de las secciones críticas. Para propósitos de diseño, como se analizó en la sección 13.1, es conveniente considerar que los momentos son constantes dentro de los límites de una franja central u otra de columna a menos que haya una viga en el eje de columnas. En este último caso, a causa de su mayor rigidez, la viga tiende a tomar una mayor parte del momento de la franja de columna que la losa adyacente. La distribución del momento total negativo o positivo entre las franjas centrales de la losa, las franjas de columna de la losa y las vigas, depende de la relación l_2/l_1, de la rigidez relativa de la viga y de la losa, y del grado de restricción rotacional que suministra la viga de borde.

Un parámetro conveniente que define la rigidez relativa de la viga y de la losa en cualquier dirección es

$$\alpha = \frac{E_{cb}I_b}{E_{cs}I_s} \tag{13.4}$$

en la cual E_{cb} y E_{cs} son los módulos elásticos de los concretos de la viga y de la losa (generalmente iguales), I_b e I_s son los momentos de inercia de la viga efectiva y de la losa. Los parámetros con subíndices α_1 y α_2 se utilizan para identificar el valor de α calculado para las direcciones de l_1 y l_2, respectivamente.

Las rigideces a flexión de la viga y de la losa pueden calcularse con base en la sección bruta de concreto sin contar con el refuerzo y el posible agrietamiento y (al aplicar el método directo de análisis) pueden ignorarse las variaciones producidas por los capiteles de columnas y por los paneles con ábacos. Para la viga, si hay, I_b se basa en la sección transversal efectiva definida en la figura 13.3. Para la losa, I_s se toma igual a $bh^3/12$, donde b es en este caso el ancho entre las líneas centrales de los paneles a cada lado de la viga.

La restricción relativa proporcionada por la resistencia de torsión de la viga de borde transversal efectiva se refleja mediante el parámetro β_t, que se define como

$$\beta_t = \frac{E_{cb}C}{2E_{cs}I_s} \tag{13.5}$$

donde, al igual que antes, I_s se calcula para la losa que se extiende en la dirección l_1 y cuyo ancho está limitado por las líneas centrales de los paneles en la dirección l_2. La constante C se refiere a la rigidez de torsión de la viga transversal efectiva, que se define de acuerdo con el Código ACI 13.7.5 como la mayor de las siguientes:

1. Una porción de la losa con un ancho igual al de la columna o del capitel en la dirección donde se toman los momentos.
2. La porción de la losa especificada en el numeral 1 más aquella parte de cualquier viga transversal por encima y por debajo de la losa.
3. La viga transversal que se define en la figura 13.3.

La constante C se calcula dividiendo la sección en sus componentes rectangulares, cada una con la dimensión menor x y la dimensión mayor y, y sumando las contribuciones de todas las partes mediante la ecuación

$$C = \Sigma\left(1 - 0.63\frac{x}{y}\right)\frac{x^3 y}{3} \tag{13.6}$$

La subdivisión se puede realizar de manera que se maximice el valor de C.

Una vez definidos estos parámetros, el Código ACI 13.6.4 distribuye los momentos negativos y positivos entre las franjas de columnas y las centrales, asignando a las franjas de columna los porcentajes de los momentos positivos y negativos mostrados en la tabla 13.2. Pueden realizarse interpolaciones lineales entre estos valores.

La aplicación de estas disposiciones se facilita mediante la utilización de los diagramas de interpolación que se presentan en el gráfico A.4 del apéndice A. Los porcentajes de los momentos interiores negativos y positivos pueden leerse directamente del diagrama a partir de valores conocidos de l_2/l_1 y $\alpha_1 l_2/l_1$. Para el momento negativo exterior, el parámetro β_t requiere una interpolación adicional, que se facilita con la utilización de la gráfica auxiliar ubicada al lado derecho del diagrama. Para ilustrar su utilización para $l_2/l_1 = 1.55$ y $\alpha_1 l_2/l_1 = 0.6$, la línea punteada indica porcentajes de momento de 100 para $\beta_t = 0$ y de 65 para $\beta_t = 2.5$. Si se proyecta hacia la derecha como lo indica la flecha, para determinar en la escala vertical apropiada de 2.5 divisiones un valor intermedio de β_t por ejemplo 1.0, luego hacia arriba y finalmente hacia la izquierda, se puede leer el porcentaje correspondiente sobre el diagrama principal, que resulta en este caso igual a 86.

La viga en el eje de columnas que se extiende en la dirección l_1 debe diseñarse para resistir el 85 por ciento del momento en la franja de columna si a $\alpha_1 l_2/l_1$ es igual o mayor que 1.0. Para valores entre uno y cero la proporción que debe resistir la viga puede determinarse por interpolación lineal. Las cargas concentradas aplicadas en forma directa sobre esta viga deben tenerse en cuenta por separado.

La porción del momento que no resiste la franja de columna se asigna proporcionalmente a las medias franjas centrales adyacentes. Cada franja central se diseña para resistir la suma de momentos asignados a sus dos medias franjas centrales. Una franja central adyacente y paralela a un muro se diseña para el doble del momento asignado a la media franja central correspondiente a la primera fila de apoyos interiores.

TABLA 13.2
Momentos en la franja de columna como porcentaje del momento total en la sección crítica

		l_2/l_1		
		0.5	**1.0**	**2.0**
Momento negativo interior				
$\alpha_1 l_2/l_1 = 0$		75	75	75
$\alpha_1 l_2/l_1 \geq 1.0$		90	75	45
Momento negativo exterior				
$\alpha_1 l_2/l_1 = 0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	75	75	75
$\alpha_1 l_2/l_1 \geq 1.0$	$\beta_t = 0$	100	100	100
	$\beta_t \geq 2.5$	90	75	45
Momento positivo				
$\alpha_1 l_2/l_1 = 0$		60	60	60
$\alpha_1 l_2/l_1 \geq 1.0$		90	75	45

d. Cortante en sistemas de losa con vigas

Cuando se diseña por el método directo debe darse especial atención para proporcionar una adecuada resistencia a cortante, al igual que a momento. De acuerdo con el Código ACI 13.6.8, las vigas con $\alpha_1 l_2/l_1$ igual o mayor que uno deben dimensionarse para resistir el cortante producido por las cargas sobre un área tributaria definida, como aparece en la figura 13.6. Para valores de $\alpha_1 l_2/l_1$ entre uno y cero, la proporción de la carga tomada por cortante en la viga debe encontrarse mediante interpolación lineal. La fracción restante de carga sobre el área sombreada se supone que se transmite directamente a través de la losa hacia las columnas en las cuatro esquinas del panel, y los esfuerzos cortantes en la losa se calculan de acuerdo con este supuesto (ver la sección 13.6).

e. Diseño de columnas

En la construcción en dos direcciones, las columnas deben diseñarse para resistir los momentos determinados a partir del análisis del sistema de losa y viga. La columna que soporta una viga de borde debe proporcionar un momento resistente igual al que se aplica desde el borde de la losa (ver la tabla 13.1). Para puntos interiores los momentos negativos en la losa se determinan suponiendo que actúa la totalidad de las cargas muerta y viva. Para el diseño de columnas, se obtiene una distribución de carga más severa si la carga viva se retira parcialmente. En consecuencia, el Código ACI 13.6.9 exige que las columnas interiores deben resistir un momento igual a

$$M = 0.07[(w_d + 0.5w_l)l_2 l_n^2 - w'_d l'_2 (l'_n)^2] \tag{13.7}$$

En la ecuación (13.7) las cantidades con primas se refieren a la más corta de las dos luces adyacentes (que se supone soporta sólo carga muerta) y las cantidades sin primas se refieren a la luz más larga (que se supone soporta la carga muerta y la mitad de la carga viva). En todos los casos, el momento se distribuye a las columnas superiores e inferiores en proporción a su rigidez relativa a la flexión.

13.3 REFUERZO A FLEXIÓN

Para mantener la consistencia con los supuestos hechos en el análisis, el refuerzo a flexión para sistemas de losa en dos direcciones se coloca formando una malla ortogonal, con barras paralelas a los lados de los paneles. Los diámetros y los espaciamientos de las barras pueden determinarse con

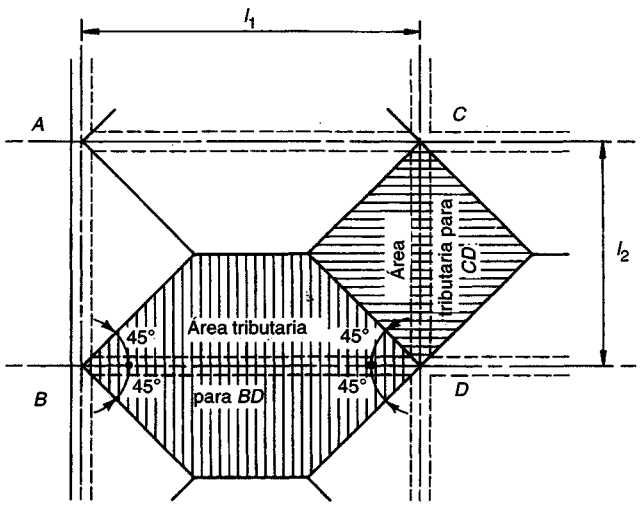


FIGURA 13.6
Áreas tributarias para cálculos de cortante.

los métodos descritos en la sección 12.2. En muchos casos se utilizan barras rectas, aunque algunas veces el acero para momento positivo se dobla hacia arriba cuando ya no se necesita, con el fin de suministrar parte o todo el refuerzo negativo. Para tener en cuenta las posibles cargas concentradas locales y asegurar que las grietas de tensión sean delgadas y estén bien distribuidas, el Código ACI 13.3.2 especifica, para losas en dos direcciones, un espaciamiento máximo para las barras en las secciones críticas igual a dos veces el espesor total de la losa. Debe proporcionarse al menos el acero mínimo para control de grietas por temperatura y retracción de fraguado (ver la sección 12.3). Para protección del acero contra posibles daños de fuego o corrosión, debe mantenerse un recubrimiento mínimo de concreto de $\frac{3}{4}$ pulg.

Cuando las barras se colocan en capas perpendiculares, el acero interior resulta con una altura efectiva menor en un diámetro de barra que el acero exterior. Para placas y losas planas, este efecto se presenta en el acero positivo en las franjas centrales y en las barras negativas en las franjas de columnas. Para losas en dos direcciones con vigas en los ejes de columnas, esta doble fila se presenta en el acero positivo en la franja central; para las franjas de columna es importante principalmente en las vigas en los ejes de columnas, puesto que los momentos en la losa son por lo general muy pequeños en la región donde se intersectan las franjas de columna.

En el estudio del problema de la doble fila en el refuerzo de losas en dos direcciones, soportadas por muros o por vigas de borde rígidas, se anotó en la sección 12.6 que, debido a que en un panel rectangular las curvaturas y los momentos en la dirección corta son mayores que en la dirección larga, las barras en la dirección corta se colocan en general más cerca de las superficies superior o inferior de la losa, para lograr la mayor altura efectiva d, y las barras en la dirección larga se colocan por dentro de éstas con el menor valor de d. Para placas planas en dos direcciones sin vigas o para losas con vigas de borde relativamente flexibles, estos aspectos no son así de sencillos.

Considere un panel rectangular interior de un piso tipo placa plana. Si las franjas de columna en la losa suministraran apoyos fijos a las franjas centrales que se extienden en dirección perpendicular (como se supuso para las losas del capítulo 12), las curvaturas y los momentos de las franjas centrales en la dirección corta serían los mayores. De hecho, las franjas de columna se deflectan hacia abajo ante la aplicación de la carga y esta deformación del apoyo efectivo reduce significativamente las curvaturas y los momentos en la franja central soportada.

Para todo el panel, que incluye tanto las franjas centrales como las franjas de columna en cada dirección, los momentos en la dirección larga serán mayores que los momentos en la corta, lo cual se puede confirmar calculando el momento estático M_o en cada dirección de un panel rectangular. Si se observa que la repartición de M_o, primero a las secciones de momento negativo y positivo, y luego lateralmente a las franjas de columna y a las centrales, se lleva a cabo aplicando a la sección correspondiente exactamente las mismas relaciones en cada dirección, es evidente que los momentos positivos de la franja central (por ejemplo) resultan mayores en la dirección larga que en la dirección corta, exactamente la situación opuesta a la de la losa con vigas de borde rígidas. Para las franjas de columna, los momentos positivos y negativos son mayores en la dirección larga que en la corta. Con base en esto, el diseñador debe inclinarse por colocar las barras negativas y positivas en dirección larga, tanto para las franjas centrales como para las de columnas más cercanas a las respectivas superficies superior o inferior de la losa, para lograr la mayor altura efectiva.

Si se adicionan vigas en los ejes de columnas y si su rigidez se aumenta en forma progresiva para efectos de comparación, se encontrará que los momentos en la dirección corta de la losa se convierten gradualmente en dominantes, como en el caso de las losas del capítulo 12, aunque las vigas en la dirección larga toman momentos mayores que las vigas en la dirección corta. Esto resultará claro a partir de un estudio cuidadoso de la tabla 13.2.

La situación se hace más compleja aún por la influencia de la relación entre las dimensiones de los lados corto y largo del panel, y por las condiciones variables de restricción en los bordes (por ejemplo, paneles de esquina *versus* paneles exteriores típicos *versus* paneles interiores). La mejor orientación para la especificación del orden de colocación del acero en áreas donde se presenta el

problema de la doble fila son las magnitudes relativas de los momentos de diseño obtenidos a partir del análisis para cada caso particular, con el valor máximo de d suministrado a las barras que resisten el mayor momento. No pueden especificarse reglas fijas. Para paneles de losas cuadradas, muchos diseñadores calculan el área de acero requerida con base en la altura efectiva promedio, obteniendo así el mismo tamaño de barras y similar espaciamiento en cada dirección; esto es un poco conservador para la capa exterior y ligeramente no conservador para el acero interior. La redistribución de cargas y momentos antes de la falla absorbería las diferencias resultantes en las capacidades en las dos direcciones.

Los puntos de corte de las barras pueden calcularse a partir de las envolventes de momento, siempre y cuando estén disponibles; sin embargo, cuando se utiliza el método de diseño directo, las envolventes de momento y las líneas de inflexión no se determinan de manera explícita. En tales casos (y a menudo también cuando se utiliza el método del pórtico equivalente de la sección 13.5) se utilizan los puntos estándares de corte de barras de la figura 13.7, recomendados por el Código ACI.

El Código ACI 13.3.8.5 exige que todas las barras inferiores dentro de las franjas de columna en cada una de las direcciones sean continuas o se unan con empalmes clase A (ver la sección 5.11*a*) localizados como se muestra en la figura 13.7. Al menos dos de las barras dentro de la franja de columna en cada dirección deben pasar a través del núcleo de la columna y deben anclarse en los apoyos exteriores. Este acero inferior continuo en la franja de columna tiene por objetivo proporcionar algo de capacidad para transmitir carga a los apoyos adyacentes mediante acción de catenaria en caso de que alguno de los apoyos se dañe o se destruya. Estas dos barras a través de la columna pueden considerarse como "acero de integridad estructural" y tienen como propósito darle a la losa algo de capacidad residual después de la ocurrencia de alguna falla por punzonamiento.

La necesidad de un refuerzo especial en las esquinas exteriores de las losas en dos direcciones apoyadas sobre vigas se explicó en la sección 12.6 y el refuerzo típico de esquina se presentó en la figura 12.9. De acuerdo con el Código ACI 13.3.6, este refuerzo se requiere para losas con vigas entre las columnas de soporte si el valor de α dado por la ecuación (13.3) es mayor que 1.0.

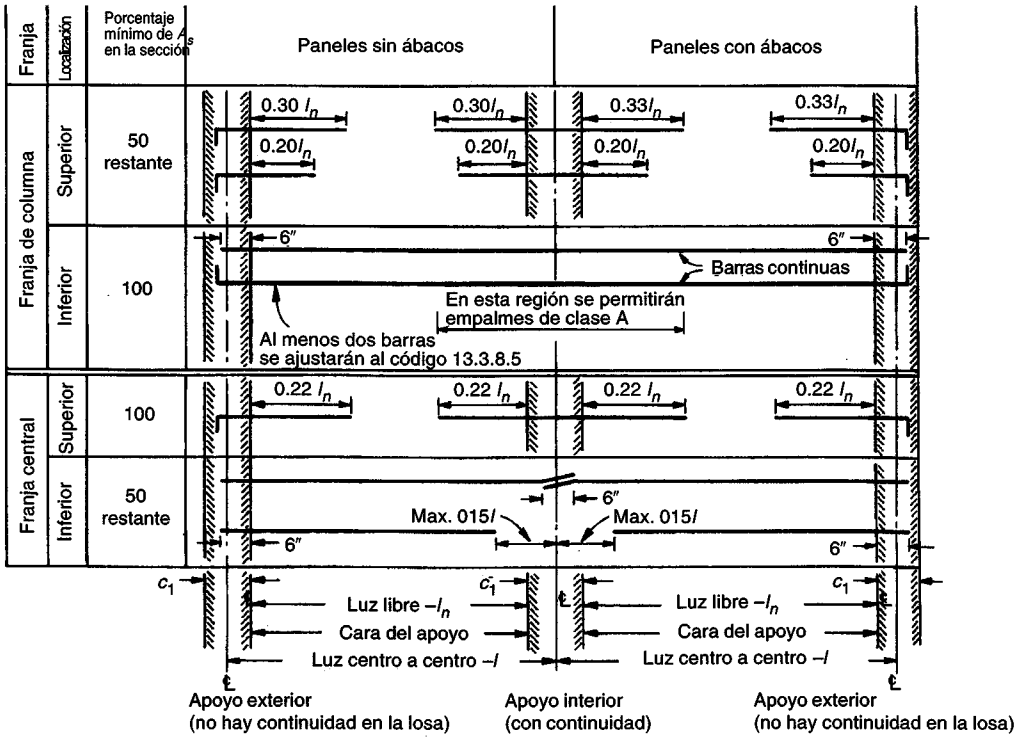


FIGURA 13.7
Longitudes mínimas para el refuerzo de una losa sin vigas.

13.4 LÍMITES DE ESPESOR DEL CÓDIGO ACI

La mejor manera de garantizar que las deflexiones de la losa durante el servicio no vayan a producir dificultades consiste en calcular las deflexiones para la carga total o para la componente de carga que se estudia y comparar estas proporciones con valores límites. En años recientes se desarrollaron métodos simples y suficientemente precisos para estimar las deflexiones de losas en dos direcciones. En la sección 13.9 se presenta un método para calcular las deflexiones de losas en dos direcciones apoyadas sobre columnas.

Como alternativa, el control de las deflexiones puede lograrse indirectamente cumpliendo límites más o menos arbitrarios en el espesor mínimo de la losa, valores obtenidos con base en una revisión de datos disponibles de ensayos y en el estudio de las deflexiones observadas en estructuras reales. Como resultado del esfuerzo para mejorar la precisión y generalidad de las ecuaciones límites, éstas son cada vez más complejas.

El Código ACI 9.5.3 establece espesores mínimos para construcciones en dos direcciones diseñadas según los métodos del capítulo 13 del Código ACI, es decir, losas diseñadas por el método del pórtico equivalente o por el método de diseño directo. Se incluyen criterios simplificados para losas sin vigas interiores (placas y losas planas con o sin vigas de borde), mientras que para losas con vigas entre apoyos en todos los lados deben aplicarse ecuaciones límites más complicadas. En ambos casos se puede utilizar espesores mínimos menores que los especificados si las deflexiones calculadas están dentro de los límites especificados por el Código, dados en la tabla 6.3.

a. Losas sin vigas interiores

De acuerdo con el Código ACI 9.5.3.2, el espesor mínimo de losas en dos direcciones sin vigas interiores no debe ser menor que el dado por la tabla 13.3. Las vigas de borde, incluidas con el fin de mejorar la transferencia de momentos y cortantes en los apoyos exteriores, aun en el caso de losas en dos direcciones que de otra manera no tendrían vigas, permiten una reducción en el espesor mínimo aproximadamente del diez por ciento para los paneles exteriores. En todos los casos, los espesores mínimos de las losas sin vigas interiores no pueden ser menores que los siguientes valores:

Para losas sin ábacos: 5 pulg
Para losas con ábacos: 4 pulg

TABLA 13.3
Espesores mínimos de losas sin vigas interiores

	Sin ábacos			Con ábacos		
	Paneles exteriores		Paneles interiores	Paneles exteriores		Paneles interiores
Esfuerzo de fluencia f_y, lb/pulg^2	Sin vigas de borde	Con vigas de borde[a]		Sin vigas de borde	Con vigas de borde[a]	
40,000	$l_n/33$	$l_n/36$	$l_n/36$	$l_n/36$	$l_n/40$	$l_n/40$
60,000	$l_n/30$	$l_n/33$	$l_n/33$	$l_n/33$	$l_n/36$	$l_n/36$
70,000	$l_n/28$	$l_n/31$	$l_n/31$	$l_n/31$	$l_n/34$	$l_n/34$

[a] Losas con vigas a lo largo de los bordes exteriores. El valor de α para la viga de borde no debe ser menor que 0.8.

b. Losas con vigas en todos los lados

El parámetro utilizado para definir la rigidez de la viga respecto a la losa en cada una de las direcciones es α, calculado a partir de la ecuación (13.4) de la sección 13.2c. Entonces, α_m se define como el valor promedio de a para todas las vigas en los bordes de un panel dado. De acuerdo con el Código ACI 9.5.3.3, para α_m menor o igual que 0.2, deben considerarse los espesores mínimos de la tabla 13.3.

Para α_m mayor que 0.2 pero no mayor que 2.0, el espesor de la losa no debe ser menor que

$$h = \frac{l_n(0.8 + f_y/200{,}000)}{36 + 5\beta(\alpha_m - 0.2)} \tag{13.8a}$$

y no menor que 5.0 pulg.

Para α_m mayor que 2.0, el espesor no debe ser menor que

$$h = \frac{l_n(0.8 + f_y/200{,}000)}{36 + 9\beta} \tag{13.8b}$$

y no menor que 3.5 pulg,

donde l_n = longitud libre de la luz en la dirección larga, pulg.
α_m = valor promedio de α para todas las vigas en los bordes del panel [ver la ecuación (13.4)]
β = relación entre la longitud de la luz libre en la dirección larga y la correspondiente en la dirección corta.

En los bordes discontinuos debe suministrarse una viga de borde con una relación de rigideces α no menor que 0.8, de lo contrario el espesor mínimo dado por la ecuación (13.8*a*) o (13.8*b*) debe incrementarse en al menos un diez por ciento para el panel con el borde discontinuo.

En todos los casos, pueden utilizarse espesores de losa menores que los mínimos establecidos, siempre y cuando se demuestre mediante cálculos que las deflexiones no excederán los valores límites dados en la tabla 6.3.

Las ecuaciones (13.8*a* y *b*) pueden reescribirse en la forma general

$$h = \frac{l_n(0.8 + f_y/200{,}000)}{F} \tag{13.8c}$$

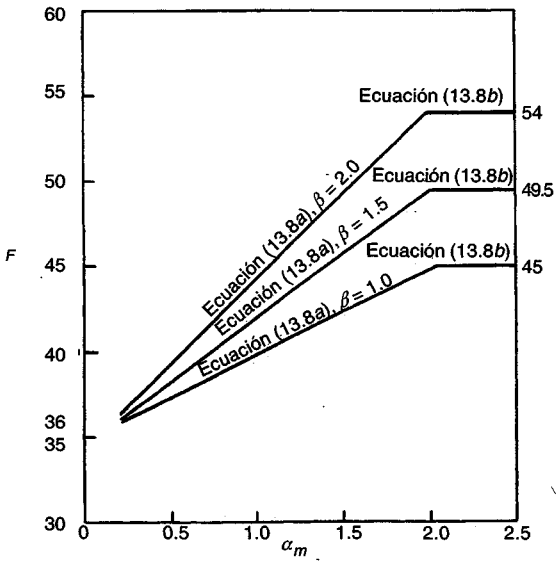


FIGURA 13.8
Parámetro F que controla el espesor mínimo de losas en dos direcciones; espesor mínimo $h = l_n(0.8 + f_y/200{,}000)/F$.

donde F es el valor del denominador en cada caso. La figura 13.8 presenta el valor de F como una función de α_m, con fines comparativos, para tres relaciones de dimensiones del panel β:

1. Panel cuadrado, con $\beta = 1.0$
2. Panel rectangular, con $\beta = 1.5$
3. Panel rectangular, con $\beta = 2.0$, el límite superior de aplicabilidad de las ecuaciones (13.8).

Observe que para α_m menor que 0.2, las vigas en los ejes de columnas tienen poco efecto y los espesores mínimos están dados por la tabla 13.4. Para losas con vigas de borde rígidas, relativamente altas, con valores de α_m mayores o iguales que 2.0, controla la ecuación (13.8*b*). La ecuación (13.8*a*) proporciona una transición para losas con vigas de poca altura en los ejes de columnas con un α_m en el intervalo de 0.2 a 2.0.

Ejemplo 13.1. Diseño de una losa en dos direcciones y con vigas de borde†. Un sistema de piso armado en dos direcciones para un edificio de concreto reforzado está compuesto por paneles de losa con dimensiones 20 × 25 pies en planta, apoyados en vigas de poca altura en los ejes de columnas y vaciadas monolíticamente con la losa, como se muestra en la figura 13.9. Utilizando concreto con f'_c = 4000 lb/pulg^2 y acero con f_y = 60,000 lb/pulg^2, diseñe un panel exterior típico para soportar una carga viva de servicio de 125 lb/pulg^2 además del peso propio del piso.

Solución. El sistema de piso satisface todos los límites establecidos en la sección 13.2 y se utilizará, por tanto, el método de diseño directo del Código ACI. Con propósitos ilustrativos se diseñará únicamente un panel exterior típico como se ilustra en la figura 13.9. Los límites de espesor de la sección 13.4 se utilizarán como guía para obtener el espesor deseado de losa. Para utilizar las ecuaciones (13.8), se introducirá un valor tentativo de h = 7 y se supondrá que las dimensiones de las vigas son 14 × 20 pulg, como se muestra en la figura 13.9. La proyección efectiva del ala más allá de la cara de las vigas es la

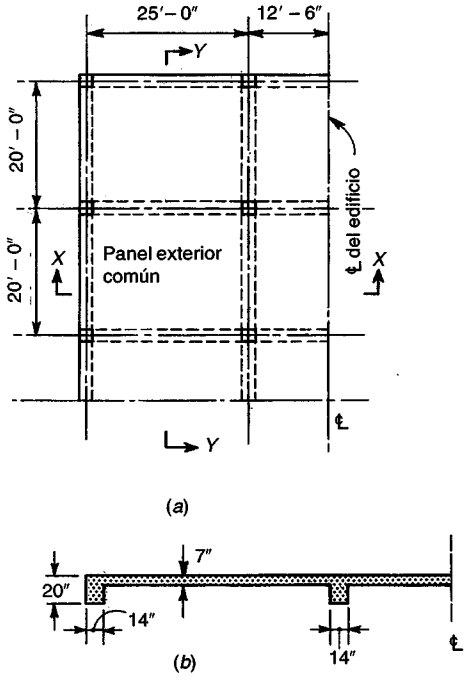


FIGURA 13.9
Losa de piso en dos direcciones con vigas en los ejes de columnas: (*a*) planta parcial del piso; (*b*) sección X-X (la sección Y-Y es similar).

†El diseño de una losa en dos direcciones sin vigas, es decir, un sistema de entrepiso tipo placa plana, que también se puede realizar mediante el método de diseño directo si se cumplen las restricciones de la sección 13.2, se ilustrará mediante un ejemplo en la sección 13.5.

menor de $4h_f$ o $h - h_f$, que en este caso es igual a 13 pulg. Los momentos de inercia de las vigas T se estimarán como múltiplos de la porción rectangular, como sigue:

Para las vigas de borde: $I = \frac{1}{12} \times 14 \times 20^3 \times 1.5 = 14{,}000 \text{ pulg}^4$

Para las vigas interiores: $I = \frac{1}{12} \times 14 \times 20^3 \times 2 = 18{,}600 \text{ pulg}^4$

Para las franjas de losa:

Para un ancho de 13.1 pies: $I = \frac{1}{12} \times 13.1 \times 12 \times 7^3 = 4500 \text{ pulg}^4$

Para un ancho de 20 pies: $I = \frac{1}{12} \times 20 \times 12 \times 7^3 = 6900 \text{ pulg}^4$

Para un ancho de 25 pies: $I = \frac{1}{12} \times 25 \times 12 \times 7^3 = 8600 \text{ pulg}^4$

Así que, para la viga de borde $\alpha = 14{,}000/4500 = 3.1$, para las dos vigas de 25 pies de largo $\alpha = 18{,}600/6900 = 2.7$, y para la viga de 20 pies de largo, $\alpha = 18{,}600/8600 = 2.2$, con lo que se obtiene un valor promedio de $\alpha_m = 2.7$. La relación entre las luces libres larga y corta es $\beta = 23.8/18.8 = 1.27$. Entonces, el espesor mínimo determinando por la ecuación (13.8*b*) es

$$h = \frac{286(0.8 + 60/200)}{36 + 9 \times 1.27} = 6.63 \text{ pulg}$$

El límite de 3.5 pulg de la sección 13.4 evidentemente no controla en este caso, y el espesor tentativo adoptado de 7 pulg será la base para los demás cálculos.

Para una losa de 7 pulg la carga muerta es $\frac{7}{12} \times 150 = 88 \text{ lb/pie}^2$. Si se aplican los factores de carga usuales para obtener las cargas de diseño, se tiene

$$w = 1.4 \times 88 + 1.7 \times 125 = 335 \text{ lb/pie}^2$$

En *dirección de la luz corta*, considerando la franja de losa y viga centrada en el eje interior de columnas, el momento estático total de diseño es

$$M_o = \frac{1}{8} \times 0.3351 \times 25 \times 18.8^2 = 371 \text{ klb-pie}$$

Éste se distribuye de la siguiente manera:

Momento negativo de diseño = $371 \times 0.65 = 241$ klb-pie
Momento positivo de diseño = $371 \times 0.35 = 130$ klb-pie

La franja de columna tiene un ancho de $2 \times 20/4 = 10$ pies. Con $l_2/l_1 = 25/20 = 1.25$ y $\alpha_1 l_2/l_1 = 2.2 \times 25/20 = 2.75$, el gráfico A.4 del apéndice A indica que la franja de columna forma el 68 por ciento del momento negativo, o sea 163 klb-pie, de los cuales las vigas toman el 85 por ciento, o sea 139 klb-pie, y la losa toma el resto, o sea, 24 klb-pie. Los 78 klb-pie restantes se asignan a la franja central de la losa. El gráfico A.4 también indica que la franja de columna toma el 68 por ciento del momento positivo, o sea 88 klb-pie, del cual el 85 por ciento, o sea 75 klb-pie, se asigna a la viga, y 13 klb-pie a la losa. La franja central de la losa toma los restantes 42 klb-pie.

Un análisis similar se realiza para la franja de losa y viga en el borde del edificio, con base en un momento estático total de diseño igual a

$$M_o = \frac{1}{8} \times 0.335 \times 131 \times 18.8^2 = 194 \text{ klb/pie}$$

del cual el 65 por ciento se asigna a la sección de flexión negativa y el 35 por ciento a la sección de flexión positiva, como antes. En este caso, $\alpha_1 l_2/l_1 = 3.1 \times 25/20 = 3.9$. El factor de distribución para el momento de la franja de columna, a partir del gráfico A.4, es 68 por ciento para los momentos positivos y negativos, como antes, y se asigna de nuevo el 85 por ciento de los momentos en la franja de columna a las vigas.

En resumen, los momentos en la dirección corta, en klb-pie, son los siguientes:

	Momento en la viga	Momento en la franja de columna de la losa	Momento en la franja central de la losa
Franja interior de losa y viga – luz de 20 pies			
Negativo	139	24	78
Positivo	75	13	42
Franja exterior de losa y viga – luz de 20 pies			
Negativo	73	13	40
Positivo	39	7	22

El momento estático total de diseño en la *dirección larga* del panel exterior es

$$M_o = \tfrac{1}{8} \times 0.335 \times 20 \times 23.8^2 = 475 \text{ klb-pie}$$

Éste se repartirá a las secciones de momento negativo y positivo de acuerdo con la tabla 13.1 y se distribuirá lateralmente a través de las secciones críticas a momento con la ayuda del gráfico A.4. Las relaciones de momento que deben aplicarse para obtener los momentos exteriores negativo y positivo y el momento negativo interior son, respectivamente, 0. 16, 0.57 y 0. 70. La constante de torsión para la viga de borde se encuentra a partir de la ecuación (13.5) para una forma rectangular de 14 × 20 pulg con un ala sobresaliente de 7 × 13 pulg:

$$C = \left(1 - 0.63 \times \frac{14}{20}\right) \frac{14^3 \times 20}{3} + \left(1 - 0.63 \times \frac{7}{13}\right) \frac{7^3 \times 13}{3} = 11{,}205$$

Con $l_2/l_1 = 0.80$, $\alpha_1 l_2/l_1 = 2.7 \times 20/25 = 2.2$, y a partir de la ecuación (13.4), $\beta_t = 11{,}205/(2 \times 6900) = 0.82$; el gráfico A.4 indica que la franja de columna tomará el 93 por ciento del momento negativo exterior, el 81 por ciento del momento positivo y el 81 por ciento del momento negativo interior. Como antes, la viga en el eje de columnas se encargará del 85 por ciento del momento de la franja de columna. Los resultados que se obtienen al aplicar estas relaciones de momento son los siguientes:

	Momento en la viga	Momentos en la franja de la columna de la losa	Momento en la franja central de la losa
Negativo exterior – luz de 25 pies	60	11	5
Positivo – luz de 25 pies	187	33	51
Negativo interior – luz de 25 pies	229	40	63

Es conveniente tabular el refuerzo de diseño de la losa, como se indica en la tabla 13.4. En la dirección de 25 pies, las dos medias franjas de columna pueden combinarse con el propósito de realizar los cálculos en una sola franja de 106 pulg de ancho. En la dirección de 20 pies, la media franja de columna exterior y la media franja de columna interior generalmente son diferentes y se tratan en forma independiente. Los momentos de diseño determinados con base en las distribuciones anteriores se resumen en la columna 3 de la tabla 13.4.

Primero se colocará el acero positivo en la dirección corta, seguido de las barras positivas en la dirección larga. Si se deja una distancia libre de $\frac{3}{4}$ pulg por debajo del acero, y si se utilizan barras No. 4, el espesor efectivo en la dirección corta será de 6 pulg mientras que en la larga será de 5.5 pulg. Una situación similar se obtiene para el acero superior.

Después de calcular los momentos de diseño por pie de franja de losa (columna 6), debe encontrarse el espesor efectivo mínimo de losa que se requiere por razones de flexión. De acuerdo con la

TABLA 13.4
Diseño del refuerzo de la losa

(1)	(2) Ubicación	(3) M_u, klb-pie	(4) b, pulg	(5) d, pulg	(6) $M_u \times 12/b$, klb-pie/pie	(7) ρ	(8) A_s, pulg^2	(9) Cantidad de barras No. 4
Luz de 25 pies								
Las dos medias franjas de columna	Exterior negativa	11	106	5.5	1.25	0.0023[a]	1.34	7
	Positiva	33	106	5.5	3.74	0.0023	1.34	7
	Interior negativa	40	106	5.5	4.53	0.0029	1.69	9
Franja central	Exterior negativa	5	120	5.5	0.50	0.0023[a]	1.52	9[b]
	Positiva	51	120	5.5	5.10	0.0033	2.18	11
	Interior negativa	63	120	5.5	6.30	0.0041	2.71	14
Luz de 20 pies								
Media franja de columna exterior	Negativa	13	53	6	2.94	0.0021[a]	0.67	4
	Positiva	7	53	6	1.58	0.0021[a]	0.67	4
Franja central	Negativa	78	180	6	5.20	0.0028	3.03	16
	Positiva	42	180	6	2.80	0.0021[a]	2.27	13[b]
Media franja de columna interior	Negativa	12	53	6	2.71	0.0021[a]	0.67	4
	Positiva	6.5	53	6	1.47	0.0021[a]	0.67	4

a Cuantía de acero controlada por los requisitos de retracción de fraguado y temperatura.
b Número de barras controlado por los requisitos de espaciamiento máximo.

resistencia de los materiales utilizados, la cuantía máxima permitida de acero es $0.75\rho_b = 0.0214$. Para esta cuantía

$$d^2 = \frac{M_u}{\phi\rho f_y b(1 - 0.59\rho f_y/f_c')}$$

$$= \frac{M_u}{0.90 \times 0.0214 \times 60{,}000 \times 12(1 - 0.59 \times 0.0214 \times 60/4)} = \frac{M_u}{11{,}300}$$

De ahí que, $d = \sqrt{M_u/11{,}300}$. Según esto, se necesitan los siguientes espesores mínimos:

En la dirección de 25 pies: $$d = \sqrt{6.30 \times \frac{12{,}000}{11{,}300}} = 2.59 \text{ pulg}$$

En la dirección de 20 pies: $$d = \sqrt{5.20 \times \frac{12{,}000}{11{,}300}} = 2.35 \text{ pulg}$$

ambos muy por debajo de los espesores que estipulan los requisitos de deflexión. Se obtiene entonces una losa subreforzada. Las cuantías requeridas de acero (columna 7) se encuentran convenientemente a partir de la tabla A.6 con $R = M_u/\phi bd^2$ o a partir de la tabla A.10. Observe que para controlar el agrietamiento por temperatura y retracción de fraguado debe proveerse un área mínima de acero igual a 0.0018 veces el área bruta de concreto. Para una franja de losa de 12 pulg el área correspon-

diente es $0.0018 \times 7 \times 12 = 0.151$ pulg^2. Expresado en términos de la cuantía de acero mínima para los espesores efectivos reales, se obtiene

En dirección de los 25 pies: $$\rho_{min} = \frac{0.151}{5.5 \times 12} = 0.0023$$

En dirección de los 20 pies: $$\rho_{min} = \frac{0.151}{6 \times 12} = 0.0021$$

Estos requisitos controlan en los sitios indicados en la tabla 13.4.

El área total de acero en cada franja se obtiene a partir de la cuantía de acero y está dada en la columna 8. Finalmente, con la ayuda de la tabla A.2 se obtiene la cantidad necesaria de barras. Observe que en dos sitios el número de barras requerido la controlan los requisitos de espaciamiento máximo de $2 \times 7 = 14$ pulg.

La capacidad a cortante de la losa se verifica con base en las áreas tributarias mostradas en la figura 13.6. A una distancia d desde la cara de la viga larga,

$$V_u = 0.335\left(10 - \frac{14}{2 \times 12} - \frac{6}{12}\right) = 2.99 \text{ klb}$$

La resistencia a cortante de diseño de la losa es

$$\phi V_c = 0.85 \times 2\sqrt{4000} \times 12 \times \frac{6}{1000} = 7.74 \text{ klb}$$

valor que es muy superior al cortante aplicado a las cargas mayoradas.

Cada viga debe diseñarse para su parte del momento estático total, como se encontró en los cálculos anteriores, al igual que para el momento ocasionado por su propio peso; este momento puede distribuirse a las secciones de flexión positiva y negativa utilizando las mismas relaciones que se usaron para los momentos estáticos producidos por las cargas sobre la losa. El diseño a cortante de las vigas debe basarse en las cargas calculadas a partir de las áreas tributarias que se ilustran en la figura 13.6. Puesto que no se introducen nuevos conceptos, el diseño de las vigas no se presentará aquí.

Dado que el $0.85 \times 93 = 79$ por ciento del momento negativo exterior en la dirección larga es llevado directamente a la columna por la viga en el eje de columnas de este ejemplo, los esfuerzos de torsión en la viga de borde son muy bajos y pueden despreciarse. En otras circunstancias, las vigas de borde deberían diseñarse para torsión siguiendo los métodos del capítulo 7.

13.5 MÉTODO DEL PÓRTICO EQUIVALENTE

a. Bases del análisis

El método de diseño directo para losas en dos direcciones descrito en la sección 13.2 es aplicable, siempre y cuando la estructura propuesta satisfaga cada una de las seis restricciones referentes a la geometría y a la carga. De otro modo, se necesita un método más general. Uno de estos procedimientos, propuesto por Peabody en 1948 (ver la referencia 13.10), se incorporó en ediciones posteriores del Código ACI como *diseño mediante análisis elástico*. El método se amplió en forma considerable y se refinó con base en investigaciones hechas en la Universidad de Illinois en la década de los años sesenta (ver las referencias 13.11 y 13.12), y aparece en el capítulo 13 del actual Código ACI como el *método del pórtico equivalente.*

Como se verá más adelante, es evidente que el método del pórtico equivalente se desarrolló con base en el supuesto de que el análisis se realizaría mediante el método de distribución de momentos (ver el capítulo 11). Si el análisis se realiza por computador, utilizando un programa estándar de análisis de pórticos, se necesitan unos artificios especiales en la modelación. Este punto se tratará con mayor profundidad en la sección 13.5e.

Para efectos analíticos, en el método del pórtico equivalente la estructura se divide en pórticos continuos centrados en los ejes de columnas y extendiéndose tanto longitudinal como transversalmente, como lo indican las franjas sombreadas de la figura 13.10. Cada pórtico se compone de una fila de

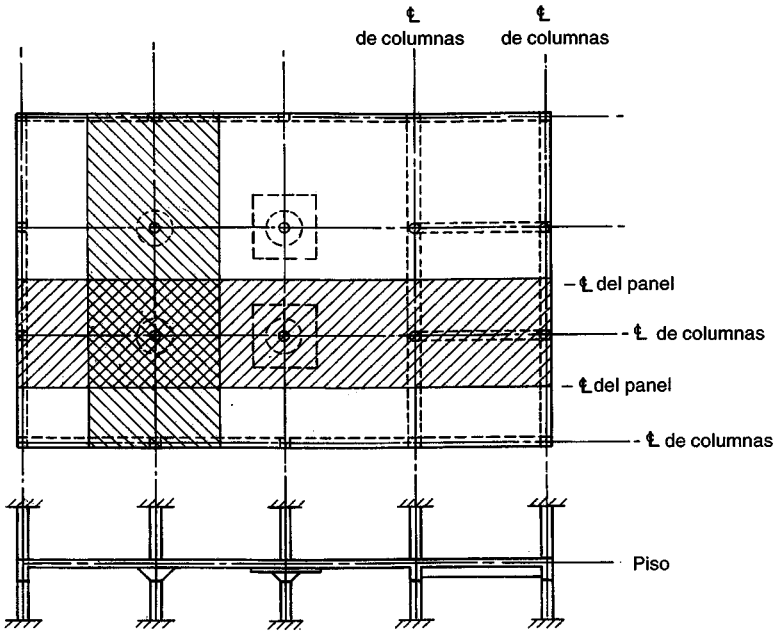


FIGURA 13.10
Idealización del edificio para el análisis con el método del pórtico equivalente.

columnas y de una viga ancha continua. La viga, o viga losa, incluye la porción de la losa limitada por las líneas centrales de los paneles a cada lado de las columnas, junto con las vigas en los ejes de columnas o los ábacos, si se utilizan. Para cargas verticales, cada piso con sus columnas se puede analizar en forma independiente, suponiendo que las columnas están empotradas en los pisos que le quedan por encima y por debajo. Para calcular el momento flector en un apoyo es conveniente y preciso suponer que el pórtico continuo se encuentra completamente empotrado en los apoyos situados a dos paneles de distancia del apoyo estudiado, siempre y cuando el pórtico continúe más allá de dicho punto.

b. Momento de inercia de la viga losa

Los momentos de inercia para utilizar en el análisis pueden determinarse con base en las secciones transversales brutas de concreto ignorando el refuerzo, pero teniendo en cuenta las variaciones en estas secciones a lo largo del eje del elemento.

Para las franjas de vigas, el primer cambio desde el momento de inercia en el centro de la luz ocurre normalmente en los bordes de los ábacos, cuando éstos se utilizan. El siguiente cambio se presenta en el borde de la columna o en el capitel de la columna. Aunque la rigidez de la franja de losa podría considerarse infinita dentro de los límites de la columna o de su capitel, ésta es mucho menor en los sitios cercanos a los centros de los paneles (en cada borde de la franja de losa). De acuerdo con el Código ACI 13.7.3, del centro de la columna a la cara de ésta o capitel, el momento de inercia de la losa se toma igual al de la cara de la columna o capitel dividido por la cantidad $(1 - c_2/l_2)^2$, donde c_2 y l_2 son el tamaño de la columna o capitel y de la luz del panel respectivamente, ambos medidos en la dirección transversal a aquélla donde se determinan los momentos.

Cuando se tienen en cuenta estos cambios en los momentos de inercia se obtiene, para efectos analíticos, un elemento en el cual el momento de inercia varía de manera escalonada. Los factores de rigidez, de transmisión y de momentos de empotramiento para carga uniforme, necesa-

rios para un análisis de distribución de momentos (ver el capítulo 11) están dados en la tabla A.14*a* del apéndice A para una losa sin ábacos y en la tabla A.14*b* para una losa con ábacos con espesor igual a 1.25 veces el espesor de losa y de longitud igual a un tercio de la longitud de la luz.

c. Columna equivalente

En el método del pórtico equivalente, las columnas se consideran unidas a la viga losa continua mediante elementos a torsión en la dirección transversal a la de la luz para la cual se determinan los momentos; el elemento a torsión se extiende hasta las líneas centrales de los paneles que limitan cada lado de la viga losa en estudio. Las deformaciones a torsión de estos elementos transversales de soporte reducen la rigidez a flexión efectiva que proporciona la columna real en el apoyo. Este efecto se tiene en cuenta en el análisis mediante la utilización de lo que se llama una *columna equivalente* con una rigidez menor que la de la columna real.

La acción de una columna y del elemento transversal a torsión se explica mediante la figura 13.11, que ilustra la columna y la viga transversal en el apoyo exterior de una franja de viga losa continua. De la figura 13.11 resulta claro que la restricción de rotación suministrada en el extremo de la losa que se extiende en la dirección l_1 está influida no sólo por la rigidez a flexión de la columna sino también por la rigidez de torsión de la viga de borde AC. Con un momento torsor distribuido m_t que aplica la losa, y un momento torsor resistente M_t que provee la columna, las secciones de la viga de borde en A y C rotarán en mayor grado que la sección en B como consecuencia de la deformación de torsión de la viga de borde. Para tener en cuenta este efecto, el conjunto columna y viga real se remplaza por una columna equivalente, definida de modo que la flexibilidad total (el inverso de la rigidez) de la columna equivalente sea igual a la suma de las flexibilidades de la columna y de la viga reales. Así que,

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\Sigma K_c} + \frac{1}{K_t} \tag{13.9}$$

donde K_{ec} = rigidez a flexión de la columna equivalente
K_c = rigidez a flexión de la columna real
K_t = rigidez de torsión de la viga de borde

todas expresadas en términos de momento por unidad de rotación. En el cálculo de K_c, se supone que el momento de inercia de la columna real es infinito desde la parte superior de la losa hasta la

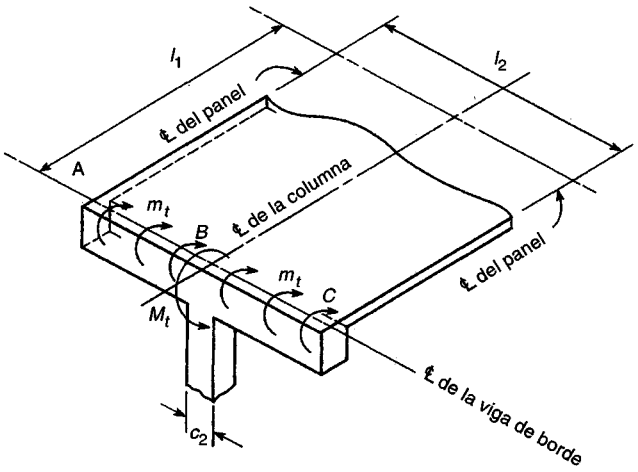


FIGURA 13.11
Torsión en un elemento de apoyo transversal que ilustra las bases de la columna equivalente.

parte inferior de la viga losa, e I_g se basa en la sección bruta de concreto en todos los demás sitios de la longitud. Los factores de rigidez y de transmisión para este caso están dados en la tabla A.14*c*.

La sección transversal efectiva del elemento transversal a torsión, que puede incluir o no un alma de viga que se proyecta por debajo de la losa, como aparece en la figura 13.11, es la misma que se definió en la sección 13.2c. La constante de torsión C se calcula mediante la ecuación (13.5) con base en la sección transversal efectiva así determinada. La rigidez de torsión K_t se puede calcular entonces con la expresión

$$K_t = \sum \frac{9E_{cs}C}{l_2(1 - c_2/l_2)^3} \tag{13.10}$$

donde E_{cs} = módulo de elasticidad del concreto de la losa
c_2 = tamaño de la columna rectangular, capitel o ménsula en la dirección l_2
C = constante de la sección transversal

La sumatoria es aplicable al caso típico cuando hay vigas de borde a ambos lados de la columna.

Si un panel tiene una viga paralela a la dirección respecto a la cual se determinan los momentos, el valor de K_t obtenido de la ecuación (13.10) lleva a valores de K_{ec} que son muy bajos. De acuerdo con esto, se recomienda que en tales casos el valor de K_t determinado con la ecuación (13.10) se multiplique por la relación entre el momento de inercia de la losa con esta viga y el momento de inercia de la losa sin ella.

El método del pórtico equivalente, el concepto de columna equivalente, ilustrado para una columna exterior, se emplea en *todas* las columnas de apoyo para cada viga losa continua.

d. Análisis de momentos

Una vez determinadas las rigideces efectivas de la franja de viga losa y de los apoyos, el análisis del pórtico equivalente puede llevarse a cabo mediante el método de distribución de momentos (ver el capítulo 11).

Si se siguen los requisitos de estática (ver la sección 13.1), las franjas de viga equivalentes en cada dirección deben tomar cada una el cien por ciento de la carga. De acuerdo con el Código ACI 13.7.6, si la carga viva no excede tres cuartos de la carga muerta, se puede suponer que el momento máximo en todas las secciones críticas se obtiene cuando la carga viva mayorada total (más la carga muerta mayorada) se aplica sobre la totalidad de la losa. De otro modo, deben considerarse diferentes patrones de aplicación de carga para maximizar los momentos positivos y negativos. El máximo momento positivo se calcula con tres cuartas partes de la carga viva mayorada que se aplica en el panel y en paneles alternos, mientras que el máximo momento negativo en un apoyo se calcula con tres cuartas partes de la carga viva mayorada aplicada sólo en los paneles adyacentes. La utilización de tres cuartas partes de la carga viva en vez del valor total se explica por el hecho de que los máximos momentos positivos y negativos no pueden ocurrir en forma simultánea (puesto que éstos se determinan a partir de distribuciones diferentes de carga) y de que se presentará una redistribución de momentos hacia las secciones sometidas a esfuerzos menores antes de que se presente la falla de la estructura. Sin embargo, los momentos mayorados no deben ser menores que los correspondientes a la carga viva mayorada total aplicada en todos los paneles.

Los momentos negativos que se obtienen a partir de este análisis corresponden a los centros de los apoyos. Puesto que los apoyos no son cuchillos (bordes delgados) sino más bien franjas anchas de losa que se extienden en la dirección transversal, puede aplicarse un poco de reducción para obtener los momentos negativos de diseño (ver también la sección 11.5a). En los apoyos interiores, la sección crítica para flexión negativa, tanto para las franjas de columna como para las centrales, puede tomarse en la cara de la columna de apoyo o del capitel pero en ningún caso a una distancia mayor que $0.175l_1$ desde el centro de la columna, de acuerdo con el Código ACI 13.7.7. Con el propósito de

evitar una reducción excesiva del momento negativo en los apoyos exteriores (donde la distancia hasta el punto de inflexión es pequeña) para el caso en que las columnas incluyen capiteles, la sección crítica para flexión negativa en la dirección perpendicular a un borde debe tomarse a una distancia, desde la cara del apoyo, no mayor que la mitad de la proyección del capitel medida desde esta cara.

Una vez que se obtienen los momentos de diseño positivos y negativos como se describió anteriormente, falta distribuirlos a lo ancho de las secciones críticas. Para fines de diseño, el ancho total de la franja se divide en franjas de columna y medias franjas centrales adyacentes, definidas previamente, y los momentos se suponen constantes dentro de los límites de cada una de ellas. La distribución de momentos a las franjas de columna y a las franjas centrales se realiza utilizando los mismos porcentajes determinados con relación al método de diseño directo. Éstos se resumen en la tabla 13.2 y en los diagramas de interpolación del gráfico A.4 en el apéndice A.

La distribución de momentos y cortantes a las vigas en los ejes de columnas, si éstas existen, se realiza también según los procedimientos del método de diseño directo. La restricción 6 de la sección 13.2, relacionada con la rigidez relativa de vigas en los ejes de columnas en las dos direcciones, también es aplicable en este caso si se utilizan estas relaciones de distribución.

Ejemplo 13.2. Diseño de un sistema de piso de tipo placa plana mediante el método del pórtico equivalente. Se proyecta un edificio de oficinas utilizando un sistema de piso tipo placa plana con la disposición de columnas que aparece en la figura 13.12. No se permiten vigas, ábacos, ni columnas con capiteles. La carga viva especificada es 100 lb/pie^2 y la carga muerta incluirá el propio peso de la losa más una consideración de 20 lb/pie^2 para los acabados de piso y las cargas suspendidas. Las columnas serán cuadradas, de 18 pulg, y la altura piso a piso de la estructura será de 12 pies. Diseñe el panel interior *C*, usando materiales con resistencias f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2. Se hará uso de refuerzo consistente en barras rectas.

Solución. De acuerdo con el Código ACI, el espesor mínimo h para una placa plana puede encontrarse a partir de la tabla 13.3†. Para este ejemplo, el valor mínimo de h para el panel exterior es

$$h = \frac{20.5 \times 12}{30} = 8.20 \text{ pulg}$$

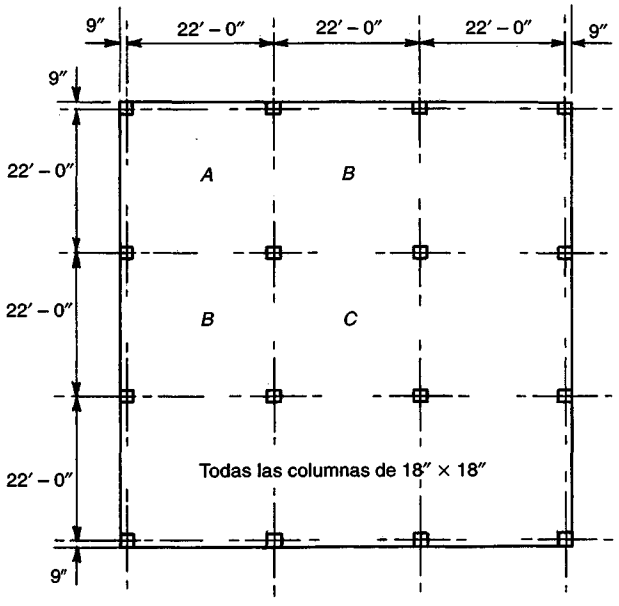


FIGURA 13.12
Sistema de piso en dos direcciones tipo placa plana.

†En muchos pisos tipo placa plana, el espesor mínimo de la losa está controlado por requisitos de transferencia de cortante en las columnas de soporte y h se determina, bien sea para evitar refuerzo a cortante suplementario o para limitar el cortante en exceso, a un valor razonable por encima del que resiste el concreto. El diseño a cortante en placas y losas planas se tratará en la sección 13.6.

Este valor se redondeará hacia arriba por razones prácticas y los cálculos se basarán en un espesor tentativo de 8.5 pulg para todos los paneles. Así, la carga muerta de la losa es $150 \times 8.5/12 = 106$ lb/pie^2, a la cual debe adicionarse la carga muerta sobreimpuesta de 20 lb/pie^2. Las cargas mayoradas de diseño son

$$1.4w_d = 1.4(106 + 20) = 176 \text{ lb/pie}^2$$
$$1.7w_l = 1.7 \times 100 = 170 \text{ lb/pie}^2$$

La estructura es idéntica en las dos direcciones, por ello el diseño para una de las direcciones se puede utilizar para la otra (en los cálculos se utilizará una profundidad efectiva promedio hasta el acero de tensión). Aunque en este caso se cumplen las restricciones de la sección 13.2 y se puede aplicar el método de diseño directo en el análisis, se adoptará el método del pórtico equivalente para mostrar sus características. Los momentos se encontrarán mediante el método de distribución de momentos.

Para estructuras tipo placa plana, por lo general es aceptable calcular las rigideces como si todos los elementos fueran prismáticos sin tener en cuenta el incremento de rigidez dentro de la zona de la unión, puesto que en general tiene un efecto insignificante en los momentos y cortantes de diseño. Entonces, para las luces de la losa

$$K_s = \frac{4E_cI_c}{l}$$
$$= \frac{4E_c(264 \times 8.5^3)}{12 \times 264} = 205E_c$$

y las rigideces de las columnas son

$$K_c = \frac{4E_c(18 \times 18^3)}{12 \times 144} = 243E_c$$

El cálculo de las rigideces de las columnas equivalentes requiere la consideración de las deformaciones de torsión de la franja transversal de losa que funciona a manera de viga de apoyo. Si se aplica el criterio del Código ACI, se obtiene que el elemento a torsión efectivo tiene un ancho de 18 pulg y un espesor de 8.5 pulg. Para esta sección, la constante de torsión C de la ecuación (13.5) es

$$C = \left(1 - 0.63 \times \frac{8.5}{18}\right) 8.5^3 \times \frac{18}{3} = 2590 \text{ pulg}^4$$

y la rigidez de torsión, a partir de la ecuación (13.10), es

$$K_t = \frac{9E_c \times 2590}{264(1 - 1.5/22)^3} = 109E_c$$

Con la ecuación (13.9), teniendo en cuenta las dos columnas y los dos elementos a torsión en cada unión,

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{2 \times 243E_c} + \frac{1}{2 \times 109E_c}$$

a partir de lo cual $K_{ec} = 151E_c$ Los factores de distribución en cada nudo se calculan entonces de la manera usual.

Para el ejemplo en estudio, la relación entre la carga viva de servicio y la carga muerta es 100/126 = 0.79 y, puesto que este valor es superior a 0.75, los momentos máximos positivos y negativos deben determinarse, según el Código ACI 13.7.6 con base en diferentes patrones de aplicación de la carga, con toda la carga muerta mayorada actuando en su sitio y con tres cuartas partes de la carga viva mayorada y colocada de manera que se produzca el máximo efecto. Además, los momentos de diseño no deben ser menores que los producidos por la carga viva mayorada total y la carga muerta aplicada sobre todos los paneles. Así, deben considerarse tres condiciones de carga: (*a*) cargas muerta y viva mayoradas totales de 346 lb/pie^2 aplicadas sobre todos los paneles; (*b*) carga muerta mayorada de 176 lb/pie^2, sobre todas las luces más tres cuartos de la carga viva mayorada, o sea, 128 lb/pie^2, sobre el panel *C*; y (*c*) carga muerta mayorada total sobre todas las luces y tres cuartos de la carga viva en la primera y segunda luces. Los momentos de empotramiento y los finales obtenidos a partir de la distribución se resumen en la tabla 13.5. Los resultados indican que la condición de carga (*a*) controla el

diseño de la losa en la zona del apoyo, mientras que la condición de carga (*b*) controla en el centro de la luz del panel *C*. Los diagramas de momento para las dos condiciones que controlan se ilustran en la figura 13.13*a*. De acuerdo con el Código ACI, la sección crítica en los apoyos interiores puede tomarse en la cara de éstos, pero a no más de $0.175l_1$ desde el centro de la columna. El primer criterio controla en este caso y el momento negativo de diseño se calcula restándole al momento negativo en el centro del apoyo el área bajo el diagrama de cortante entre la línea central y la cara del apoyo para la condición de carga (*a*). El diagrama de cortante para la condición de carga (*a*) se presenta en la figura 13.13*b*, y los momentos de diseño ajustados son los de la figura 13.13*a*.

TABLA 13.5
Momentos en un sistema de piso tipo placa plana

Panel	**B**		**C**		**B**	
Unión	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**
(*a*) 346 lb/pie² sobre todos los paneles						
Momentos de empotramiento	+307	−307	+307	−307	+307	−307
Momentos finales	+139	−359	+328	−328	+359	−139
Momento en la luz de *C*			132			
(*b*) 176 lb/pie² en el panel *B* y 304 lb/pie² en el panel *C*						
Momentos de empotramiento	+156	−156	+270	−270	+156	−156
Momentos finales	+59	−229	+253	−253	+229	−59
Momento en la luz en *C*			152			
(*c*) 304 lb/pie² en los paneles *B* (izquierdo) y *C* y 176 lb/pie² en el panel *B* (derecha)						
Momentos de empotramiento	+270	−270	+270	−270	+156	−156
Momentos finales	+120	−325	+306	−235	+220	−62
Momentos en la luz en *C*			134			

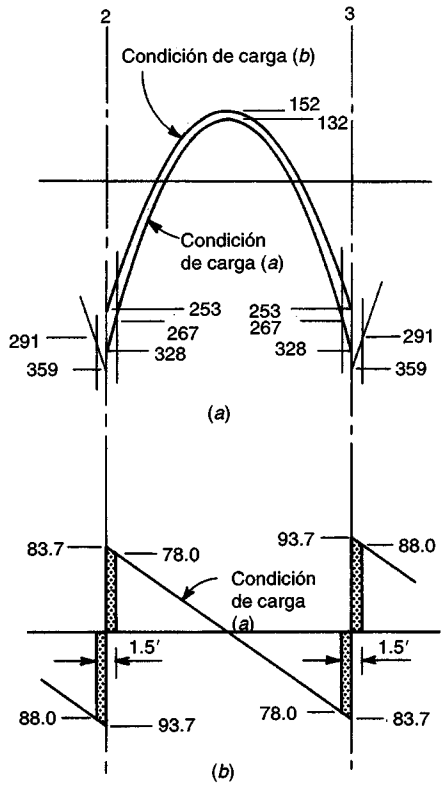


FIGURA 13.13
Momentos y cortantes de diseño para un piso tipo placa plana: (*a*) momentos; (*b*) cortantes.

TABLA 13.6
Diseño del refuerzo de una placa plana

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
	Ubicación	M_u, klb-pie	b, pulg	d, pulg	$M_u \times 12/b$, klb-pie/pie	ρ	A_s, pulg^2	Cantidad y tamaño de las barras
Franja de columna	Negativa	218	132	7	19.82	0.0081	7.48	17 No. 6
	Positiva	91	132	7	8.27	0.0032	2.96	10 No. 5
Las dos medias franjas centrales	Negativa	73	132	7	6.64	0.0026	2.40	8 No. 5
	Positiva	61	132	7	5.55	0.0021	1.94	8 No. 5[a]

a Número de barras controlado por los requisitos de espaciamiento máximo.

Debido a que la profundidad efectiva será la misma para todos los paneles y ya que el acero negativo para el panel *C* continuará a través de la zona del apoyo para convertirse en el acero negativo en los paneles *B*, el mayor de los momentos negativos encontrado en los paneles *B* será el que controle el diseño. Según esto, el momento negativo de diseño es 291 klb-pie y el momento positivo de diseño es 12 klb-pie[2]†.

Los momentos se distribuirán lateralmente a lo ancho de la losa de acuerdo con la tabla 13.2; esto indica que el 75 por ciento del momento negativo se asignará a la franja de columna y el 60 por ciento del momento positivo se aplicará a la misma. El diseño del refuerzo de la losa se resume en la tabla 13.6.

Otros aspectos importantes del diseño de placas planas incluyen el diseño a cortante por punzonamiento en las columnas, que puede requerir refuerzo a cortante suplementario, y la transferencia de momentos desbalanceados a las columnas, que exigen barras adicionales a flexión en la región de flexión negativa de las franjas de columna o un ajuste en el espaciamiento del acero negativo. Estos aspectos son de especial importancia en columnas exteriores y en las de esquina, como las que aparecen en la figura 13.12. La transferencia de cortantes y momentos en las columnas se analizará respectivamente en las secciones 13.6 y 13.7.

e. Análisis del pórtico equivalente mediante computador

Es claro que el método del pórtico equivalente, como lo describe el Código ACI y su comentario, está orientado hacia análisis manuales utilizando el procedimiento de la distribución de momentos. Actualmente, en la mayor parte de las oficinas se hace uso de computadores y el estudio de pórticos se realiza con programas de propósito general basados en el método directo de la rigidez. Se pueden utilizar programas de análisis de pórticos planos para el análisis de losas con base en los conceptos del método del pórtico equivalente, pero el pórtico debe modelarse de manera especial. Los momentos de inercia variables a lo largo del eje de las vigas losa y de las columnas requieren la definición de puntos nodales (uniones continuas) entre las secciones donde I se considera constante (es decir, en la losa en la zona de unión entre ésta y el ábaco, entre el ábaco y el capitel, y en las columnas en la parte inferior de los capiteles). Adicionalmente es necesario calcular K_{ec} para cada columna y luego estimar el valor equivalente del momento de inercia de la columna.

Opcionalmente, es posible realizar un análisis tridimensional del pórtico, en el cual pueden incluirse en forma directa las propiedades de torsión de las vigas transversales de apoyo. Una tercera opción es hacer uso de programas de computador especialmente desarrollados, dentro de los

† De acuerdo con el Código ACI 13.7.7, cuando los sistemas de losas que cumplen las restricciones del método de diseño directo se hacen mediante el método del pórtico equivalente, los momentos resultantes de diseño pueden reducirse proporcionalmente de manera que la suma de los momentos positivos y del promedio de los negativos en una luz no sea mayor que M_o calculado por el método de diseño directo de acuerdo con la ecuación (13.1). No existe una base teórica para lo anterior. La reducción es menor que el cinco por ciento en este ejemplo y no se incluirá en los cálculos de diseño.

cuales el más utilizado es "ADOSS-Analysis and Design of Reinforced Concrete Slab Systems", que desarrolló la Portland Cement Association. Existen además otros programas disponibles según la sección 11.4*c*.

13.6 DISEÑO A CORTANTE EN PLACAS Y Llosas PLANAS

Cuando las losas en dos direcciones están apoyadas directamente sobre columnas, como ocurre con las losas y placas planas, o cuando las losas sostienen cargas concentradas, como en el caso de zapatas, el cortante cerca de las columnas es de vital importancia. Ensayos realizados sobre estructuras de placa plana indican que, en muchos casos prácticos, la capacidad del sistema está regida por cortante (ver la referencia 13.13).

a. Losas sin refuerzo especial a cortante

Dos tipos de cortante pueden ser críticos en el diseño de losas planas, placas planas o zapatas. El primero es el ya conocido cortante por acción de viga, que lleva a fallas por tensión diagonal. Este análisis considera que la losa actúa como una viga ancha, extendiéndose entre los apoyos suministrados por las franjas perpendiculares de columna y es aplicable en particular a losas largas y delgadas o a zapatas. Una grieta diagonal potencial se extiende en un plano a través del ancho total l_2 de la losa; la sección crítica se toma a una distancia d de la cara de la columna o capitel. Al igual que para vigas, la resistencia a cortante de diseño ϕV_c debe ser al menos igual a la resistencia requerida V_u para las cargas mayoradas. La resistencia a cortante nominal V_c se debe calcular, bien sea mediante la ecuación (4.12*a*) o la (4.12*b*), con $b_w = l_2$ en este caso.

Como alternativa, puede ocurrir una falla a cortante *por punzonamiento con la grieta* diagonal potencial formando una superficie de cono o pirámide truncadas alrededor de la columna, del capitel o del ábaco, como se ilustra en la figura 13.14*a*. La superficie de falla se extiende desde la parte inferior de la losa, en el apoyo, hacia arriba en la dirección diagonal hasta la superficie superior. El ángulo de inclinación con la horizontal, θ (ver la figura 13.14*b*), depende de la naturaleza y de la cantidad del refuerzo en la losa. Éste puede variar entre 20° y 45° aproximadamente. La sección crítica a cortante se toma en dirección perpendicular al plano de la losa y a una distancia $d/2$ desde la periferia del apoyo, como se indica. La fuerza cortante V_u que debe resistir puede calcularse como la carga mayorada total sobre el área limitada por las líneas centrales de los paneles alrededor de la columna, menos la carga aplicada dentro del área definida por el perímetro crítico a cortante, a no ser que deban transferirse momentos significativos de la losa a la columna (ver la sección 13.7).

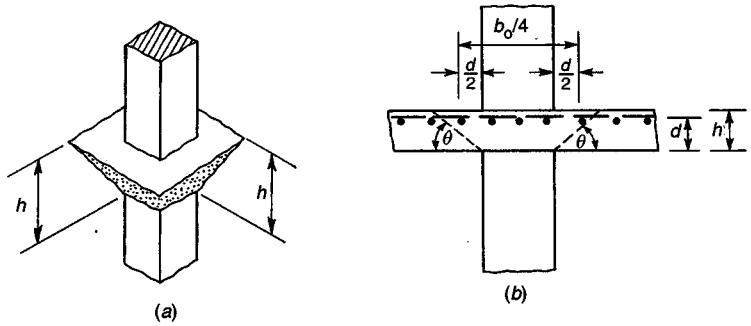


FIGURA 13.14
Superficie de falla definida que genera el cortante por punzonamiento.

En esta sección, además de los esfuerzos cortantes y de los esfuerzos horizontales de compresión ocasionados por el momento flector negativo, se hace presente un esfuerzo de compresión vertical o un poco inclinado debido a la reacción de la columna. La presencia simultánea de compresiones en direcciones vertical y horizontal aumenta la resistencia a cortante del concreto. Para losas apoyadas sobre columnas con una relación entre los lados largo y corto no mayor que 2, los ensayos indican que la resistencia nominal a cortante puede tomarse igual a

$$V_c = 4\sqrt{f'_c}b_o d \tag{13.11a}$$

de acuerdo con el Código ACI 11.12.2, donde b_o es igual al perímetro a lo largo de la sección crítica.

Sin embargo, para losas apoyadas sobre columnas muy rectangulares, se encuentra que la resistencia a cortante estimada con la ecuación (13.11*a*) no es conservadora. De acuerdo con los ensayos publicados en la referencia 13.14, el valor de V_c se aproxima a $2\sqrt{f'_c}b_o d$ a medida que β_c, la relación entre los lados largo y corto de la columna, se hace muy grande. Con base en estos datos, el Código ACI 11.12.2 establece además que V_c para cortante por punzonamiento no debe ser mayor que

$$V_c = \left(2 + \frac{4}{\beta_c}\right)\sqrt{f'_c}b_o d \tag{13.11b}$$

La variación del coeficiente de resistencia a cortante, regulado por las ecuaciones (13.11*a*) y (13.11*b*), se ilustra en la figura 13.15 como una función de β_c.

Otros ensayos publicados en la referencia 13.15 demuestran que la resistencia a cortante V_c disminuye a medida que la relación entre el perímetro crítico y el espesor efectivo de la losa, b_o/d, aumenta. Según esto, el Código ACI 11.12.2 establece que V_c para cortante por punzonamiento no debe tomarse mayor que

$$V_c = \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2\right)\sqrt{f'_c}b_o d \tag{13.11c}$$

donde α_s es 40 para las columnas interiores, 30 para las columnas de borde y 20 para las de esquina, es decir, columnas que tienen secciones críticas con cuatro, tres o dos lados respectivamente.

Así, de acuerdo con el Código ACI, la resistencia a cortante por punzonamiento de losas y zapatas debe tomarse como la menor entre los valores de V_c determinados por las ecuaciones (13.11*a*), (13.11*b*) y (13.11*c*). La resistencia de diseño se toma igual a ϕV_c, como es usual, donde $\phi = 0.85$ para cortante. El requisito básico es entonces $V_u \leq \phi V_c$.

Para columnas con una sección transversal no rectangular, el Código ACI indica que el perímetro b_o debe ser de la mínima longitud pero sin aproximarse a menos de $d/2$ del perímetro del área de reacción. La manera de definir el perímetro crítico b_o y la relación β_c para estas configuraciones irregulares de apoyo se ilustra en la figura 13.16.

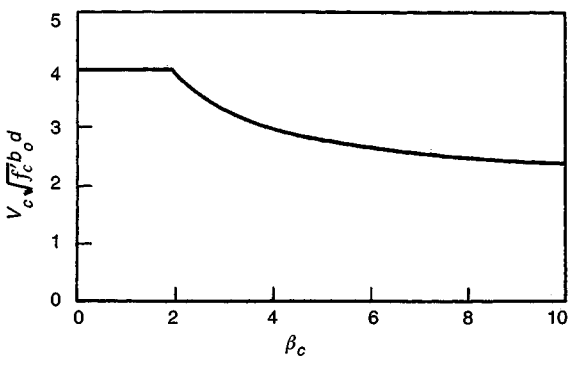


FIGURA 13.15
Coeficiente de resistencia a cortante para placas planas en función de la relación β_c entre los lados largo y corto del apoyo.

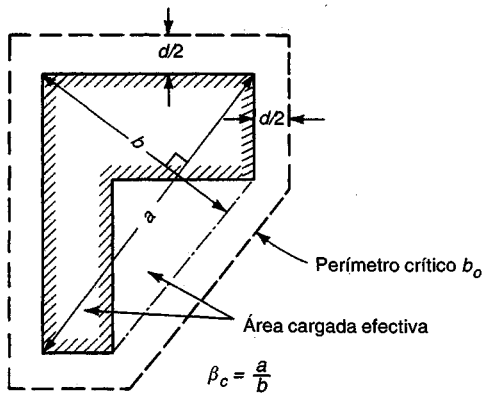


FIGURA 13.16
Cortante por punzonamiento para columnas de forma irregular.

b. Tipos de refuerzo a cortante

A menudo se utiliza refuerzo a cortante especial en los apoyos de las placas planas y algunas veces también en los de las losas planas. Éste puede tener diversas configuraciones; algunos de los tipos más comunes se ilustran en la figura 13.17.

Los *conectores de cortante* que aparecen en (*a*) y (*c*) constan de perfiles estándares de acero estructural embebidos en la losa y que se prolongan más allá de las columnas; éstos ayudan a aumentar el perímetro efectivo b_o de la sección crítica a cortante, y pueden contribuir a la resistencia a flexión negativa de la losa. El refuerzo mostrado en (*a*) es particularmente adecuado para columnas de concreto; consta de longitudes cortas de vigas en forma de I o de vigas de ala ancha, cortadas y soldadas en los puntos de intersección de modo que los brazos sean continuos a través de la columna. El refuerzo negativo normal en la losa pasa sobre la parte superior del perfil estructural, mientras que las barras inferiores se interrumpen justo contra los conectores. Las barras de la columna pasan verticalmente por las esquinas sin interferencia. La efectividad de este tipo de conectores de cortante se ha documentado muy bien mediante ensayos en los laboratorios de la Portland Cement Association (ver la referencia 13.16). La disposición de los canales mostrada en (*c*) es muy similar en su funcionamiento, pero está adaptada para utilizarse con columnas de acero. La distribución de barras dobladas en (*b*) es apropiada para aplicarse con columnas de concreto. Las barras se doblan generalmente a 45° a través de la grieta potencial de tensión diagonal y se extienden a lo largo de la parte inferior de la losa una distancia suficiente para desarrollar su resistencia por adherencia. El collar con aletas de (*d*) está diseñado principalmente para ser utilizado en construcción de losas izadas (ver el capítulo 20) y consta de una platina plana inferior con elementos verticales de rigidización; puede incorporar los agujeros para las barras de izaje y se emplea por lo general en forma conjunta con cojinetes de cortante soldados directamente a las superficies de la columna por debajo del collar para transferir la reacción vertical.

Otro tipo de refuerzo a cortante se ilustra en la figura 13.17*e*, donde se utilizan estribos verticales junto con barras horizontales suplementarias que salen radialmente de los apoyos en dos direcciones perpendiculares, para conformar las llamadas *vigas integrales* que se encuentran totalmente dentro del espesor de la losa; estas vigas actúan de la misma manera general que los conectores de cortante de las figuras 13.17*a* y *c*. Un anclaje adecuado para los estribos es difícil en losas con espesores menores de aproximadamente 10 pulg. En todos los casos deben utilizarse estribos en forma de aros cerrados con una barra horizontal de diámetro grande en cada punto de doblez, y los estribos deben terminar en un gancho estándar (ver la referencia 13.17).

Un desarrollo reciente consiste en el refuerzo mediante espigos de cortante que se presenta en la figura 13.17*f*. Éstos constan de espigos de cabeza grande soldados a bandas de acero. Durante la construcción, las bandas se apoyan en asientos de alambre para mantener el recubrimiento de concreto requerido en la parte inferior de la losa por debajo de la banda, y el recubrimiento usual se

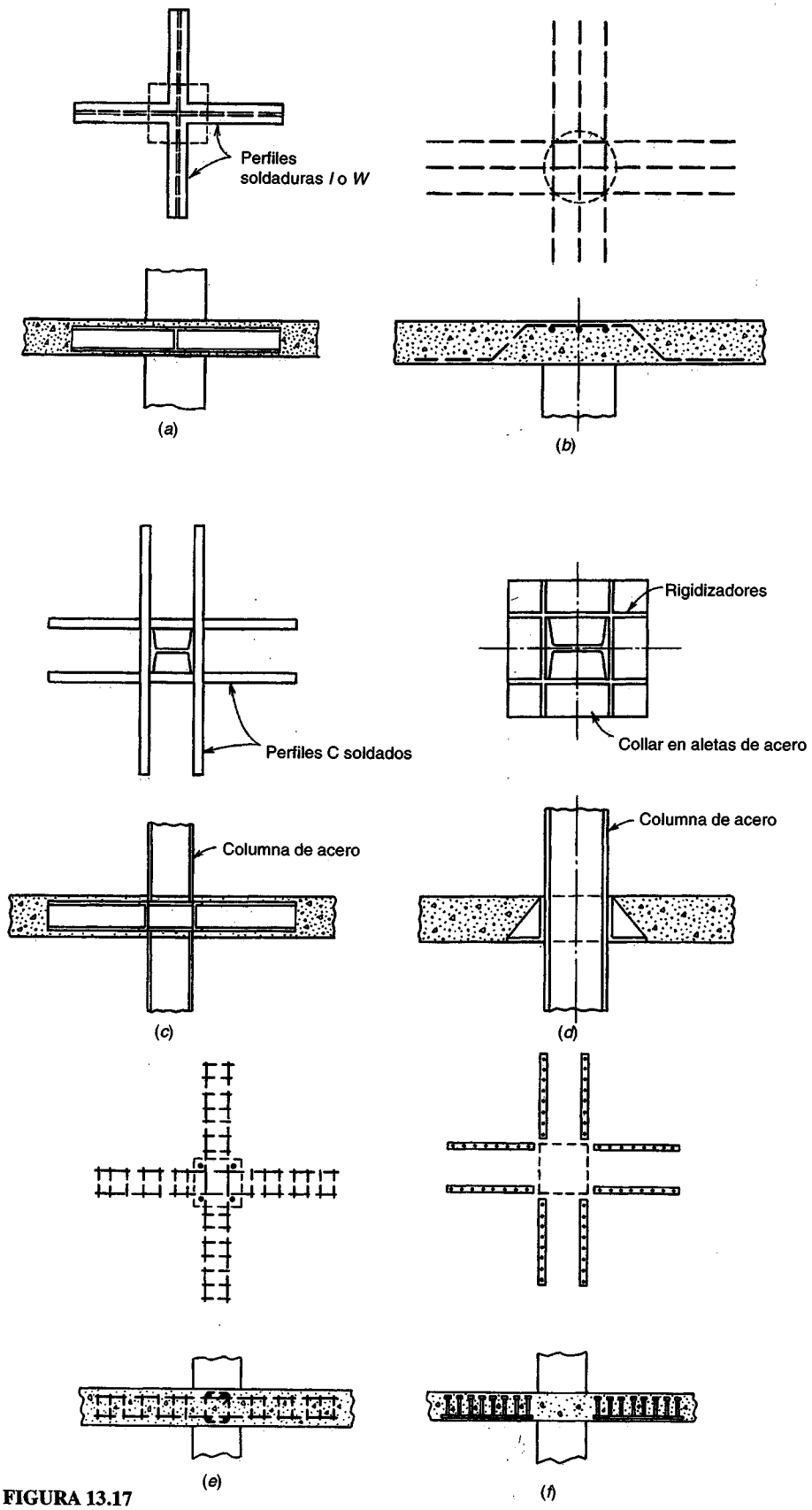


FIGURA 13.17
Refuerzo a cortante para placas planas.

mantiene sobre la parte superior de la cabeza del espigo. Gracias al anclaje efectivo suministrado por la cabeza del espigo y por la banda de acero, estos dispositivos son más eficientes, según los ensayos, que el refuerzo con barras dobladas o el de viga integral (ver las referencias 13.18 y 13.19). Además, pueden colocarse con mayor facilidad y menos interferencia con los otros refuerzos, que otros tipos de refuerzo a cortante.

c. Diseño del refuerzo con barras dobladas

Si se utiliza el refuerzo a cortante conformado por barras (figura 13.17*b*), el valor límite para la resistencia nominal a cortante V_n, calculada en la sección crítica a $d/2$ de la cara del apoyo, puede incrementarse hasta $6\sqrt{f'_c}\,b_o d$ de acuerdo con el Código ACI 11.12.3. Como consecuencia del agrietamiento diagonal, la resistencia a cortante del concreto, V_c, se reduce a $2\sqrt{f'_c}\,b_o d$, y se debe proporcionar refuerzo para que resista el cortante en exceso por encima de ϕV_c. El área total de las barras A_v que atraviesan la sección crítica con un ángulo de pendiente α se obtiene igualando la componente vertical de la fuerza en el acero a la fuerza cortante en exceso que debe absorberse:

$$\phi A_v f_y \operatorname{sen}\alpha = V_u - \phi V_c$$

Cuando el refuerzo a cortante inclinado se dobla todo a la misma distancia del apoyo, $V_s = A_v f_y \operatorname{sen}\alpha$ no debe exceder $3\sqrt{f'_c}\,b_o d$, según el Código ACI 11.5.6. El área requerida de refuerzo a cortante se encuentra transponiendo la ecuación anterior:

$$A_v = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi f_y \operatorname{sen}\alpha} \tag{13.12}$$

Deben investigarse secciones sucesivas a distancias crecientes del apoyo y proveerse refuerzo donde V_u exceda el valor de ϕV_c determinado mediante la ecuación (13.11)†. Únicamente las tres cuartas partes centrales de la porción inclinada de las barras dobladas pueden considerarse efectivas para resistir el cortante; además, debe suministrarse la longitud completa de desarrollo, más allá de la ubicación del esfuerzo máximo en el acero, que se supone ocurre a una distancia igual a la mitad del espesor de la losa, o sea $d/2$.

Ejemplo 13.3. Diseño de las barras de refuerzo para cortante por punzonamiento. Un piso de placa plana tiene un espesor $h = 7\frac{1}{2}$ pulg y está apoyado en columnas cuadradas de 18 pulg de lado espaciadas a 20 pies entre centros en cada una de las direcciones. El piso va a soportar una carga mayorada total de 350 lb/pie^2. Verifique la capacidad de la losa para resistir el cortante por punzonamiento en una columna típica interior y proporcione el refuerzo a cortante, si se necesita, utilizando barras dobladas similares a las de la figura 13.17*b*. Puede utilizarse una profundidad efectiva promedio de d = 6 pulg. Las resistencias de los materiales son f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2.

† El código ACI 11.12.3 y el Comentario del ACI 11.12.3 resultan ambiguos con respecto al valor de V_c que debe utilizarse en losas tipo placa plana por fuera de la zona donde se requiere refuerzo a cortante. En general, para losas en que no se requiere refuerzo a cortante, V_c se calcula a partir de las ecuaciones (3.11), con V_c igual a $4\sqrt{f'_c}\,b_o d$ en la mayoría de los casos. Cuando se proporcione refuerzo a cortante, el cortante límite puede incrementarse hasta el máximo de $6\sqrt{f'_c}\,b_o d$; sin embargo, el refuerzo cortante debe diseñarse para soportar toda la fuerza cortante por encima de θV_c con $V_c = 2\sqrt{f'_c}\,b_o d$. Esto parece implicar que la reducción de V_c a la mitad de su valor normal aplica únicamente donde la fuerza se comparte entre el concreto y el acero de refuerzo y que, en la zona en la cual no se requiere refuerzo cortante, puede utilizarse la totalidad de la contribución del concreto $4\sqrt{f'_c}\,b_o d$. Los ejemplos 13.3 y 13.5 que se presentan más adelante, se han preparado con base en este criterio. La interpretación alterna consiste en que si se requiere refuerzo a cortante en la columna, entonces la contribución del concreto se reduce a $2\sqrt{f'_c}\,b_o d$ en toda la losa. Esta interpretación más conservadora podría adoptarse en muchos casos sin un incremento significativo en los costos, debido al rápido incremento en el valor de V_c con la distancia desde la columna como resultado del aumento en el perímetro de corte de concreto b_o, al igual que la reducción de la fuerza neta V_u.

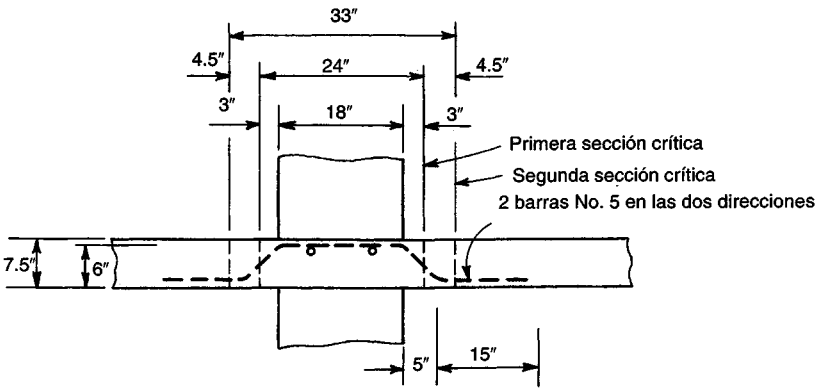


FIGURA 13.18
Barras de refuerzo para cortante por punzonamiento en una losa tipo placa plana.

Solución. La primera sección crítica para cortante por punzonamiento está ubicada a una distancia $d/2 = 3$ pulg de la cara de la columna y proporciona un perímetro de cortante $b_o = 24 \times 4 = 96$ pulg. Con base en el área tributaria del piso cargado, el cortante mayorado es

$$V_u = 350(20^2 - 2^2) = 139{,}000 \text{ lb}$$

y, si no se utiliza refuerzo a cortante, la resistencia de diseño de la losa, controlada por la ecuación (13.11*a*), es

$$\phi V_c = 0.85 \times 4\sqrt{4000} \times 96 \times 6 = 124{,}000 \text{ lb}$$

confirmando así que sí se requiere refuerzo a cortante. Se utilizarán barras dobladas a 45° en dos direcciones, como se indica en la figura 13.18. Cuando la resistencia a cortante está suministrada por una combinación de refuerzo y de concreto, la contribución del concreto se reduce a

$$\phi V_c = 0.85 \times 2\sqrt{4000} \times 96 \times 6 = 62{,}000 \text{ lb}$$

y, de esta manera, el cortante V_s que debe resistir el refuerzo es

$$V_s = \frac{V_u - \phi V_c}{\phi} = \frac{139{,}000 - 62{,}000}{0.85} = 90{,}600 \text{ lb}$$

Este valor está por debajo del máximo permisible de $3\sqrt{4000} \times 96 \times 6 = 109{,}000$ lb. El área de barras requerida se encuentra entonces a partir de la ecuación (13.12) y es

$$A_v = \frac{90{,}600}{60{,}000 \times 0.707} = 2.14 \text{ pulg}^2$$

Se utilizará un total de cuatro barras (dos en cada dirección) y, considerando que ocho ramas atraviesan la sección crítica, el área necesaria por barra es $2.14/8 = 0.27$ pulg^2. Se utilizarán barras No. 5 como se señala en la figura 13.18. El límite superior de $V_n = 6\sqrt{f'_c}b_o d$ se satisface automáticamente en este caso, dado el límite más riguroso sobre V_s.

Con barras dobladas a 45° y efectivas a través de las tres cuartas partes centrales de la longitud inclinada, la siguiente sección crítica está aproximadamente a tres cuartos de la profundidad efectiva, o sea, a 4.5 pulg más allá de la primera sección como se ilustra, lo cual da un perímetro de cortante de $33 \times 4 = 132$ pulg. El cortante mayorado en esta sección crítica es

$$V_u = 350(20^2 - 2.75^2) = 137{,}000 \text{ lb}$$

y la capacidad de diseño del concreto es

$$\phi V_c = 0.85 \times 4\sqrt{4000} \times 132 \times 6 = 170{,}000 \text{ lb}$$

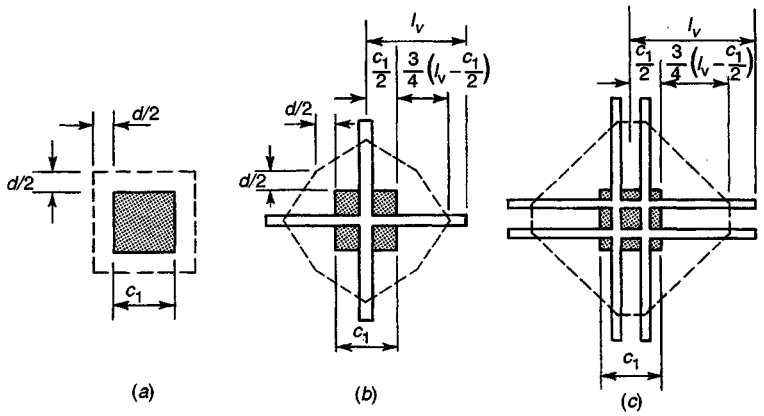


FIGURA 13.19
Secciones críticas a cortante para placas planas: (*a*) sin conectores de cortante; (*b*) con conectores de cortante pequeños; (*c*) con conectores de cortante grandes.

confirmando que no se necesitan barras dobladas adicionales. Las barras No. 5 se prolongarán a lo largo de la parte inferior de la losa en una longitud de desarrollo completa de 15 pulg como aparece en la figura 13.18.

d. Diseño del refuerzo mediante conectores de cortante

Cuando se utilizan perfiles embebidos de acero estructural, como se indica en las figuras 13.17*a* y *c*, el valor límite de V_n puede incrementarse hasta $7\sqrt{f'_c}b_o d$. Este tipo de conector de cortante, siempre y cuando sea suficientemente rígido y fuerte, tiene el efecto de desplazar la sección crítica alejándola de la columna, como aparece en la figura 13.19. De acuerdo con el Código ACI 11.12.4, la sección crítica atraviesa cada brazo del conector de cortante en un punto distante a tres cuartos de su proyección más allá de la cara de apoyo y se define de modo que el perímetro sea mínimo. Ésta no necesita acercarse a menos de $d/2$ de la cara del apoyo.

El efecto de desplazar hacia afuera la sección crítica de esta manera suministra el doble beneficio de incrementar el perímetro efectivo b_o y de disminuir la fuerza cortante total para la cual debe diseñarse la losa. El cortante nominal V_n en la nueva sección crítica no debe tomarse mayor que $4\sqrt{f'_c}b_o d$, de acuerdo con el Código ACI 11.12.4.

Los ensayos publicados en la referencia 13.16 indican que a lo largo de la mayor parte de un brazo del conector de cortante, el cortante es constante y, además, que la parte del cortante total que toma el brazo del conector es proporcional a α_v, y su rigidez a flexión relativa, comparada con la de la sección circundante de concreto:

$$\alpha_v = \frac{E_s I_s}{E_c I_c} \tag{13.13}$$

La sección de concreto se toma con un ancho efectivo de $c_2 + d$ donde c_2 es el ancho del apoyo medido en la dirección perpendicular a la del brazo. Las propiedades se calculan para la sección fisurada transformada, incluyendo el conector de cortante. La observación con respecto a que el cortante es esencialmente constante, al menos hasta la carga de agrietamiento diagonal, implica que la reacción se concentra principalmente en el extremo del brazo. Así que, si el cortante total en el apoyo es V y si el conector de cortante tiene η brazos idénticos (por lo general $\eta = 4$ para conectores de cortante en columnas interiores), la fuerza cortante constante en cada brazo es igual a $\alpha_v V/\eta$.

Si la carga se incrementa más allá de la que produce el agrietamiento diagonal justo alrededor de la columna, los ensayos indican que la fuerza cortante en exceso, por encima del cortante de agrietamiento V_c la toma principalmente el conector de cortante de acero, y que la fuerza cortante

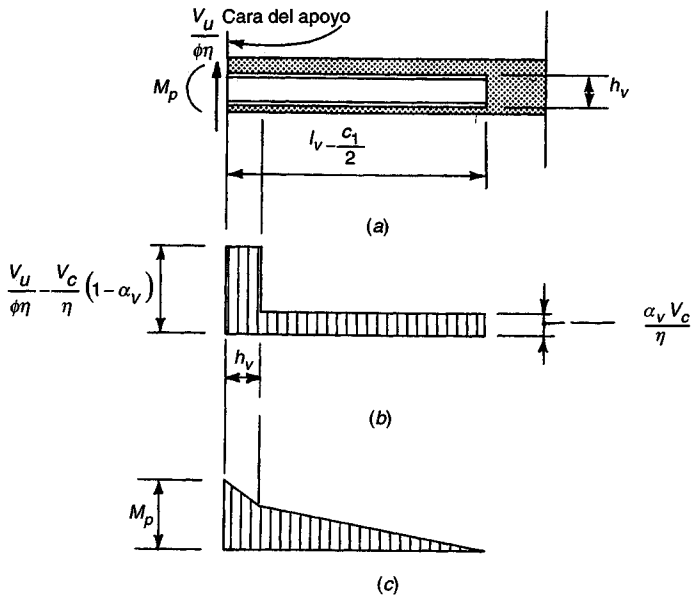


FIGURA 13.20
Esfuerzos resultantes en el brazo del conector de cortante: (*a*) brazo del conector de cortante; (*b*) cortante; (*c*) momento.

en el brazo dentro de una distancia desde la cara de la columna igual a h_v, la altura del brazo, tiene un valor prácticamente constante mayor que $\alpha_v V/\eta$. Este valor aumentado es casi igual al cortante total en cada brazo, $V_u/\phi\eta$, menos el cortante tomado por el concreto parcialmente fisurado. Este último término es igual a $(V_c/\eta)(1-\alpha_v)$, con el cual se obtiene el diagrama idealizado de cortante de la figura 13.20*b*.

El diagrama de momentos de la figura 13.20*c* se obtiene mediante integración del diagrama de cortante. Si V_c es igual a $V_n/2 = V_u/2\phi$, como lo indican los ensayos realizados sobre conectores de cortante con dimensiones corrientes, se puede confirmar que el momento plástico M_p en la cara del apoyo, para el cual se debe calcular la dimensión del brazo conector de cortante, es

$$M_p = \frac{V_u}{2\phi\eta}\left[h_v + \alpha_v\left(l_v - \frac{c_1}{2}\right)\right] \tag{13.14}$$

ecuación en la cual el coeficiente de reducción de capacidad ϕ se toma igual a 0.90 para flexión.

De acuerdo con el Código ACI 11.12.4, el valor de α_v debe ser al menos igual a 0.15; se ha demostrado que conectores de cortante más flexibles son ineficaces. El ala a compresión no debe estar a más de 0.3*d* de la superficie inferior de la losa y el perfil de acero utilizado no debe tener una altura mayor que 70 veces el espesor del alma.

Para el diseño a flexión de la losa, los momentos encontrados en los centros de los apoyos con el método del pórtico equivalente se reducen a los momentos en la cara del apoyo, sección que se supone es la crítica para momento. Mediante el método directo los momentos en las caras de los apoyos se calculan con la luz libre. Cuando se utilizan los conectores de cortante, éstos tienen el efecto de reducir todavía más el momento de diseño en las franjas de columna, aumentando el ancho efectivo del apoyo. Esta reducción es proporcional a la parte de la carga tomada por el conector de cortante y a su tamaño, y puede estimarse conservadoramente (ver las figuras 13.20*b* y *c*) mediante la expresión

$$M_v = \frac{\phi\alpha_v V_u}{2\eta}\left(l_v - \frac{c_1}{2}\right) \tag{13.15}$$

donde $\phi = 0.90$. De acuerdo con el Código ACI 11.12.4, la reducción no puede ser mayor que el 30 por ciento del momento de diseño total para la franja de columna en la losa o mayor que el cambio en el momento de la franja de columna en la distancia l_v, o mayor que el valor de M_p dado por la ecuación (13.14).

Una cantidad limitada de información de ensayos relacionados con conectores de cortante en los bordes de losas indica que el comportamiento puede ser sustancialmente diferente por los efectos de torsión, entre otros. Si se van a utilizar conectores de cortante en una columna de borde o de esquina, debe darse atención especial al anclaje del acero embebido dentro de la columna. Puede ser preferible la utilización de vigas de borde o de un borde de losa en voladizo.

Ejemplo 13.4. Diseño del refuerzo mediante conectores de cortante. Una losa tipo placa plana de $7\frac{1}{2}$ pulg de espesor está soportada por columnas cuadradas de 10 pulg y reforzada a flexión negativa con barras No. 5 espaciadas a 5 pulg entre centros en cada una de las direcciones, con una profundidad efectiva promedio d igual a 6 pulg. La resistencia del concreto f'_c es 3000 lb/pulg^2. La losa debe transferir un cortante último V_u de 113,000 lb a la columna. ¿Qué tipo especial de refuerzo requiere la losa sobre la columna, en caso de necesitarse, para transferir el cortante último requerido?

Solución. La resistencia nominal a cortante en la sección crítica a $d/2$ de la cara de la columna se encuentra a partir de la ecuación (13.11*a*) y es

$$V_c = 4\sqrt{3000} \times 64 \times 6 = 84.1 \text{ klb}$$

y $\phi V_c = 0.85 \times 84.1 = 71.5$ klb. Este valor es menor que $V_u = 113$ klb, lo cual indica que se requiere refuerzo a cortante. Se utilizará un conector de cortante similar al de la figura 13.17*a*, fabricado con una sección de viga I con $f_y = 36$ klb/pulg^2. Si se mantiene una distancia libre de $\frac{3}{4}$ de pulg por debajo de este acero, el espacio libre de las barras en la parte superior de la losa permite la utilización de una viga I de $4\frac{5}{8}$ pulg de altura; se utilizará entonces una sección con altura nominal de 4 pulg. Con este refuerzo, el límite superior del cortante V_n en la sección crítica es $7\sqrt{3000}(64 \times 6) = 147$ klb y $\phi V_n = 0.85 \times 147 = 125$ klb, muy por encima del valor de V_u que debe resistirse. El perímetro requerido b_o se puede determinar estableciendo $V_u = \phi V_c$, donde V_c está determinando por la ecuación (13.11*a*):

$$b_o = \frac{V_u}{4\phi\sqrt{f'_c}d} = \frac{113{,}000}{4 \times 0.85\sqrt{3000} \times 6} = 101 \text{ pulg}$$

(Observe que la fuerza cortante real que debe transferirse en la sección crítica es ligeramente menor que 113 klb porque parte de la carga del piso está dentro del perímetro efectivo b_o; sin embargo, la diferencia es pequeña excepto para el caso de conectores de cortante muy grandes.) La longitud proyectada l_v que se requiere para el brazo del conector de cortante se encuentra por geometría, con b_o expresado en términos de l_v:

$$b_o = 4\sqrt{2}\left[\frac{c_1}{2} + \frac{3}{4}\left(l_v - \frac{c_1}{2}\right)\right] = 101 \text{ pulg}$$

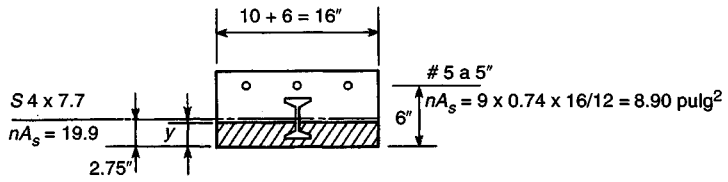


FIGURA 13.21
Sección efectiva de la losa.

a partir de lo cual l_v = 22.2 pulg. Para determinar el módulo plástico de la sección requerido para el brazo de cortante es necesario suponer un valor tentativo de la rigidez relativa α_v. Después de seleccionar un valor tentativo de 0.25, la capacidad requerida a momento se encuentra a partir de la ecuación (13.14):

$$M_p = \frac{113{,}000}{8 \times 0.90}[4 + 0.25(22.2 - 5)] = 130{,}000 \text{ lb-pulg}$$

Una viga I estándar S4 × 7.7, con esfuerzo de fluencia de 36 klb/pulg^2, tiene una resistencia de 126,000 lb-pulg y se adoptará tentativamente. El valor de E_sI_s de esta viga es 174 × 10^6 lb-pulg^2. La sección transversal efectiva de la franja de losa aparece en la figura 13.21. Si se toman momentos de la sección compuesta fisurada con respecto a la superficie inferior para localizar el eje neutro, se obtiene

$$y = \frac{8.90 \times 6 + 19.9 \times 2.75 + 8y^2}{8.90 + 19.9 + 16y}$$

a partir de lo cual y = 2.29 pulg. El momento de inercia de la sección compuesta es

$$I_c = 1/3 \times 16 \times 2.29^3 + 8.90 \times 3.71^2 + 6 \times 9 + 19.9 \times 0.46^2 = 244 \text{ pulg}^4$$

la rigidez a flexión de la franja de losa compuesta efectiva es

$$E_cI_c = 3.1 \times 10^6 \times 244 = 756 \times 10^6 \text{ lb-pulg}^2$$

y a partir de la ecuación (9.13),

$$\alpha_v = \frac{174}{756} = 0.23$$

Este valor es mayor que el mínimo especificado de 0.15 y está cerca del 0.25 supuesto anteriormente. El valor revisado de M_p es

$$M_p = \frac{113{,}000}{8 \times 0.90}[4 + 0.23(22.2 - 5)] = 122{,}000 \text{ lb-pulg}$$

La viga de 4 pulg es adecuada. La longitud calculada l_v de 22.2 pulg se aumentará a 24 pulg por razones prácticas. La reducción en el momento de la franja de columna en la losa puede basarse en esta longitud real. A partir de la ecuación (13.15),

$$M_v = \frac{0.90 \times 0.23 \times 113{,}000}{8}(24 - 5) = 55{,}600 \text{ lb-pulg}$$

Este valor es menor que M_p, como lo exige la especificación, y también debe ser menor que el 30 por ciento, del momento negativo de diseño en la franja de columna y menor que el cambio en el momento de la franja de columna en la distancia l_v.

e. Diseño de vigas integrales con estribos verticales

Los conectores de cortante en acero del tipo descrito en la sección 13.6*d* no han sido utilizados ampliamente, en especial por su costo, pero también por la dificultad en la colocación del refuerzo a flexión de la losa para lograr su paso por las secciones de acero estructural y por la interferencia con el acero de la columna. El refuerzo a cortante conformado por barras dobladas de la sección 13.6*c* es menos costoso, pero lleva a una congestión complicada del refuerzo en la zona de la unión entre la columna y la losa. El refuerzo a cortante que consta de estribos verticales para conformar *vigas integrales*, como se ilustra en la figura 13.17*e*, evita muchas de estas dificultades.

La primera sección crítica para diseño a cortante en la losa se toma a $d/2$ de la cara de la columna, como es usual, y los estribos, si se necesitan, se extienden hacia afuera desde la columna en las cuatro direcciones para el caso de una columna interior típica (en tres o dos direcciones

para columnas exteriores o de esquina, respectivamente), hasta que el concreto solo sea capaz de resistir el cortante, con $V_c = 4\sqrt{f'_c}b_o d$ en la segunda sección crítica†. Dentro de la región adyacente a la columna, donde la resistencia a cortante la suministra una combinación de concreto y de acero, la resistencia a cortante nominal V_n no debe exceder $6\sqrt{f'_c}b_o d$, según el Código ACI 11.12.3. En esta región, la contribución del concreto se reduce a $V_c = 2\sqrt{f'_c}b_o d$. La segunda sección crítica cruza cada viga integral a una distancia $d/2$ medida hacia afuera desde el último estribo y está localizada de modo que su perímetro b_o sea mínimo (es decir, para el caso típico, se define mediante líneas a 45° entre las vigas integrales). El espaciamiento requerido para los estribos verticales se encuentra con la ecuación (4.14*a*) del capítulo 4.

El problema de anclaje del refuerzo a cortante en placas planas delgadas es crítico, y siempre se deben proporcionar estribos en forma de aros cerrados que terminen en ganchos estándares y barras interiores en las esquinas para mejorar la resistencia al desgarramiento.

Ejemplo 13.5. Diseño de una viga integral con estribos verticales. La losa de placa plana de 7.5 pulg de espesor total y 6 pulg de espesor efectivo que aparece en la figura 13.22 está soportada por columnas cuadradas de 12 pulg, espaciadas a 15 pies entre centros en cada dirección. Una carga mayorada de 135 klb debe transferirse de la losa a una columna interior típica. Las resistencias del concreto y del acero son, respectivamente, $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. Determine si se requiere refuerzo a cortante en la losa y, si es así, diseñar vigas integrales con estribos para resistir el cortante en exceso.

Solución. La resistencia a cortante de diseño del solo concreto en la sección crítica a $d/2$ de la cara de la columna se calcula mediante la ecuación (13.11*a*), que es la que controla:

$$\phi V_c = 0.85 \times 4\sqrt{4000} \times 72 \times 6 = 92.9 \text{ klb}$$

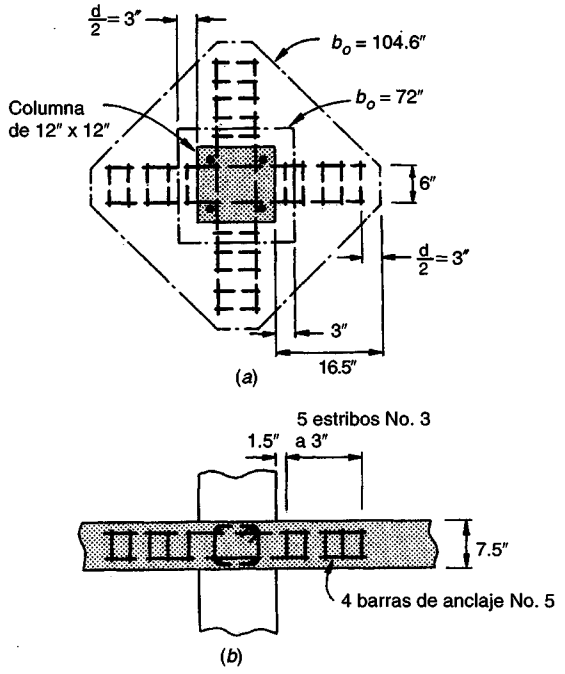


FIGURA 13.22
Refuerzo a cortante conformado por estribos verticales para la losa del ejemplo 13.5.

† Ni el Código ACI, ni su comentario hacen claridad sobre si las ecuaciones (13.11*b*) y (13.11*c*) deben aplicarse en las secciones críticas sucesivas después de la primera, inmediatamente adyacente a la columna. Las investigaciones en las que se basan estas ecuaciones consideraban únicamente la primera sección crítica en la columna. Excepto para casos extremos, la relación de dimensiones de la columna en la ecuación (13.11*b*) parece ser menos relevante al aumentar la distancia desde la columna; sin embargo, la relación b_o/d en la ecuación (13.11*c*) puede tener bastante influencia y, por tanto, esta ecuación podría aplicarse en forma conservadora.

Este valor es menor que $V_u = 135$ klb, lo que indica que sí se requiere el refuerzo cortante. En este caso, la máxima resistencia de diseño que permite el Código ACI es

$$\phi V_n = 0.85 \times 6\sqrt{4000} \times 72 \times 6 = 139.4 \text{ klb}$$

satisfactoriamente superior al valor real de V_u. Cuando el cortante es resistido por acción conjunta del concreto y de las barras de refuerzo, la contribución del concreto se reduce a

$$\phi V_c = 0.85 \times 2\sqrt{4000} \times 72 \times 6 = 46.4 \text{ klb}$$

En forma tentativa se seleccionarán estribos verticales No. 3 en forma de aros cerrados y se distribuirán a lo largo de cuatro vigas integrales como se muestra en la figura 13.22. Así, el valor de A_v suministrado es $4 \times 2 \times 0.11 = 0.88$ pulg^2 en la primera sección crítica a una distancia de $d/2$ desde la cara de la columna y el espaciamiento requerido puede calcularse a partir de la ecuación (4.14*a*):

$$s = \frac{\phi A_v f_y d}{V_u - \phi V_c} = \frac{0.85 \times 0.88 \times 60 \times 6}{135 - 46.4} = 3.04 \text{ pulg}$$

Sin embargo, el espaciamiento máximo de $d/2 = 3$ pulg controla en este caso y se utilizarán entonces estribos No. 3 con un espaciamiento constante de 3 pulg. En otros casos, el espaciamiento de los estribos puede aumentarse con la distancia desde la columna, a medida que el cortante en exceso sea menor, aunque esto complicaría la colocación del refuerzo y ahorraría, por lo general, muy poco acero.
El perímetro requerido para la segunda sección crítica, en la cual el concreto solo puede resistir el cortante, se encuentra con base en la ecuación (13.11*a*) que es la que controla:

$$\phi V_c = 0.85 \times 4\sqrt{4000} \times b_o \times 6 = 135{,}000 \text{ lb}$$

a partir de lo cual el perímetro mínimo es $b_o = 104.6$ pulg. Se puede confirmar fácilmente que esto requiere una proyección mínima de la sección crítica más allá de la cara de la columna de 14.25 pulg. Serán suficientes cinco estribos con un espaciamiento constante de 3 pulg, el primero colocado a $s/2 = 1.5$ pulg de la cara de la columna, como se indica en la figura 13.22; esto proporciona un perímetro b_o en la segunda sección crítica de $(16.5\sqrt{2} + 6) \times 4 = 117$ pulg, valor que excede el requerido.

Se proporcionarán cuatro barras longitudinales No. 5 en la parte interna de las esquinas de cada uno de los estribos en forma de aro cerrado, como se señala, para proveer un anclaje adecuado al refuerzo a cortante.

f. Diseño del refuerzo mediante espigos de cortante

El refuerzo a cortante en losas, que consta de vigas integrales con estribos, como se describió en la sección 13.6*e*, es posiblemente el tipo de refuerzo más utilizado en la actualidad. Sin embargo, el armazón conformado por los estribos y por las barras de anclaje longitudinales puede ser difícil de instalar. También, la zona de unión entre losa y columna queda un poco congestionada con el acero de la losa (superior e inferior), dirigido en dos direcciones perpendiculares, con barras verticales en la columna y con estribos. La congestión puede convertirse en un aspecto crítico cuando la losa tiene aberturas, las cuales se requieren a menudo en o cerca de las caras de las columnas.

Las bandas de refuerzo con espigos de cortante, como las que aparecen en las figuras 13.17*f*, 13.23*a* y 13.23*b*, se han utilizado ampliamente en Alemania, Suiza y Canadá (ver las referencias 13.18 y 13.19). Éstas se mencionan brevemente en el comentario del Código ACI R11.12.3, aunque no se incluye ninguna disposición específica de diseño. Su uso en los Estados Unidos ha ido creciendo.

Estos dispositivos se componen de barras verticales con cabezas de anclaje en la parte superior, soldadas a una banda de acero en la parte inferior. Bandas múltiples se distribuyen en dos direcciones perpendiculares para columnas cuadradas y rectangulares o usualmente en direcciones radiales para columnas circulantes; se fijan en su posición dentro de las formaletas antes de la colocación del acero a flexión superior e inferior. La banda de acero descansa sobre apoyos en varillas para mantener el recubrimiento de concreto necesario por debajo del acero y se mantiene en su posición mediante puntillas que pasan por huecos en la banda.

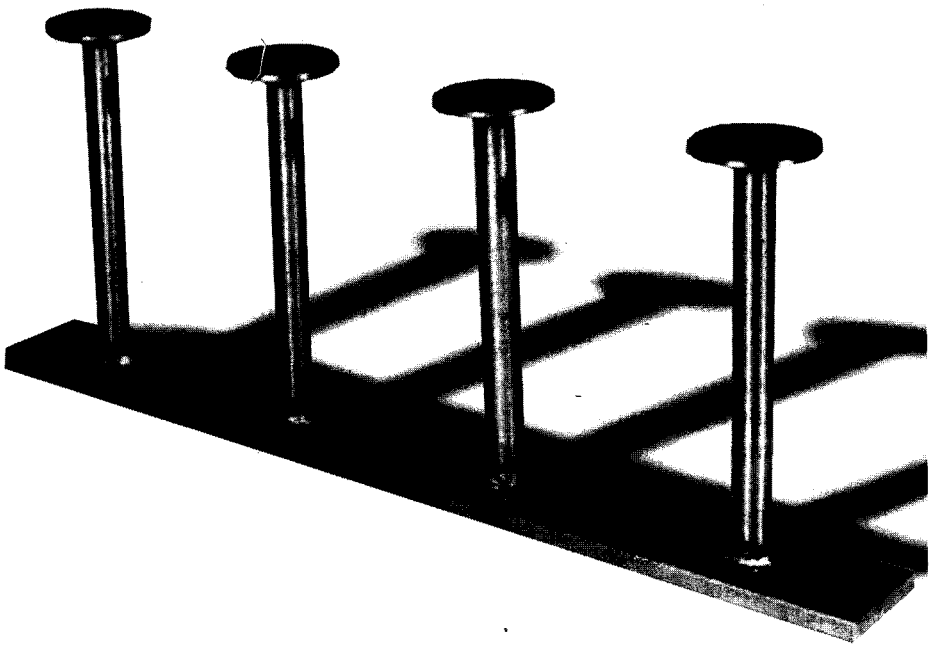


FIGURA 13.23*a*
Espigos de cortante para refuerzo de losas de concreto: disposición de los espigos de cortante.

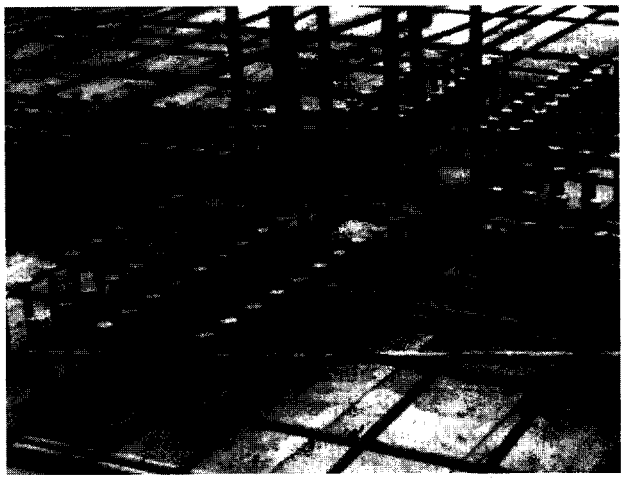


FIGURA 13.23*b*
Espigos de cortante para refuerzo de losas de concreto: refuerzo a cortante instalado en las formaletas para una losa preesforzada de concreto.

Para efectos de diseño, un espigo individual se considera equivalente a una rama vertical de un estribo. El diseño puede llevarse a cabo siguiendo el procedimiento general ilustrado en la sección 13.6*e* para refuerzo a cortante consistente en estribos. Sin embargo, con base en muchos ensayos (ver las referencias 13.20 y 13.21) se han propuesto algunas modificaciones. Ghali (ver las referencias 13.18 y 13.19) recomienda lo siguiente:

1. El límite superior para el esfuerzo cortante nominal a $d/2$ de la cara de la columna se aumenta a $8\sqrt{f'_c}b_o d$.

2. El espaciamiento admisible entre los espigos se incrementa a valores entre $2d/3$ y $3d/4$, dependiendo del esfuerzo cortante nominal máximo para las cargas mayoradas.
3. Dentro de la zona reforzada a cortante, la contribución del concreto se incrementa a $3\sqrt{f'_c}b_o d$

Además de lo anterior, Ghali recomienda los siguientes detalles:

(a) Los anclajes superiores deben tener la forma de platinas circulares o cuadradas cuyas áreas deben ser al menos diez veces el área del vástago.
(b) Cuando las platinas de anclaje superiores y las bandas inferiores son de espesor uniforme, éste debe ser mayor o igual a la mitad del diámetro del espigo.
(c) Si el espesor de la platina de anclaje superior disminuye hacia los extremos, el espesor de la conexión con el vástago debe ser mayor o igual a $\frac{2}{3}$ el diámetro del espigo.
(d) El ancho de la banda inferior debe ser mayor o igual a 2.5 veces el diámetro del espigo.
(e) Las bandas de anclaje inferiores deben estar alineadas con las caras de las columnas cuadradas o rectangulares.
(f) En la dirección paralela a la cara de la columna, la distancia entre bandas de anclaje no debe exceder el doble del espesor efectivo de la losa.
(g) El recubrimiento mínimo de concreto por encima y por debajo de las bandas con espigos es el mismo que se especifica para barras en losas y no debe exceder el mínimo más $\frac{1}{2}$ diámetro de barra del refuerzo a flexión.

En las referencias 13.22 y 13.23 pueden encontrarse recomendaciones adicionales relativas al uso de refuerzo mediante espigos de cortante para columnas exteriores y de esquina, donde siempre se presentan problemas especiales debido a la falta de simetría, perímetro reducido de la sección crítica y momentos no balanceados relativamente grandes.

13.7 TRANSFERENCIA DE MOMENTOS A LAS COLUMNAS

El análisis para cortante por punzonamiento en placas planas y en losas planas que se presentó en la sección 13.6 suponía que la fuerza cortante V_u era resistida por esfuerzos cortantes uniformemente distribuidos alrededor del perímetro b_o de la sección crítica, a una distancia igual a $d/2$ de la cara de la columna de apoyo. La resistencia a cortante nominal V_c se calculaba con las ecuaciones (13.11*a*, *b* o *c*).

Cuando deben transferirse momentos significativos de la losa a las columnas, como los que resultan de las cargas gravitacionales no balanceadas en un lado de una columna o de las cargas horizontales producidas por viento o por efectos sísmicos, el esfuerzo cortante en la sección crítica no presenta una distribución uniforme.

La situación puede modelarse como aparece en la figura 13.24*a*. Allí V_u representa la reacción vertical total que debe transferirse a la columna y M_u representa el momento no balanceado que debe transferirse, los dos para cargas mayoradas. La fuerza vertical V_u genera esfuerzos cortantes distribuidos más o menos uniformemente alrededor del perímetro de la sección crítica, como se supuso antes, que se representan con el par de flechas verticales interiores que actúan hacia abajo. El momento no balanceado M_u produce cargas adicionales en la unión; éstas se representan con el par de flechas verticales exteriores que aumentan los esfuerzos cortantes presentes por otros efectos en el lado derecho del esquema y que disminuyen a su vez estos esfuerzos en el lado izquierdo.

Ensayos realizados indican que, para columnas cuadradas, aproximadamente el 60 por ciento del momento no balanceado se transfiere por flexión (fuerzas T y C en la figura 13.24*a*) y casi el 40 por ciento por esfuerzos cortantes en las caras de la sección crítica (ver la referencia 13.24). Para columnas rectangulares, resulta razonable suponer que la porción que se transfiere por flexión aumenta a medida que se incrementa el ancho de la sección crítica que resiste el momento, es

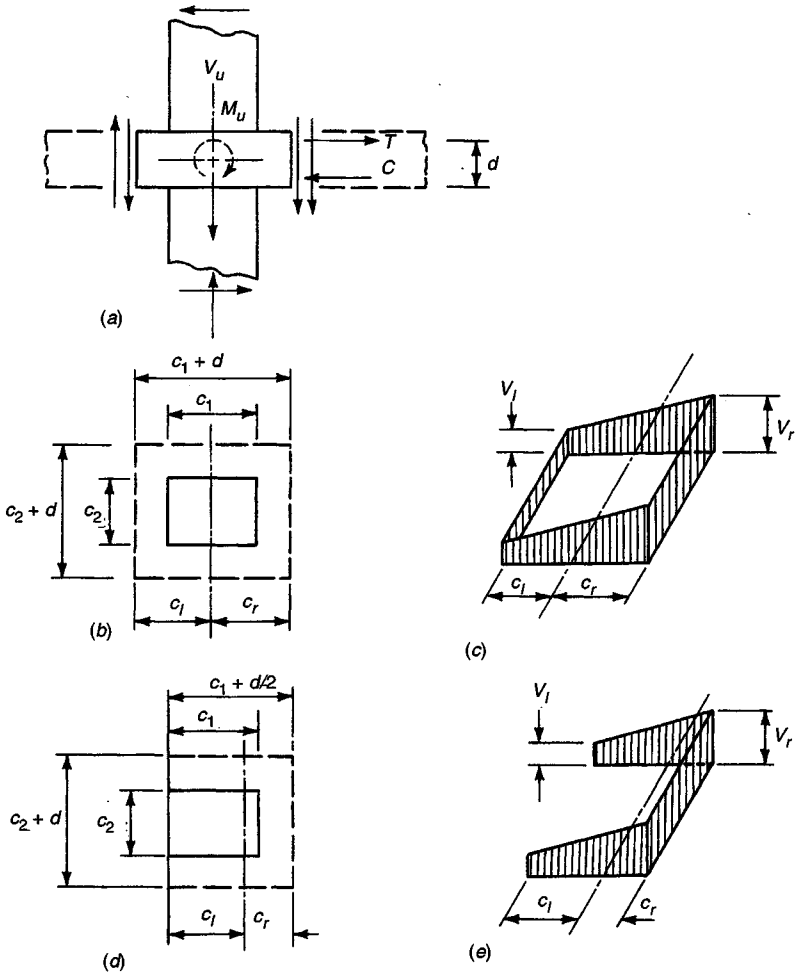


FIGURA 13.24
Transferencia de momentos de la losa a la columna: (*a*) fuerzas resultantes de cargas verticales y de momentos no balanceados; (*b*) sección crítica para una columna interior; (*c*) distribución de esfuerzos cortantes para una columna interior; (*d*) sección crítica para una columna de borde; (*e*) distribución de esfuerzos cortantes para una columna de borde.

decir, a medida que $c_2 + d$ es mayor con relación a $c_1 + d$ en la figura 13.24*b*. De acuerdo con el Código ACI 13.5.3, el momento que se considera que se transfiere por flexión es

$$M_{ub} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{(c_1 + d)/(c_2 + d)}} M_u \qquad (13.16a)$$

mientras que el que se supone que se transfiere por cortante, según el Código ACI 11.12.6, es

$$M_{uv} = \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{(c_1 + d)/(c_2 + d)}}\right] M_u \qquad (13.16b)$$

Se observa que para una columna cuadrada estas ecuaciones indican que el 60 por ciento del momento no balanceado se transfiere por flexión y el 40 por ciento por cortante, de acuerdo con los datos disponibles. Si c_2 es muy grande con relación a c_1, casi todo el momento se transfiere por flexión.

El momento M_{ub} puede absorberse concentrando una parte considerable del refuerzo de la franja de columna de la losa cerca de la columna. De acuerdo con el Código ACI 13.5.3, este acero debe colocarse dentro de un ancho limitado por líneas situadas1.5*h* a cada lado de la columna o del capitel, donde h es el espesor total de la losa o del ábaco.

El momento M_{uv}, simultáneamente con la reacción vertical transferida a la columna, produce esfuerzos cortantes que se supone varían linealmente con la distancia desde el centroide de la sección crítica, como se indica para una columna interior en la figura 13.24*c*. Los esfuerzos pueden calcularse a partir de

$$v_l = \frac{V_u}{A_c} - \frac{M_{uv}c_l}{J_c} \tag{13.17a}$$

$$v_r = \frac{V_u}{A_c} + \frac{M_{uv}c_r}{J_c} \tag{13.17b}$$

donde A_c = área de la sección crítica = $2d[(c_1 + d) + (c_2 + d)]$
c_1, c_r = distancias del centroide de la sección crítica a las respectivas caras izquierda y derecha de la sección
J_c = propiedad de la sección crítica análoga al momento polar de inercia

La cantidad J_c puede calcularse a partir de

$$J_c = \frac{2d(c_1 + d)^3}{12} + \frac{2(c_1 + d)d^3}{12} + 2d(c_2 + d)\left(\frac{c_1 + d}{2}\right)^2 \tag{13.18}$$

Observe que utilizar el parámetro J_c en la forma de un momento polar de inercia, implica que los esfuerzos cortantes indicados en las caras cercana y lejana de la sección crítica en la figura 13.24*c* tienen componentes tanto horizontales como verticales.

De acuerdo con el Código ACI 11.12.6, los esfuerzos cortantes máximos que se calculan con la ecuación (13.17) no deben exceder ϕv_n. Para losas sin refuerzo a cortante, $\phi v_n = \phi V_c / b_o d$, donde V_c es el menor de los valores determinados por las ecuaciones (13.11*a*), (13.11*b*) o (13.11*c*). Para losas con refuerzo a cortante diferente de los conectores de cortante, $\phi v_n = \phi(V_c + V_s)/b_o d$, donde V_c y V_s son como se establecieron en las secciones 13.6*c*, *e* o *f*. Cuando se utilice refuerzo mediante conectores de cortante (ver la sección 13.6d), la suma de los esfuerzos cortantes por cargas verticales sobre la segunda sección crítica cerca del extremo de los brazos de los conectores de cortante, y los esfuerzos cortantes que resultan de la transferencia de momento con respecto al centroide de la primera sección crítica a $d/2$ de las caras de los apoyos, no debe exceder $4\phi\sqrt{f'_c}$. Como soporte a lo anterior, el comentario del Código ACI R11.12.6.3 indica que los ensayos demuestran que la primera sección crítica es apropiada para calcular los esfuerzos producidos por la transferencia de momentos aún cuando se utilicen conectores de cortante. Aunque las secciones críticas para transferencia de cortante directo y de cortante generado por transferencia de momentos son diferentes, ellas coinciden o están muy próximas en las esquinas de las columnas donde se inicia la falla, y es conservador tomar el cortante máximo como la suma de las dos componentes.

El Código ACI 13.5.3.3 permite un aumento en la cantidad de momento no balanceado que se supone se transfiere por flexión, con una disminución correspondiente en la cantidad transferida por cortante, siempre y cuando se realice una reducción especificada en la capacidad a cortante admisible en el soporte.

Pueden desarrollarse ecuaciones similares a las anteriores para las columnas de borde que se ilustran en las figuras 13.24*d* y *e*, o para una columna de esquina. Observe que aunque las distancias centroidales c_l y c_r son iguales para la columna interior, esto no es cierto para la columna de borde de la figura 13.24*d* ni para una columna de esquina.

De acuerdo con el Código ACI 13.6.3.6 cuando se utilice el método directo de diseño, el momento que debe transferirse entre la losa y una columna de borde por cortante debe tomarse igual a $0.30M_o$, donde M_o se encuentra a partir de la ecuación (13.1). Esto tiene el propósito de compensar la asignación de una alta proporción del momento estático a las regiones de momento positivo y negativo interior de acuerdo con la tabla 13.1, y para garantizar una adecuada resistencia

a cortante entre la losa y la columna de borde, donde el momento no balanceado es alto y el ancho de la sección crítica se reduce.

Cuando una placa o una viga transfieren momentos a una columna también introducen cortante en ésta, lo cual es evidente a partir de la figura 13.24*a*. Este cortante debe considerarse en el diseño del refuerzo transversal de la columna.

Como se indicó en la sección 13.6, la mayoría de las estructuras tipo placa plana, si están sobrecargadas, fallan en la región cercana a la columna, donde deben transferirse grandes fuerzas cortantes y momentos flectores. Gran cantidad de investigaciones recientes se han adelantado para proyectarlas al desarrollo de detalles mejorados de diseño para esta región. El ingeniero de diseño debe consular las referencias 13.24, 13.25 y 13.26 para obtener más información específica.

13.8 ABERTURAS EN LOSAS

Casi invariablemente, los sistemas de losa deben incluir aberturas. Éstas pueden ser de tamaño considerable cuando se requieren para escaleras o núcleos de ascensores, o más pequeñas como las necesarias para conductos ascendentes de calefacción, plomería, ventilación, drenajes de pisos o cubiertas y compuertas de acceso.

Casi siempre, las aberturas relativamente pequeñas no tienen efectos perjudiciales en *losas apoyadas en vigas*. Como regla general, a ambos lados de la abertura debe adicionarse un refuerzo equivalente al refuerzo interrumpido. Además, deben incluirse otras barras diagonales en las esquinas para controlar el agrietamiento que ocurrirá casi inevitablemente en estos sitios. El efecto de las aberturas pequeñas en *losas apoyadas directamente sobre columnas* (losas y placas planas) depende de la localización de la abertura con respecto a las columnas. Desde el punto de vista estructural, ellas quedan mejor localizadas lejos de las columnas, preferiblemente en el área de intersección entre las franjas centrales de la losa. Infortunadamente, consideraciones arquitectónicas y funcionales obligan habitualmente a que se localicen cerca de las columnas. En este caso, la principal preocupación es la reducción del perímetro efectivo para cortante porque estos sistemas de piso comúnmente son críticos a cortante.

Según el Código ACI 11.12.5, si la abertura está cerca de la columna (dentro de diez espesores de losa o en las franjas de columna), debe considerarse como no efectiva la parte de b_o incluida dentro de las líneas radiales que se proyectan de la abertura al centroide de la columna. Si en estas circunstancias se utilizan conectores de cortante (ver la sección 13.6*d*), la reducción en el ancho de la sección crítica se encuentra del mismo modo, excepto que sólo es necesario deducir la mitad del perímetro incluido dentro de las líneas radiales.

Con respecto a los requisitos de flexión, debe suministrarse la cantidad total de acero que exigen los cálculos, independientemente de las aberturas. Cualquier acero interrumpido por huecos debe compensarse con una cantidad equivalente de refuerzo suplementario a cada uno de los lados, adecuadamente traslapado para transferir los esfuerzos por adherencia. También debe mantenerse el área a compresión de concreto para proveer la resistencia requerida; por lo general, esto será restrictivo sólo cerca de las columnas. Según el Código ACI 13.4.2, pueden localizarse aberturas de cualquier tamaño en la zona de intersección de franjas centrales. En el área de intersección de franjas de columna, las aberturas no pueden interrumpir más de un octavo del ancho de la franja de columna en cada dirección. En el área común entre una franja central y una franja de columna, las aberturas no pueden interrumpir más de un cuarto del refuerzo en cada franja.

El Código ACI 13.4.1 permite aberturas de *cualquier* tamaño si mediante análisis se puede demostrar que la resistencia de la losa es por lo menos igual a la requerida y que se cumplen todas las condiciones de funcionamiento, es decir, los límites de agrietamiento y de deflexión. En el capítulo 15 se describe en detalle el *método de las franjas* para análisis y diseño de aberturas en losas, con el cual se utilizan vigas integrales especialmente *reforzadas o bandas* fuertes con espesor igual al de la losa para enmarcar las aberturas. Las aberturas muy grandes deben enmarcarse preferiblemente con vi-

gas o bandas de losa de espesor aumentado para restaurar, tanto como sea posible, la continuidad de la losa. Las vigas deben diseñarse para soportar una porción de la carga del piso, además de las cargas aplicadas directamente por muros de partición, vigas de soporte de ascensores o losas de escaleras.

13.9 CÁLCULO DE DEFLEXIONES

Las deflexiones de una placa plana, losa plana o losa en dos direcciones apoyada sobre vigas en los ejes de columna y cargada uniformemente, pueden calcularse mediante un método de pórtico equivalente similar al de análisis de momentos descrito en la sección 13.5 (ver la referencia 13.27). La definición de franjas de columna y centrales, los coeficientes de distribución de momentos longitudinales y transversales, y muchos otros detalles, son los mismos que para el estudio de momentos. Una vez que se realiza el cálculo de las deflexiones mediante este método, éstas pueden compararse directamente con valores límites como los de la tabla 6.3, que son aplicables tanto a losas como a vigas, de acuerdo con el Código ACI.

En la figura 13.25 se expone una región de losa limitada por los ejes de columnas. Aunque no se muestran las vigas en los ejes de columnas, ni los ábacos, ni los capiteles de columna, la presencia de cualquiera de estos elementos no presenta complicaciones fundamentales.

Para el cálculo de deflexiones se considera la deformación en cada una de las direcciones independientemente, después de lo cual se suman las contribuciones de las dos direcciones para obtener la deflexión total en cualquier punto de interés.

Con respecto a la figura 13.25*a*, se considera que la losa actúa como una viga ancha y delgada cuyo ancho es igual a la dimensión del panel l_y y cuya luz es l_x. Inicialmente se considera que la losa descansa en líneas de apoyo rígidas en $x = 0$ y $x = l_x$. A causa de las variaciones de momento y de rigidez a flexión a través del ancho de la losa, todas las franjas unitarias en la dirección X no se deformarán de igual manera. Generalmente, la curvatura de la losa en la región de la franja central será menor que la de las franjas de columna porque los momentos de la franja central son menores. El resultado es como se indica en la figura 13.25*a*.

En seguida, la losa se analiza para flexión en la dirección Y (ver la figura 13.25*b*). De nuevo se observan los efectos de la variación transversal del momento flector y de la rigidez a flexión.

La forma deflectada real del panel se representa en la figura 13.25*c*. La deflexión en el centro del panel es la suma de la deflexión en el centro de la luz de la franja de columna en una dirección y la de la franja central en la otra dirección; es decir,

$$\Delta_{\max} = \Delta_{cx} + \Delta_{my} \tag{13.19a}$$

o

$$\Delta_{\max} = \Delta_{cx} + \Delta_{mx} \tag{13.19b}$$

Para calcular las deflexiones del panel de losa en cada una de las direcciones, es conveniente suponer primero que se deforma en una superficie cilíndrica, lo cual sería cierto si los momentos flectores en todas las secciones estuvieran distribuidos uniformemente a través del ancho del panel y si se suprimiera la flexión lateral del mismo. Los apoyos se consideran totalmente fijos contra rotación y desplazamiento vertical en este estado. De este modo, se calcula una *deflexión de referencia*:

$$\Delta_{f,\text{ref}} = \frac{wl^4}{384E_cI_{\text{pórtico}}} \tag{13.20}$$

donde w es la carga por pie a lo largo de la luz con longitud l e $I_{\text{pórtico}}$ es el momento de inercia del ancho total del panel (figura 13.26*a*) que incluye la contribución de la viga en el eje de columnas o, si existen, de los ábacos y de los capiteles de columna.

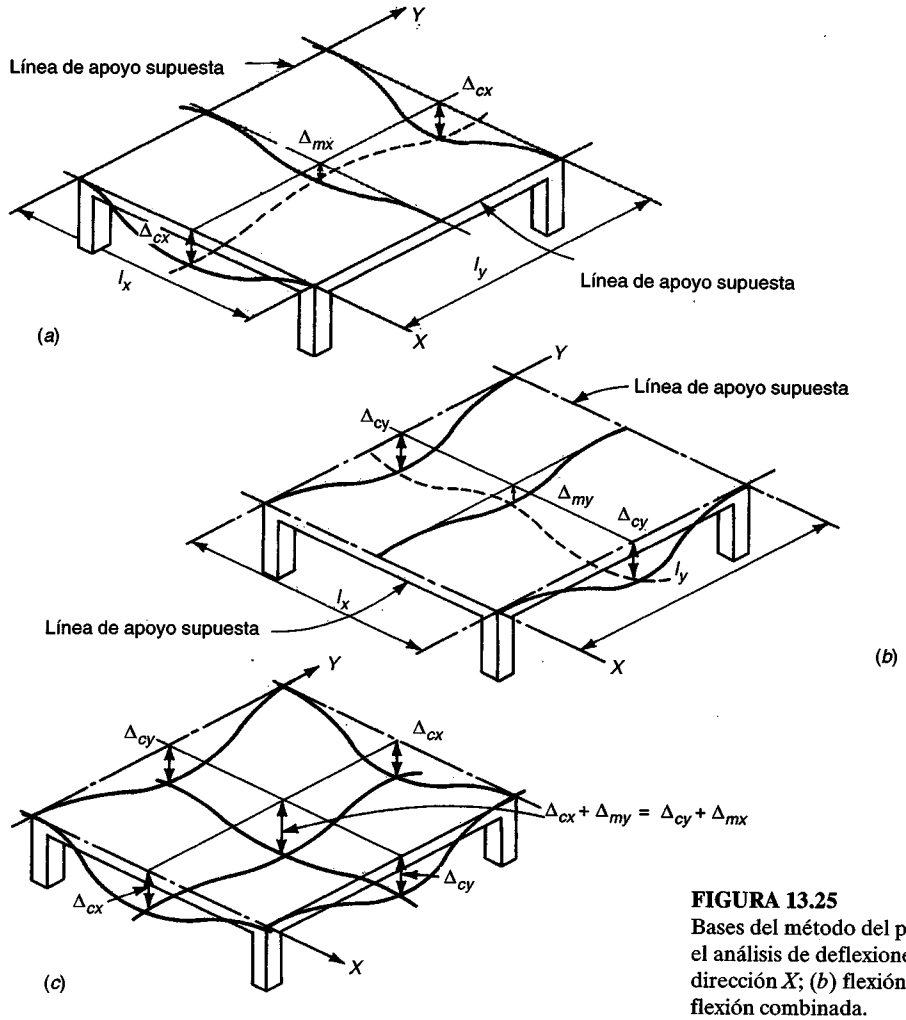


FIGURA 13.25
Bases del método del pórtico equivalente para el análisis de deflexiones: (*a*) flexión en la dirección *X*; (*b*) flexión en la dirección *Y*; (*c*) flexión combinada.

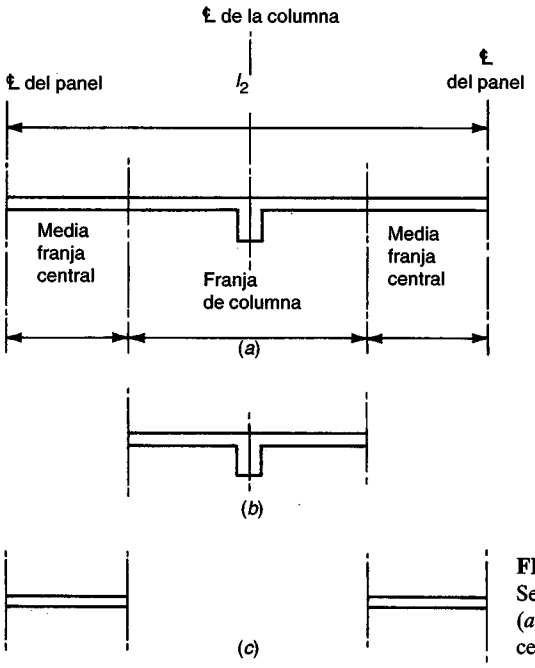


FIGURA 13.26
Secciones transversales efectivas para el cálculo de deflexiones; (*a*) ancho total del pórtico; (*b*) franja de columna; (*c*) franjas centrales.

El efecto de la variación real de los momentos a través del ancho del panel y de la variación de las rigideces por efecto de las vigas, de los espesores variables de las losas, etc., se tiene en cuenta multiplicando la deflexión de referencia por la relación entre el valor de M/EI para las franjas respectivas y aquél del ancho total del pórtico:

$$\Delta_{f,\text{col}} = \Delta_{f,\text{ref}} \frac{M_{\text{col}}}{M_{\text{pórtico}}} \frac{E_c I_{\text{pórtico}}}{E_c I_{\text{col}}} \tag{13.21a}$$

$$\Delta_{f,\text{cent}} = \Delta_{f,\text{ref}} \frac{M_{\text{cent}}}{M_{\text{pórtico}}} \frac{E_c I_{\text{pórtico}}}{E_c I_{\text{cent}}} \tag{13.21b}$$

Los subíndices relacionan la deflexión Δ, el momento flector M, o el momento de inercia I con todo el ancho del pórtico, con la franja de columna o con la franja central, como aparece en las figuras 13.26*a*, *b* y *c*, respectivamente.

Puede destacarse que las relaciones de momentos $M_{\text{col}}/M_{\text{pórtico}}$ y $M_{\text{cent}}/M_{\text{pórtico}}$ son idénticas a los factores de distribución lateral de momentos encontrados anteriormente para el análisis a flexión (ver la tabla 13.2). Una complicación menor surge del hecho de que la distribución lateral de momentos flectores, de acuerdo con el Código ACI, no es la misma en las secciones de momento negativo que en las del positivo. Sin embargo, parece que utilizar un promedio simple de los coeficientes de distribución lateral para las porciones negativa y positiva de cada franja es consistente con el grado de precisión usualmente requerido, e igualmente consistente con los métodos para el cálculo de deflexiones dados en otras partes del Código ACI.

La presencia de ábacos o de capiteles de columna en las franjas de columna de un piso tipo losa plana exige la consideración de la variación del momento de inercia en la dirección de la luz (ver la figura 13.27). En la referencia 13.28 se sugiere la utilización de un promedio ponderado del momento de inercia en estos casos:

$$I_{av} = 2\frac{l_c}{l} I_c + 2\frac{l_d}{l} I_d + \frac{l_s}{l} I_s \tag{13.22}$$

donde I_c = momento de inercia de la losa que incluye el ábaco y el capitel
I_d = momento de inercia de la losa con sólo el ábaco
I_s = momento de inercia de la sola losa

Las distancias de las luces se definen en la figura 13.27.

En seguida es necesario hacer una corrección para las rotaciones en los apoyos del pórtico equivalente, que hasta ahora se han considerado totalmente empotrados. Si los extremos de las columnas se consideran empotrados en el nivel del piso superior y en el del piso inferior, lo cual es usual en el análisis de pórticos, la rotación de la columna en el piso es

$$\theta = \frac{M_{net}}{K_{ec}} \tag{13.23}$$

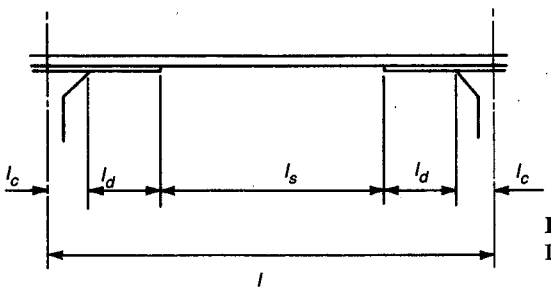


FIGURA 13.27
Luz de losa plana con momento de inercia variable.

donde θ = cambio de ángulo en radianes
M_{net} = diferencia en momentos de piso a la izquierda y a la derecha de la columna
K_{ec} = rigidez de columna equivalente (ver la sección 13.5c)

En algunos casos, la conexión entre la losa de piso y la columna transmite momentos despreciables, como en el caso de losas izadas; así que, $K_{ec} = 0$. El análisis a flexión indicaría que el momento neto es cero. La rotación en los apoyos puede encontrarse en estos casos aplicando los teoremas del área de momentos, tomando los momentos de las áreas *M/EI* con respecto al extremo más alejado de la luz y dividiendo por la longitud de luz.

Una vez se conocen las rotaciones en cada extremo, pueden calcularse las deflexiones asociadas en el centro de la luz del pórtico equivalente. Se confirma que la deflexión en el centro de la luz de un elemento que experimenta rotación de θ radianes en el extremo, cuando el extremo lejano está empotrado, es

$$\Delta_\theta = \frac{\theta l}{8} \tag{13.24}$$

Así, la deflexión total en el centro de la luz para la franja de columna o para la central es la suma de las tres partes

$$\Delta_{\text{col}} = \Delta_{f,\text{col}} + \Delta_{\theta l} + \Delta_{\theta r} \tag{13.25a}$$

$$\Delta_{\text{cent}} = \Delta_{f,\text{cent}} + \Delta_{\theta l} + \Delta_{\theta r} \tag{13.25b}$$

donde los subíndices *l* y *r* se refieren a los extremos izquierdo y derecho de la luz, respectivamente.

Los cálculos descritos se repiten para el pórtico equivalente en la segunda dirección de la estructura, y la deflexión total en el centro del panel se obtiene sumando la deflexión en la franja de columna en una dirección y la deflexión en la franja central en la otra, como lo indican las ecuaciones (13.19).

La deflexión en el centro del panel debería ser la misma si se calcula con la ecuación (13.19*a*) o con la (13.19*b*). En realidad, generalmente se obtiene una diferencia debido a la naturaleza aproximada de los cálculos. Para paneles con forma muy rectangular, la contribución principal a la deflexión en el centro del panel es la que determine la franja de columna en la dirección larga. En consecuencia, la mejor forma de encontrar la deflexión en el centro del panel es sumando la de la franja de columna en la dirección larga y la de la central en la corta. Sin embargo, para paneles exteriores, la contribución importante es la de las franjas de columna perpendiculares al borde discontinuo, aunque el lado largo del panel puede ser paralelo a este borde.

Tanto en losas como en vigas, el agrietamiento del concreto produce una reducción de la rigidez a flexión. De acuerdo con el Código ACI 9.5.3, el momento de inercia efectivo, determinado mediante la ecuación (6.8), es aplicable tanto a losas como a vigas, aunque es posible utilizar otros valores si los resultados están de acuerdo en forma razonable con los resultados de ensayos experimentales. En la mayoría de los casos, las losas en dos direcciones no presentarán fisuración para las cargas de servicio y resulta satisfactorio utilizar como base en los cálculos de deflexión el momento de inercia no fisurado I_g (ver la referencia 13.27 para la comparación con ensayos). En la referencia 13.29, Branson sugiere los siguientes refinamientos: (1) para losas sin vigas utilizar I_g para todas las deflexiones generadas por carga muerta; en el cálculo de deflexiones por carga muerta más viva, usar I_g para las franjas centrales e I_e para las franjas de columna; (2) para losas con vigas emplear I_g en todos los cálculos de deflexiones ocasionadas por carga muerta, en el cálculo de deflexiones producidas por carga muerta más viva, utilizar I_g para las franjas de columna e I_e para las franjas centrales. Para luces continuas, I_e puede basarse en el momento positivo en el centro de la luz sin que el error sea grave.

Las deflexiones calculadas utilizando el procedimiento anterior son a corto plazo. Las deflexiones a largo plazo de las losas pueden calcularse multiplicando las deflexiones a corto plazo por el factor λ de la ecuación (6.11), como en el caso de las vigas. Puesto que rara vez se utiliza

acero a compresión en las losas, se obtiene un multiplicador de 2.0. La evidencia de ensayos y la experiencia con estructuras reales indican que lo anterior puede subestimar de manera importante las deflexiones a largo plazo de las losas; por esto se recomiendan multiplicadores para deflexiones a largo plazo entre 2.5 y 4.0 (ver las referencias 13.29, 13.30 a 13.31). Un multiplicador de 3.0 genera resultados aceptables en la mayoría de los casos.

Se debe reconocer que la estimación de las deflexiones de losas, tanto elásticas iniciales como a largo plazo, es complicada por las incertidumbres asociadas con la construcción real de edificios. El historial de cargas, en particular durante la construcción, tiene un efecto profundo en las deflexiones finales (ver la referencia 13.32). Es posible que las cargas de construcción igualen o excedan la carga viva de servicio. Estas cargas pueden incluir el peso del material de construcción almacenado y, generalmente, el peso de las losas por encima de la fundida previamente, transmitido mediante el apuntalamiento y el reapuntalamiento a la losa inferior. Puesto que las cargas de construcción se aplican a losas sin edad suficiente, las deflexiones elásticas inmediatas son grandes y, una vez retiradas las cargas de construcción, la recuperación elástica es menor que la deflexión elástica inicial porque E_c aumenta con la edad. El agrietamiento que generan las cargas de construcción no desaparece con el retiro de las cargas temporales y puede resultar en deflexiones por carga viva mayores que las esperadas. Es posible que el flujo plástico durante la aplicación de las cargas de construcción sea mayor que el esperado a causa de la edad prematura del concreto cuando se somete a carga. Las deflexiones por retracción de fraguado de losas delgadas a menudo son del mismo orden de magnitud que las deflexiones elásticas y, en algunos casos, deben calcularse en forma independiente.

Es importante reconocer que para una losa tanto las deflexiones iniciales como las dependientes del tiempo están sometidas a un alto grado de variabilidad. En el mejor de los casos, las deflexiones calculadas son estimativos y, para estructuras reales, deberían esperarse desviaciones considerables con respecto a los valores calculados.

Ejemplo 13.6. Cálculo de deflexiones. Determine las deflexiones en el centro de un panel exterior típico ocasionadas por la aplicación de las cargas muerta y viva, para el piso en dos direcciones diseñado en el ejemplo 13.1. La carga viva puede considerarse como una carga a corto plazo y estará distribuida uniformemente en todos los paneles. El piso soportará elementos no estructurales que pueden dañarse si se someten a deflexiones grandes. Tomar $E_c = 3.6 \times 10^6$ lb/pulg^2.

Solución. Primero se encontrará la deflexión elástica que se genera debido al peso propio de 88 lb/pie^2, después de lo cual pueden encontrarse las deflexiones adicionales a largo plazo producidas por la carga muerta, aplicando un factor de $\lambda = 3.0$, y las deflexiones a corto plazo por carga viva de 125 lb/pie^2 mediante proporción directa.

Las secciones transversales efectivas del concreto, en las cuales se basarán los cálculos de los momentos de inercia, se muestran en la figura 13.28 para todo el ancho del pórtico, para la franja de columna y para las franjas centrales, tanto en la dirección de la luz corta como en la de la luz larga. Observar que el ancho de la franja de columna en las dos direcciones se basa en la luz más corta del panel, de acuerdo con el Código ACI. Los valores para los momentos de inercia son los siguientes:

	Dirección corta	Dirección larga
$I_{\text{pórtico}}$	27,900 pulg^4	25,800 pulg^4
I_{col}	21,000 pulg^4	21,000 pulg^4
I_{cent}	5,150 pulg^4	3,430 pulg^4

Si se calculan inicialmente las deflexiones del piso en la *dirección de la luz corta* del panel, a partir de la ecuación (13.20) la deflexión de referencia es

$$\Delta_{f,\text{ref}} = \frac{88 \times 25(20 \times 12)^4}{12 \times 384 \times 3.6 \times 10^6 \times 27{,}900} = 0.016 \text{ pulg}$$

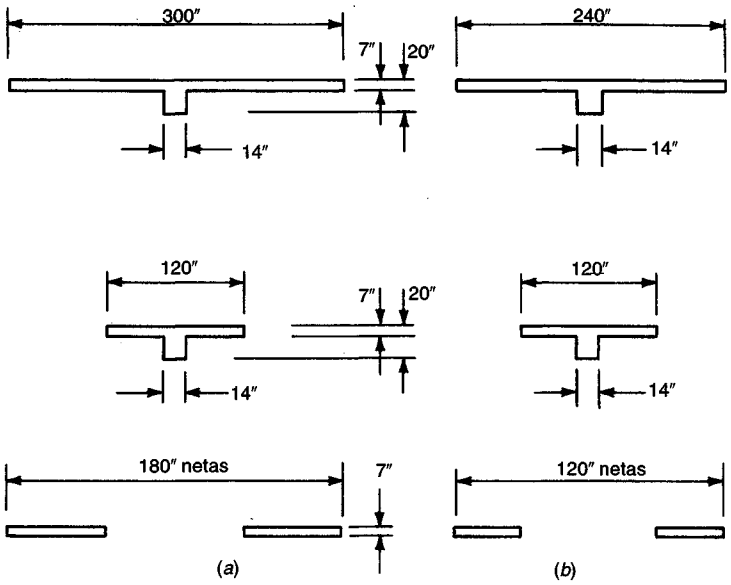


FIGURA 13.28
Dimensiones de las secciones transversales para el ejemplo de cálculo de deflexiones: (*a*) pórtico, franja de columna y franja central, en dirección de la luz corta; (*b*) pórtico, franja de columna y franja central, en dirección de la luz larga.

(Observe que en este caso se utiliza la distancia de la luz entre centros, aunque para el análisis de momentos se hizo uso de las luces libres para aproximar la reducción del momento debida al ancho del apoyo, de acuerdo con los procedimientos del Código ACI.) A partir del análisis de momentos en la dirección de la luz corta se concluyó que las franjas de columna tomaban el 68 por ciento del momento tanto en las secciones negativas como en las positivas, y las franjas centrales el 32 por ciento. Según esto, a partir de las ecuaciones (13.21*a* y *b*),

$$\Delta_{f,\text{col}} = 0.016 \times 0.68 \times \frac{27{,}900}{21{,}000} = 0.014 \text{ pulg}$$

$$\Delta_{f,\text{cent}} = 0.016 \times 0.32 \times \frac{27{,}900}{5150} = 0.028 \text{ pulg}$$

Para el panel en estudio, que es totalmente continuo en los dos apoyos en la dirección corta, se puede suponer que las rotaciones en los apoyos no son significativas; en consecuencia, $\Delta_{\theta l}$ y $\Delta_{\theta r} = 0$, y a partir de las ecuaciones (13.25*a* y *b*),

$$\Delta_{\text{col}} = 0.014 \text{ pulg}$$
$$\Delta_{\text{cent}} = 0.028 \text{ pulg}$$

Ahora, calculando las deflexiones en la *dirección larga* del panel se obtiene la siguiente deflexión de referencia:

$$\Delta_{f,\text{ref}} = \frac{88 \times 20(25 \times 12)^4}{12 \times 384 \times 3.6 \times 10^6 \times 25{,}800} = 0.033 \text{ pulg}$$

A partir del análisis de momentos se encontró que la franja de columna tendría el 93 por ciento del momento negativo exterior, el 81 por ciento del positivo y el 81 por ciento del momento negativo interior. Así que, el factor de distribución lateral promedio de la franja de columna es

$$\left(\frac{93 + 81}{2} + 81\right)\frac{1}{2} = 0.84$$

o sea el 84 por ciento, mientras que a las franjas centrales se les asigna el 16 por ciento. Entonces, con las ecuaciones (13.21*a* y *b*),

$$\Delta_{f,\text{col}} = 0.033 \times 0.84 \times \frac{25{,}800}{21{,}000} = 0.034 \text{ pulg}$$

$$\Delta_{f,\text{cent}} = 0.033 \times 0.16 \times \frac{25{,}800}{3430} = 0.040 \text{ pulg}$$

Mientras que la rotación en la columna interior puede considerarse despreciable, la de la columna exterior no. Para la carga muerta de la losa, el momento estático total es

$$M_o = 1/8 \times 0.088 \times 20 \times 25^2 = 137.5 \text{ klb-pie}$$

Se encontró que el 16 por ciento del momento estático, o sea, 22.0 klb-pie, debe asignarse a la sección del apoyo exterior. La rotación resultante se encuentra con la ecuación (13.23). Se confirma que la rigidez de la columna equivalente (ver la sección 13.5c) es $169 \times 3.6 \times 10^6$ lb-pulg/rad; de ahí que,

$$\theta = \frac{22{,}000 \times 12}{169 \times 3.6 \times 10^6} = 0.00043 \text{ rad}$$

A partir de la ecuación (13.24), la componente de la deflexión correspondiente en el centro del panel es

$$\Delta_{\theta l} = \frac{0.00043 \times 25 \times 12}{8} = 0.016 \text{ pulg}$$

Así, a partir de las ecuaciones (13.25*a* y *b*), las deflexiones de la franja de columna y de la franja central en la dirección larga son

$$\Delta_{col} = 0.034 + 0.016 = 0.050 \text{ pulg}$$

$$\Delta_{cent} = 0.040 + 0.016 = 0.056 \text{ pulg}$$

y a partir de la ecuación (13.19*a*), la deflexión a corto plazo en el centro del panel debido al peso propio es

$$\Delta_{max} = 0.050 + 0.028 = 0.078 \text{ pulg}$$

La deflexión a largo plazo que genera la carga muerta es $3.0 \times 0.078 = 0.234$ pulg y la deflexión a corto plazo por carga viva es $0.078 \times 125/88 = 0.111$ pulg.

En el presente caso, el valor límite establecido por el ACI es de 1/480 veces la luz, o $20 \times 12/480 = 0.500$ pulg, con base en la suma de la deflexión a largo plazo por las cargas sostenidas y las deflexiones instantáneas por las cargas vivas. La suma de estas componentes de la deflexión resulta en este caso

$$\Delta_{max} = 0.234 + 0.111 = 0.345 \text{ pulg}$$

bien por debajo del valor permisible.

13.10 ANÁLISIS PARA CARGAS HORIZONTALES

Cualquiera de los métodos descritos en la sección anterior de este capítulo, el método de diseño directo o el método del pórtico equivalente, se puede utilizar en el análisis de sistemas de losas en dos direcciones ante cargas gravitacionales, de acuerdo con el Código ACI 13.5.1. Sin embargo, las disposiciones del Código no han sido desarrolladas para que se apliquen a edificios sometidos a cargas laterales, como cargas producidas por viento o sismo. Para el análisis de cargas laterales, el diseñador puede seleccionar cualquier método que se demuestre cumple con las condiciones de equilibrio y de compatibilidad geométrica, y que ofrezca resultados que concuerden razonablemente con los datos disponibles de ensayos. Los resultados obtenidos del análisis de cargas laterales pueden combinarse entonces con los obtenidos a partir del estudio para cargas verticales, según el Código ACI 13.5.1.

El análisis de pórticos planos, en el cual se supone que el edificio consta de pórticos paralelos, cada uno de ellos limitado lateralmente por las líneas centrales de los paneles a cada lado de los ejes de columnas, se utiliza con frecuencia para el estudio de edificios no arriostrados que se someten a cargas horizontales y verticales. Para el análisis de cargas verticales mediante el método del pórtico equivalente, se estudia por lo general un solo piso a manera de subestructura con columnas que se suponen totalmente empotradas en los pisos superior e inferior, pero para el análisis del

pórtico ante cargas horizontales, el pórtico equivalente incluye todos los pisos y columnas, desde la parte inferior hasta la superior de la estructura.

La principal dificultad en el análisis de un pórtico equivalente ante cargas horizontales radica en modelar la rigidez de la zona alrededor de las conexiones viga-columna (o losa-viga-columna). La transferencia de fuerzas en esta zona comprende efectos de flexión, torsión, cortante y fuerza axial, y se complica aún más por los efectos de agrietamiento del concreto que reduce las rigideces y por el refuerzo que las aumenta. Los momentos en el pórtico están influidos de manera sustancial por los desplazamientos horizontales de los pisos y debe utilizarse un valor conservadoramente bajo de la rigidez para garantizar que se incluye en el análisis un estimativo razonable de la deriva.

Aunque todavía no se ha desarrollado una teoría totalmente satisfactoria para modelar la rigidez de una unión viga-columna, en la práctica se utilizan al menos dos métodos (ver la referencia 13.33). El primero se basa en un ancho de viga equivalente αl_2 menor que el ancho real, con el fin de reducir la rigidez de la losa para efectos del análisis. La figura 13.29*a* ilustra una placa empotrada en el extremo alejado y apoyada en una columna de ancho c_2 en el lado cercano. Si se impone una rotación θ a la columna, la rotación de la placa a lo largo del eje A variará como se presenta en la figura 13.29*a*, de un valor θ en la columna a valores menores a medida que se aleja de ésta. A partir del requisito de que la rigidez de la viga prismática de ancho α debe ser igual a la de la placa con ancho αl_2 se obtiene un factor de ancho equivalente l_2. La anterior igualdad se obtiene si las áreas bajo los dos diagramas de rotación de la figura 13.29*b* son iguales. Así, el análisis del pórtico se basa en una rigidez reducida de la losa (o de la viga-losa) encontrada utilizando αl_2 en lugar de l_2. Estudios comparativos indican que para pisos tipo placa plana puede utilizarse un valor de α entre 0.25 y 0.50 (ver la referencia 13.33).

Como alternativa, la rigidez de la unión viga-columna puede modelarse con base en un elemento transversal sometido a torsión, igual al utilizado en el desarrollo de la rigidez de la columna equi-

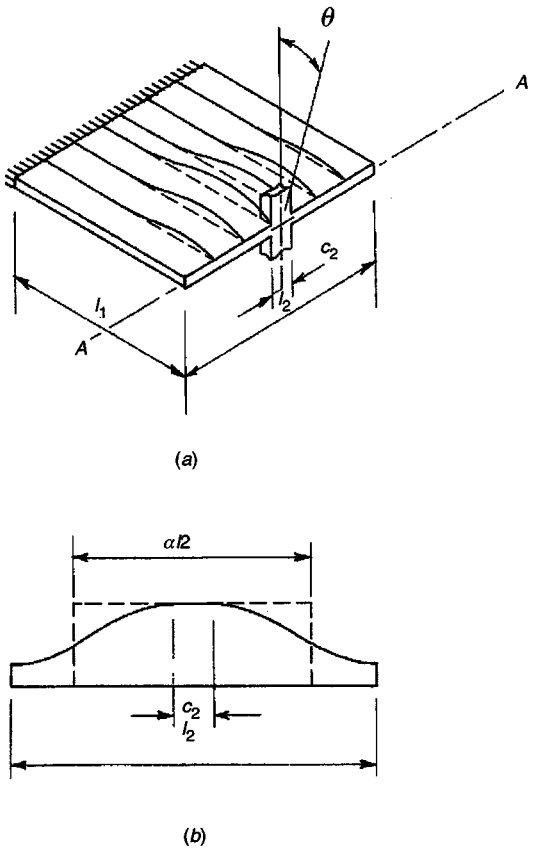


FIGURA 13.29
Ancho de viga equivalente para el análisis ante cargas horizontales.

valente para el análisis ante cargas verticales de losas en dos direcciones mediante el método del pórtico equivalente (ver la sección 13.5*c*). La rigidez de rotación del nudo es una función de la rigidez a flexión de las columnas que llegan hasta éste desde arriba y desde abajo, y de la rigidez de torsión de la franja transversal de losa o viga losa en la columna. La rigidez equivalente de la columna se encuentra a partir de la ecuación (13.9) y la rigidez de torsión con la ecuación (13.10), como antes.

REFERENCIAS

13.1. J. R. Nichols, "Statical Limitations upon the Steel Requirement in Reinforced Concrete Flat Slab Floors", *Trans. ASCE*, vol. 77, 1914, pp. 1670-1736.

13.2. D. S. Hatcher, M. A. Sozen, and C. P. Siess, "Test of a Reinforced Concrete Flat Plate", *Proc. ASCE,* vol. 91, no. ST5, 1965, pp. 205-231.

13.3. S. A. Guralnick and R. W. LaFraugh, "Laboratory Study for a Forty-Five Foot Square Flat Plate Structure", *J. ACI*, vol. 60, no. 9, 1963, pp. 1107-1185.

13.4. D. S. Hatcher, M. A. Sozen, and C. P. Siess, "Test of a Reinforced Concrete Flat Slab", *Proc. ASCE*, vol. 95, no. ST6, 1969, pp. 1051-1072.

13.5. J.O. Jirsa, M. A. Sozen, and C. P. Siess, "Test of a Flat Slab Reinforced with Welded Wire Fabric", *Proc. ASCE*, vol. 92, no. ST3, 1966, pp. 199-224.

13.6. W. L. Gamble, M. A. Sozen, and C. P. Siess, "Test of a Two-Way Reinforced Concrete Floor Slab", *Proc. ASCE*, vol. 95, no. ST6, 1969, pp. 1073-1096.

13.7. M. D. Vanderbilt, M. A. Sozen, and C. P. Siess, "Test of a Modified Reinforced Concrete Two-Way Slab", *Proc. ASCE*, vol. 95, no. ST6, 1969, pp. 1097-1116.

13.8. W. L. Gamble, "Moments in Beam-Supported Slabs", *J. ACI*, vol. 69, no. 3, 1972, pp. 149-157.

13.9. J. O. Jirsa, M. A. Sozen, and C. P. Siess, "Pattern Loading on Reinforced Concrete Floor Slabs", *Proc. ASCE*, vol. 95, no. ST6, 1969, pp. 1117-1137.

13.10. D. Peabody, Jr., "Continuous Frame Analysis of Flat Slabs", *J. Boston Society Civ. Eng.*, January 1948.

13.11. W. G. Corley, M. A. Sozen, and C. P. Siess, "The Equivalent Frame Method for Reinforced Concrete Slabs", Univ. *Ill.* Dept. Civ. Eng. Struct. Res. Series 218, June 1961.

13.12. W. G. Corley and J. O. Jirsa, "Equivalent Frame Analysis for Slab Design", *J. ACI*, vol. 67, no. 11, 1970, pp. 875-884.

13.13. "The Shear Stength of Reinforced Concrete Members—Slabs", ASCE-ACI Task Committee 426, *J. Struct. Div. ASCE*, vol. 100, no. ST8, 1974, pp. 1543-1591.

13.14. N. M. Hawkins, H. B. Fallsen, and R. C. Hinojosa, "Influence of Column Rectangularity on the Behavior of Flat Plate Structures", in *Cracking, Deflection, and Ultimate Load of Concrete Slab Systems*, ACI Publication SP-30, 1971, p. 127.

13.15. M. D. Vanderbilt, "Shear Strength of Continuous Plates", *J. Struct. Div. ASCE*, vol. 98, no. ST5, 1972, pp. 961-973.

13.16. W. G. Corley and N. M. Hawkins, "Shearhead Reinforcement for Slabs", *J. ACI*, vol. 65, no. 10, 1968, pp. 811-824.

13.17. N. W. Hawkins, D. Mitchell, and S. N. Hanna, "Effects of Shear Reinforcement on the Reversed Cyclic Loading Behavior of Flat Plate Structures", *Can. J. Civ. Eng.*, vol. 2, no. 4, 1975, pp. 572-582.

13.18. A. Ghali, "An Efficient Solution to Punching of Slabs", *Concr. Int.*, vol. 11, no. 6, 1989, pp. 50-54.

13.19. A. A. Elgabry and A. Ghali, "Design of Stud-Shear Reinforcement for Slabs", *ACI Struct. J.*, vol. 87, no. 3, 1990, pp. 350-361.

13.20. A. S. Mokhtar, A. Ghali, and W. Dilger, "Stud Shear Reinforcement for Flat Concrete Plates", *J. ACI*, vol. 82, no. 5, 1985, pp. 676-683.

13.21. A. A. Elgabry and A. Ghali, "Tests on Concrete Slab-Column Connections with Stud Shear Reinforcement Subjected to Shear-Moment Transfer", *ACI Struct. J.*, vol. 84, no. 5, 1987, pp. 433-442.

13.22. J. D. Mortin and A. Ghali, "Connection of Flat Plates to Edge Columns", *ACI Struct. J.*, vol. 88, no. 2, 1991, pp. 191-198.

13.23. N. Hammill and A. Ghali, "Punching Shear Resistance of Corner Slab-Column Connection", *ACI Struct. J.*, vol. 91, no. 6, 1994, pp. 697-707.

13.24. N. M. Hawkins, A. Bao, and J. Yamazaki, "Moment Transfer from Concrete Slabs to Columns", *ACI Struct. J.*, vol. 86, no. 6, 1989, pp. 705-716.

13.25. "Recommendations for Design of Slab-Column Connection in Monolithic Reinforced Concrete Structures", reported by ACI-ASCE Committee 352, *ACI Struct. J.*, vol. 85, no. 6, 1988, pp. 675-696.

13.26. J. P. Moehle, M. E. Kreger, and R. Leon, "Background to Recommendations for Design of Reinforced Concrete Slab-Column Connections", *ACI Struct. J.*, vol. 85, no. 6, 1988, pp. 636-644.

13.27. A. H. Nilson and D. B. Walters, "Deflection of Two-Way Floor Systems by the Equivalent Frame Method", *J. ACI.*, vol. 72, no. 5, May 1975, pp. 210-218.

13.28. P. F. Rice, E. S. Hoffman, D. P. Gustafson, and A. J. Gouwans, *Structural Design Guide to the ACI Building Code*, 3d ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1985.

13.29. D. E. Branson, *Deformation of Concrete Structures*, McGraw-Hill, New York, 1977.

13.30. P. J. Taylor and J. L. Heiman, "Long-Term Deflection of Reinforced Concrete Flat Slabs and Plates", *J. ACI*, vol. 74, no. 11, 1977, pp. 556-561.

13.31. C. J. Graham and A. Scanlon, "Long-Time Multipliers for Estimating Two-Way Slab Deflections", *J. ACI*, vol. 83, no. 6, 1986, pp. 899-908.
13.32. N. J. Gardner and A. Scanlong, "Long-Term Deflections of Two-Way Slabs", *Concr. Int.*, vol. 12, no. 1, 1990, pp. 63-67.
13.33. M. D. Vanderbilt and W. G. Corley, "Frame Analysis of Concrete Buildings", *Concr. Int.*, vol. 5, no. 12, 1983, pp. 33-43.

PROBLEMAS

13.1. Rediseñe el panel de piso de esquina del ejemplo 12.2 del capítulo 12 utilizando el método de diseño directo del Código ACI de las secciones 13.2 a 13.4. Sintetice su diseño con un esquema que presente las dimensiones y el tamaño del concreto, espaciamiento, longitud y ubicación de todo el refuerzo de la losa. No es necesario diseñar las vigas de apoyo como parte de este problema. Compare sus resultados con los del ejemplo 12.2 y concluya.

13.2. Diseñe un panel interior típico del sistema de piso descrito en el ejemplo 12.2 del capítulo 12 utilizando el método de los coeficientes de momento de la sección 12.5. Resuma su diseño con un esquema que indique las dimensiones y el tamaño del concreto, espaciamiento, longitud y ubicación de todo el refuerzo de la losa.

13.3. Rediseñe el panel interior típico del problema 13.2 haciendo uso del método de diseño directo del Código ACI de las secciones 13.2 a 13.4. No es necesario diseñar las vigas de apoyo como parte de este problema. Compare sus resultados con los del problema 13.2 y concluya.

13.4. Rediseñe el panel interior típico del problema 13.2 con el método del pórtico equivalente del Código ACI de la sección 13.5. Las columnas serán cuadradas de 16 pulg y la altura piso a piso será de 12 pies. Compare sus resultados con los del problema 13.2 (y con los del problema 13.3, si se completa) y concluya.

13.5. Rediseñe el panel exterior típico de piso del ejemplo 13.1 que forma parte de una estructura con placa plana sin vigas entre las columnas interiores pero con vigas a lo largo de los bordes externos para rigidizar la losa. No se permite el uso de ábacos o capiteles de columna pero sí puede incorporar refuerzo a cortante similar al de la figura 13.17*b*, si es necesario. El tamaño de las columnas es 20 × 20 pulg y la altura piso a piso es 12 pies. Utilice el método de diseño directo o el método del pórtico equivalente. Sintetice su diseño mediante un esquema que ilustre la planta y las secciones transversales típicas.

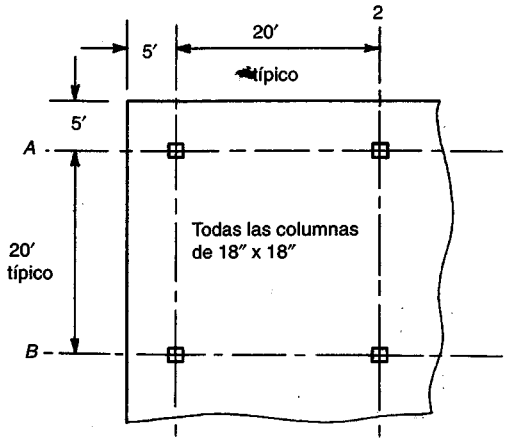
13.6. Se va a diseñar un edificio comercial de varios pisos con un sistema de placa plana de espesor uniforme sin vigas ni ábacos. Las columnas se disponen con un espaciamiento uniforme de 20 pies en cada dirección, y tienen una sección cuadrada de 16 pulg y una dimensión vertical de 10 pies entre pisos. La carga viva de servicio especificada es de 100 lb/pie^2 que incluye una previsión para las particiones. Usando el método de diseño directo, diseñe un panel interior típico, determinando el espesor de piso requerido, el tamaño y el espaciamiento de las barras de refuerzo y los detalles de las barras incluyendo los puntos de corte. Para facilitar la construcción se hará uso del mismo refuerzo en las dos direcciones; utilice un espesor efectivo promedio en los cálculos. Todas las barras serán rectas. Para luces moderadas como éstas, se ha determinado que el refuerzo a cortante suplementario no es económico, aunque pueden emplearse capiteles de columna si es necesario. Así que, los espesores de losa pueden basarse en las ecuaciones (13.11*a*, *b* y *c*), o pueden seleccionarse con estas ecuaciones dimensiones de los capiteles de columna si el espesor de la losa se basa en las ecuaciones de la sección 13.4. Las resistencias de los materiales son f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2.

13.7. Prepare diseños alternos para el refuerzo a cortante en los apoyos de la losa descrita en el ejemplo 13.4: (*a*) utilizando refuerzo consistente en barras dobladas similares a las de la figura 13.17*b*, y (*b*) empleando vigas integrales con estribos verticales como en la figura 13.17*e*.

13.8. Desarrolle un diseño alterno para el refuerzo a cortante en los apoyos de la losa descrita en el ejemplo 13.3, utilizando un conector de cortante similar al de la figura 13.17*a*. Como alternativa a la utilización de refuerzo a cortante de cualquier tipo, calcule la dimensión aceptable más pequeña para un capitel de columna a 45° (ver la figura 12.1*e*) que permitirá que la losa de concreto resista la totalidad de la fuerza cortante. No se permiten ábacos.

13.9. La figura P13.9 presenta un piso tipo placa plana diseñado para soportar una carga mayorada de 350 lb/pie^2. El espesor total de la losa es $h = 7\frac{1}{2}$ pulg y la profundidad efectiva promedio es d = 6 pulg. Las resistencias de los materiales son f_y =60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2. El diseño a cortante por punzonamiento para una columna interior típica *B*2 proporcionó la base para el ejemplo 13.3. En la columna exterior *B*1, con el fin de suministrar un perímetro completo b_o, se incluye un voladizo en la losa por fuera de las columnas, como se indica. Debe transmitirse a las columnas una fuerza cortante

total de V_u = 105 klb, más un momento flector M_u = 120 klb-pie con respecto a un eje paralelo al borde de la losa. Verifique el cortante por punzonamiento en la columna $B1$ y, si no se cumplen las restricciones del Código ACI, sugiera modificaciones adecuadas en el diseño propuesto. No se permiten vigas de borde.



13.10. Para el piso tipo placa plana del ejemplo 13.2, encuentre los siguientes componentes de la deflexión en el centro del panel C: (*a*) deflexión inmediata generada por carga muerta total; (*b*) deflexión adicional por la carga muerta total a largo plazo; (*c*) deflexión inmediata ocasionada por las tres cuartas partes de la carga viva total. Puede utilizar en todos los cálculos el momento de inercia de las secciones transversales de concreto, I_g. Puede suponer que la deflexión máxima se obtendrá para el mismo patrón de aplicación de las cargas que el que producirá el máximo momento positivo en el panel. Compare las deflexiones estimadas con las limitaciones del Código ACI, suponiendo que los elementos no estructurales fijos a la losa sufrirán daño por deflexiones excesivas.

CAPÍTULO

14 ANÁLISIS DE LOSAS MEDIANTE LÍNEAS DE FLUENCIA

14.1 INTRODUCCIÓN

La mayor parte de las losas de concreto se diseñan para momentos determinados mediante los métodos descritos en los capítulos 12 y 13; estos procedimientos se basan esencialmente en la teoría elástica. Por otro lado, el refuerzo de las losas se calcula con metodologías de resistencia que tienen en cuenta el comportamiento inelástico real de los elementos en estado de carga mayorada. En forma similar, se presenta una contradicción en el proceso de análisis y diseño de vigas y pórticos, en el cual se introdujo el concepto de análisis límite o plástico del concreto reforzado, como se observó en la sección 11.9. Esta conceptualización no sólo elimina la inconsistencia de combinar el análisis elástico con el diseño inelástico, sino que también tiene en cuenta la reserva de resistencia característica de muchas estructuras de concreto reforzado y permite, dentro de ciertos límites, un ajuste arbitrario de los momentos encontrados mediante el análisis elástico para llegar a momentos de diseño que permiten una disposición más práctica del refuerzo.

Existe además otra buena razón para interesarse en el análisis límite de losas. Los métodos de los capítulos 12 y 13, que se basan en la elasticidad, tiene algunas restricciones importantes. Los paneles de losas deben ser cuadrados o rectangulares; deben estar apoyados a lo largo de dos lados opuestos (losas en una dirección), en dos pares de lados opuestos (losas en dos direcciones y apoyadas en los bordes) o por una distribución más o menos regular de columnas (placas planas y formas relacionadas).

Las cargas deben distribuirse uniformemente, al menos dentro de los límites de cualquier panel individual, y no pueden existir grandes aberturas; pero en la práctica muchas losas no cumplen estas restricciones. Se requieren respuestas, por ejemplo, para losas circulares o triangulares, losas con aberturas grandes, losas apoyadas en dos o tres lados únicamente y losas que soporten cargas concentradas. El análisis límite suministra una herramienta poderosa y versátil para tratar dichos problemas.

A partir del estudio de la sección 11.9 se hizo evidente que el análisis plástico completo de una viga o un pórtico continuo de concreto reforzado resultaría tedioso y demorado a causa de la necesidad de calcular las demandas de rotación en todas las rótulas plásticas y verificar la capacidad de rotación de cada rótula para asegurar que es adecuada; en consecuencia, para vigas y pórticos se utiliza el método simplificado para redistribución de momentos plásticos estipulado por el

código ACI 8.4. Sin embargo para losas, que tienen por lo general cuantías de acero a tensión muy por debajo de la cuantía balanceada y, en consecuencia, cuentan con gran capacidad de rotación, se puede asumir en forma segura que la ductilidad necesaria está presente. De esta manera, son posibles y se han desarrollado varios métodos prácticos para el análisis plástico de losas. La *teoría de líneas de fluencia* que se presenta en este capítulo es uno de estos métodos. Aunque el Código ACI no incluye disposiciones específicas para el análisis límite o plástico de losas, el Código ACI 1.4 permite la utilización de "cualquier sistema de diseño o construcción" que haya demostrado ser adecuado por su utilización exitosa, por análisis o por ensayos, y el comentario del Código ACI 13.5.1 se refiere específicamente al análisis mediante líneas de fluencia como un método aceptable.

El análisis de losas mediante líneas de fluencia fue propuesto inicialmente por Ingerslev (ver la referencia 14.1) y ampliado en forma considerable por Johansen (ver las referencias 14.2 y 14.3). Las primeras publicaciones se hicieron en danés y el método sólo recibió amplia atención cuando Hognestad (ver la referencia 14.14) presentó un resumen en inglés de este trabajo. A partir de ese momento aparecieron varios textos importantes que tratan el método (ver las referencias 14.5 a 14.15). En la referencia 14.15 se encontrará un tratamiento particularmente útil y completo.

En la sección 11.9 se presentó el concepto de *rótula plástica* como un sitio a lo largo del elemento en una viga o pórtico continuo en el cual, al aplicar una sobrecarga, se presentarán rotaciones inelásticas considerables para momentos resistentes esencialmente constantes. En losas, el mecanismo correspondiente es la *línea de fluencia*. Para la losa sobrecargada, el momento resistente por unidad de longitud medido a lo largo de una línea de fluencia es constante a medida que ocurre la rotación inelástica; la línea de fluencia sirve de eje de rotación para el segmento de losa.

La figura 14.1*a* ilustra una losa de concreto reforzado simplemente apoya y cargada uniformemente. Se supondrá que está subreforzada (como la mayoría de las losas), con $\rho < \rho_b$. El diagrama de momentos elástico se indica en la figura 14.1*b*. A medida que se aumenta la carga, cuando el momento aplicado resulta igual a la capacidad última a flexión de la sección transversal de la losa, el acero a tensión empieza a fluir a lo largo de la línea transversal de máximo momento.

Al fluir, la curvatura de la losa en la sección de fluencia aumenta repentinamente y las deflexiones se incrementan en forma desproporcionada. Las curvaturas elásticas a lo largo de la luz de la losa son pequeñas en comparación con la que generan las deformaciones plásticas en la línea

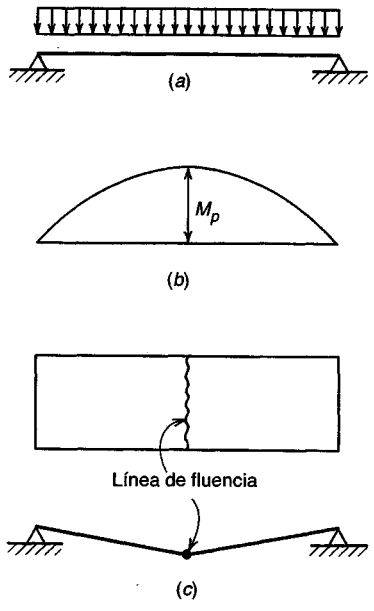


FIGURA 14.1
Losa armada en una dirección, simplemente apoyada y cargada de manera uniforme.

de fluencia, y es aceptable considerar que los segmentos de losa entre la línea de fluencia y los apoyos permanecen rígidos mientras toda la curvatura ocurre en la línea de fluencia como aparece en la figura 14.1*c*. La "rótula" que se forma en la línea de fluencia, rota con una resistencia constante, de acuerdo con la relación expuesta en la figura 11.11*a*. La resistencia por unidad de ancho de losa es la resistencia nominal a flexión de la losa; es decir, $m_p = m_n$, donde m_n se calcula mediante las ecuaciones usuales. Para efectos de diseño, m_p se tomaría igual a ϕm_n con $\phi = 0.9$ como es usual para flexión.

Para una losa estáticamente determinada como la de la figura 14.1, la formación de una sola línea de fluencia produce el colapso. Se forma así un "mecanismo", es decir, los segmentos de la losa entre la rótula y los apoyos pueden desplazarse sin que se incremente la carga. Sin embargo, las estructuras indeterminadas pueden resistir por lo general sus cargas sin presentar colapso aún después de la formación de una o más líneas de fluencia. Cuando la losa doblemente empotrada de la figura 14.2*a*, supuesta en este caso con igual refuerzo para los momentos negativos y positivos, está cargada de manera uniforme, presentará una distribución elástica de momentos como se indica en la figura 14.2*b*. A medida que la carga se incrementa en forma gradual, las secciones sometidas a mayores esfuerzos en los apoyos comenzaran a fluir; se producen entonces rotaciones en las rótulas lineales de apoyos, pero continúan actuando momentos de restricción con valor constante m_p, de este modo la carga puede incrementarse aún más hasta que el momento en el centro de la luz sea igual a la capacidad de momento en este punto y se forma así una tercera línea de fluencia como se ilustra en la figura 14.2*c*. La losa es ahora un mecanismo donde ocurren grandes deflexiones y se presenta el colapso.

El diagrama de momentos justo antes de la falla se presenta en la figura 14.2*d*. Observe que ya no es válida la relación de momentos elásticos positivo a negativo de 1:2. Como consecuencia de las deformaciones inelásticas, la relación entre estos dos momentos justo antes del colapso es 1:1 para esta estructura en particular. La redistribución de momentos se analizó anteriormente en la sección 11.9 y se destacó que las relaciones de momentos para el estado de colapso dependen principalmente del refuerzo proporcionado, no de los resultados de los análisis elásticos.

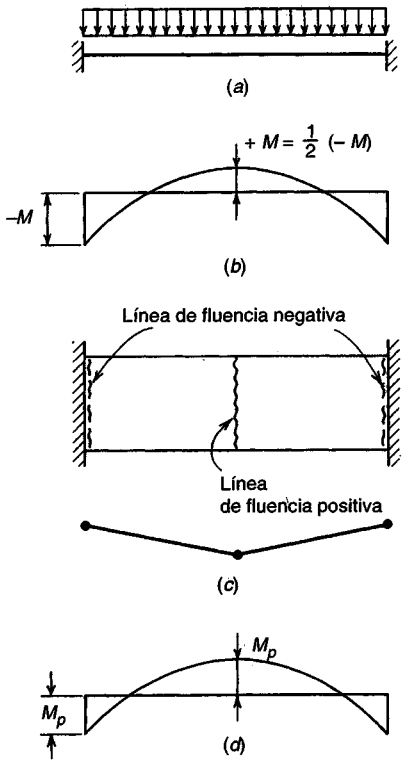


FIGURA 14.2
Losa armada en una dirección, empotrada en los extremos y cargada uniformemente.

14.2 TEOREMA DE LOS LÍMITES SUPERIOR E INFERIOR

Los métodos de análisis plástico, como en la teoría de las líneas de fluencia, provienen de la teoría general de plasticidad estructural; ésta establece que la carga última de colapso de una estructura se encuentra entre dos límites, uno superior y otro inferior, de la carga real de colapso. Éstos pueden determinarse con métodos bien conocidos. Una solución completa mediante la teoría de la plasticidad trataría de hacer que los límites superior e inferior convergieran a una solución correcta.

Al aplicarse a losas, los teoremas de los límites inferior y superior pueden enunciarse de la siguiente manera:

> **Teorema del límite inferior:** si para determinada carga externa es posible encontrar una distribución de momentos que satisface los requisitos de equilibrio, sin que los momentos excedan el momento de fluencia en ningún sitio, y si se satisfacen las condiciones de frontera, entonces la carga dada es un límite de la capacidad de carga real.

> **Teorema del límite superior:** si para un pequeño incremento en el desplazamiento, el trabajo interno que hace la losa —suponiendo que los momentos en todas las rótulas plásticas son iguales al momento de fluencia y que las condiciones de frontera se satisfacen— es igual al trabajo externo hecho por la carga dada para ese mismo pequeño incremento en el desplazamiento, entonces, esa carga es un límite superior de la capacidad de carga real.

Si se satisfacen las condiciones del límite inferior, con certeza la losa puede soportar la carga determinada, aunque podría sostenerse cargas mayores si ocurriera una redistribución interna de momentos. Si se cumplen las condiciones del límite superior, una carga mayor que la determinada producirá con certeza la falla aunque una carga inferior puede generar el colapso si el mecanismo de falla seleccionado es incorrecto en cualquier sentido.

En la práctica, para el análisis plástico de la estructura se trabaja bien sea con el teorema del límite inferior o con el teorema del límite superior, pero no con los dos, y se toman precauciones para garantizar que la carga de falla estimada se aproxime suficientemente al valor correcto.

El método de las líneas de fluencia para el análisis de losas es un procedimiento de límite superior y, en consecuencia, la carga de falla calculada para una losa con resistencias conocidas a flexión puede ser mayor que el valor real. Esto es preocupante, puesto que el diseñador preferiría tener la respuesta correcta o, al menos, estar en el lado seguro. Sin embargo, en el análisis de líneas de fluencia se pueden incorporar procedimientos para ayudar a asegurar que la capacidad calculada sea la correcta. Estos procedimientos se ilustrarán mediante los ejemplos de las secciones 14.4 y 14.5.

14.3 REGLAS PARA LAS LÍNEAS DE FLUENCIA

La ubicación y orientación de la línea de fluencia fueron evidentes para el caso de la losa simplemente apoyada de la figura 14.1. Asimismo, las líneas de fluencia se determinaron con facilidad para la losa estáticamente indeterminada, armada en una dirección, de la figura 14.2. En otros casos resulta útil tener un conjunto de guías para dibujar las líneas de fluencia y localizar los ejes de rotación. Cuando una losa está al borde del colapso porque hay una cantidad suficiente de rótulas reales o plásticas para formar un mecanismo, los ejes de rotación se ubicarán a lo largo de las líneas de apoyo o sobre puntos de apoyo como son las columnas. Puede considerarse que los segmentos de losa rotan como cuerpos rígidos en el espacio, alrededor de estos ejes. La línea de fluencia entre cualquiera de los dos segmentos de losa adyacentes es recta, puesto que se trata de la intersección de dos superficies planas. Debido a que la línea de fluencia (por ser la línea de intersección entre dos planos) contiene todos los puntos comunes a estos dos planos, el punto de intersección (si existe) de los dos ejes de rotación debe estar sobre la línea de fluencia ya que este punto también es común para los dos planos. Es decir, la línea de fluencia (o la extensión de la misma) debe pasar por el punto de intersección de los ejes de rotación de los dos segmentos adyacentes de losa.

Los términos *línea de fluencia positiva* y *línea de fluencia negativa* se utilizan para diferenciar entre aquéllas asociadas con tensión en la parte inferior y tensión en la parte superior de la losa, respectivamente.

Las pautas para determinar los ejes de rotación y las líneas de fluencia se resumen a continuación:

1. Las líneas de fluencia son rectas puesto que representan la intersección de dos planos.
2. Las líneas de fluencia representan ejes de rotación.
3. Los bordes apoyados de la losa también establecen ejes de rotación. Si el borde está empotrado, se puede formar una línea de fluencia negativa que suministra resistencia constante a la rotación. Si el borde está simplemente apoyado, el eje de rotación proporciona restricción nula.
4. Un eje de rotación pasará sobre cualquier columna de apoyo. Su orientación dependerá de otras consideraciones.
5. Debajo de las cargas concentradas se forman líneas de fluencia que salen radialmente desde el punto de aplicación de la carga.
6. Una línea de fluencia entre dos segmentos de losa debe pasar por el punto de intersección de los ejes de rotación de los segmentos adyacentes de losa.

En la figura 14.3, que ilustra una losa simplemente apoyada a lo largo de sus cuatro lados, la rotación de los segmentos de losa A y B ocurre alrededor de ab y cd respectivamente. La línea de fluencia ef entre estos dos segmentos es una línea recta que pasa por f, el punto de intersección de los ejes de rotación.

En la figura 14.4 se presentan ilustraciones de la aplicación de las pautas para determinar la ubicación de las líneas de fluencia y los mecanismos de falla para algunas losas con diferentes condiciones de apoyo. En la parte (a) se presenta una losa continua sobre apoyos paralelos. Los ejes de rotación se ubican a lo largo de los apoyos (líneas de fluencia negativas) y cerca del centro de la luz, en dirección paralela a la de los apoyos (líneas de fluencia positivas). La ubicación particular para la línea de fluencia positiva, en este caso y en los demás de la figura 14.4, depende de la distribución de las cargas y del refuerzo de la losa. Más adelante se analizarán los métodos para determinar su ubicación.

Para la losa continua sobre apoyos no paralelos que se presenta en la parte (b), la línea de fluencia (prolongada) en el centro de la luz debe pasar por la intersección de los ejes de rotación sobre los apoyos. En (c) hay ejes de rotación sobre los cuatro apoyos simples. A lo largo de las líneas de intersección de los segmentos rotantes de la losa se forman líneas de fluencia positiva. En la parte (d) se ilustra una losa rectangular armada en dos direcciones y sobre apoyos simples. Las líneas de fluencia diagonales deben pasar por las esquinas, mientras que la línea de fluencia central es paralela a los dos lados largos (para este caso, los ejes de rotación a lo largo de los apoyos opuestos se intersectan en el infinito).

Con todos estos fundamentos, el lector no debe tener dificultades en la aplicación de las pautas anteriores a las losas de las figuras 14.4*e* a 14.4*g*, para confirmar el patrón general presentado para las líneas de fluencia. En las referencias 14.1 a 14.15 pueden encontrarse muchos otros ejemplos.

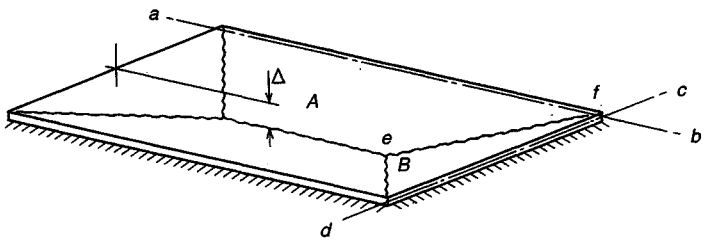


FIGURA 14.3
Losa armada en dos direcciones con bordes simplemente apoyados.

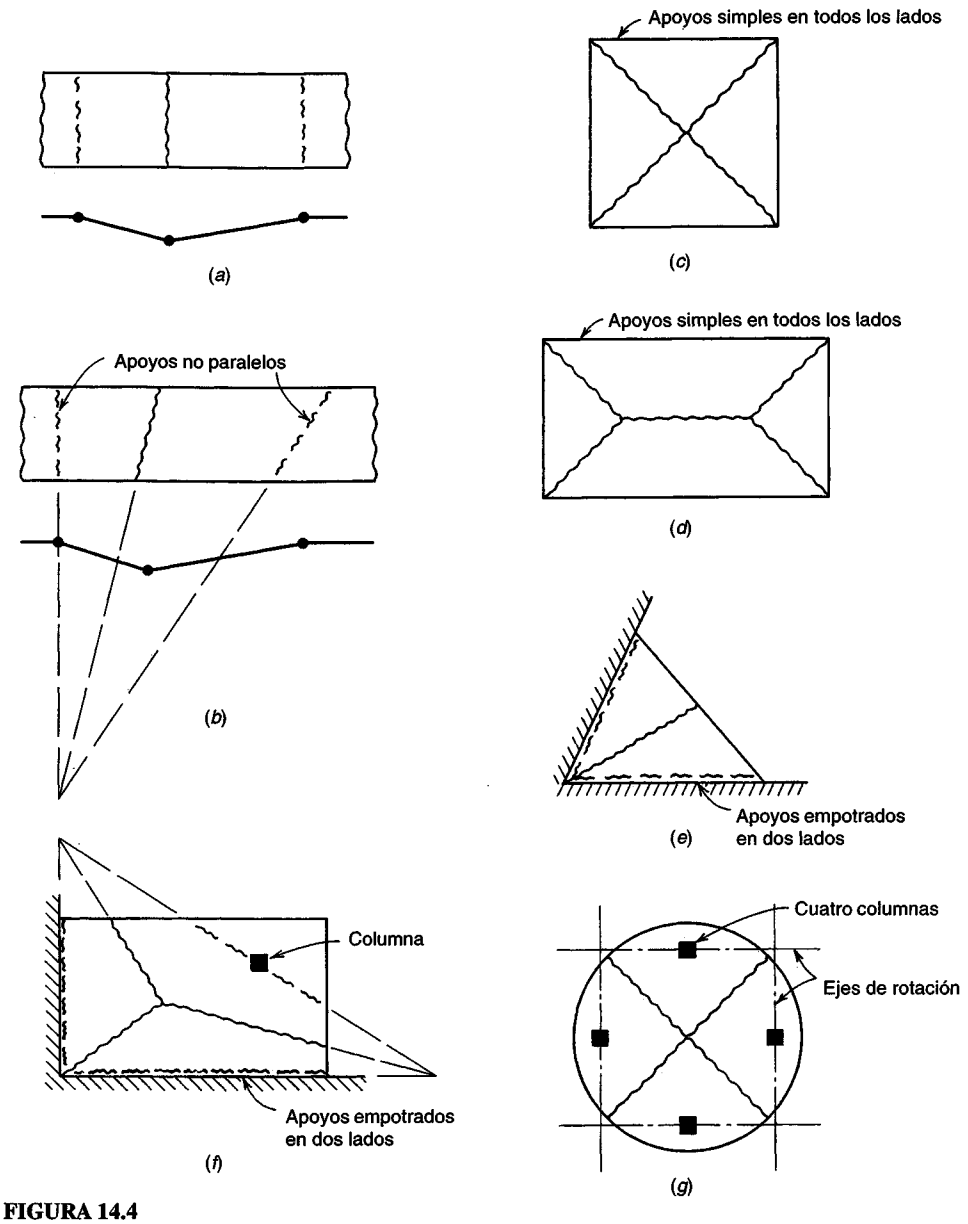


FIGURA 14.4
Patrones comunes de línea de fluencia.

Una vez que se establece el patrón general de fluencia y rotación mediante la aplicación de las pautas estipuladas anteriormente, puede determinarse la ubicación y orientación específica de los ejes de rotación y la carga de falla de la losa con cualquiera de los dos métodos siguientes. Al primero se hará referencia como el *método de equilibrio de segmentos* y se presentará en la sección 14.4. Éste considera el equilibrio de los segmentos individuales de losa que forman el mecanismo de colapso; además, genera un conjunto de ecuaciones simultáneas que permiten encontrar los parámetros geométricos desconocidos y la relación entre capacidad de carga y momentos resistentes. El segundo, conocido como el *método de trabajo virtual*, se describe en la sección 14.5. Este método se basa en igualar el trabajo interno realizado en las rótulas plásticas con el trabajo externo que efectúan las cargas al someter el mecanismo predefinido de falla a un desplazamiento virtual pequeño.

Se debe hacer énfasis en que *cualquier método de análisis de líneas de fluencia es un método de límite superior* en el sentido de que la carga real de colapso nunca será mayor pero sí puede ser

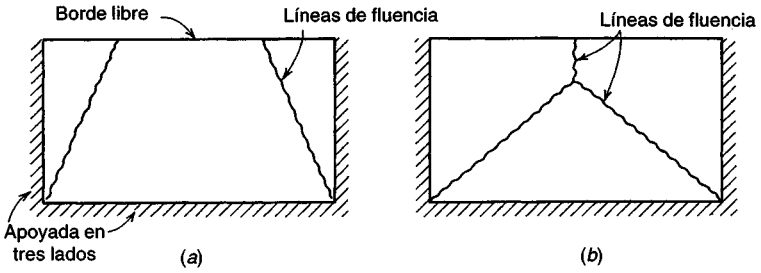


FIGURA 14.5
Mecanismos alternos para una losa apoyada en tres lados.

menor que la carga estimada. En cualquier método la solución tiene dos partes esenciales: (*a*) establecer el patrón de falla correcto y (*b*) encontrar los parámetros geométricos que definen la ubicación y orientación exactas de las líneas de fluencia y obtener la relación entre la carga aplicada y los momentos resistentes. Cualquiera de los métodos puede desarrollarse de manera que se llegue a la solución correcta para el mecanismo seleccionado para estudio, pero la carga real de falla se encontrará sólo si se escoge el mecanismo correcto.

Por ejemplo, la losa rectangular de la figura 14.5, apoyada a lo largo de sólo tres lados y libre a lo largo del cuarto, puede fallar por cualquiera de los dos mecanismos expuestos. Un análisis basado en el patrón de fluencia *a* puede indicar una capacidad de la losa mayor que uno basado en el patrón *b*, o viceversa. Es necesario investigar *todos los posibles mecanismos* de cualquier losa, para confimar que se encuentre la solución correcta que da la menor carga de falla†.

El método de equilibrio de segmentos no debe confundirse con un método de equilibrio real, como el de las franjas del capítulo 15. Un método de equilibrio real es un método de análisis de límite inferior, es decir, dará siempre un *límite inferior* de la capacidad real de la losa.

14.4 ANÁLISIS MEDIANTE EL EQUILIBRIO DE SEGMENTOS

Una vez que se establece el patrón general de fluencia y rotación aplicando las pautas de la sección 14.3, puede determinarse la localización y orientación de los ejes de rotación y la carga de falla para la losa con base en el equilibrio de sus diferentes segmentos. Cada segmento, considerado como un cuerpo libre, debe estar en equilibrio bajo la acción de las cargas aplicadas, los momentos a lo largo de las líneas de fluencia y las reacciones o cortantes a lo largo de las líneas de apoyo. Se observa que, puesto que los momentos de fluencia son momentos principales, los momentos de torsión son iguales a cero a lo largo de las líneas de fluencia y, en muchos casos, las fuerzas cortantes también son iguales a cero. Por lo general, al enunciar las ecuaciones de equilibrio sólo se considera el momento unitario m.

Ejemplo 14.1. Análisis de una losa armada en una dirección mediante el equilibrio de segmentos. El método se demostrará inicialmente con referencia a la losa continua en una dirección y cargada uniformemente como aparece en la figura 14.6*a*. La losa tiene una luz de 10 pies y está reforzada para proporcionar una resistencia a la flexión positiva $\phi m_n = 5.0$ klb-pie/pie en toda la luz. Además el acero negativo sobre los apoyos suministra capacidades a momento de 5.0 klb-pie/pie en A y 7.5 klb-pie/pie en C. Determine la capacidad última de carga de la losa.

Solución. La cantidad de ecuaciones requeridas de equilibrio dependerá del número de incógnitas. Una de ellas es siempre la relación entre los momentos resistentes de la losa y la carga. Otras incógnitas se

† La importancia de este punto fue resaltada por el profesor Arne Hillerborg de Lund Institute of Technology, Suecia, en una comunicación al director de la publicación del ACI, *Concrete International*, vol. 13, no. 5, 1991. El profesor Hillerborg indicó que en realidad existen dos patrones de líneas de fluencia adicionales para losas como las de la figura 14.5. Para un conjunto particular de dimensiones y refuerzo, estos mecanismos dieron un valor de carga de falla inferior que el dado por el mecanismo mostrado en la figura 14.5*a*.

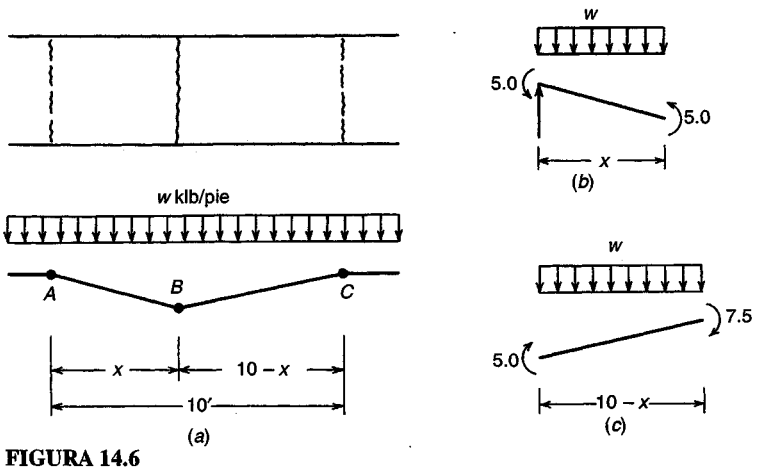


FIGURA 14.6
Análisis de una losa en una dirección mediante las ecuaciones de equilibrio de segmentos.

requieren para definir la ubicación de las líneas de fluencia. En este caso, sólo se requiere una ecuación adicional para definir la distancia de la línea de fluencia a los apoyos. Si se toma el segmento izquierdo de la losa como un cuerpo libre y se enuncia la ecuación de equilibrio de momentos con respecto a la línea izquierda de apoyo (ver la figura 14.6*b*) se llega a

$$\frac{wx^2}{2} - 10.0 = 0 \qquad (a)$$

De modo similar, para el segmento de losa derecho,

$$\frac{w}{2}(10 - x)^2 - 12.5 = 0 \qquad (b)$$

Resolviendo las ecuaciones (*a*) y (*b*) simultáneamente para w y x se obtiene

$$w = 0.89 \text{ klb/pie}^2 \quad x = 4.75 \text{ pies}$$

Si una losa se refuerza de manera idéntica en direcciones ortogonales, el momento resistente último es igual en estas dos direcciones y a lo largo de cualquier otra línea independientemente de su dirección. Se dice que tal losa está reforzada *isotrópicamente*. Sin embargo, si las resistencias últimas son diferentes en dos direcciones perpendiculares, se dice que la losa es *ortogonalmente anisotrópica* o simplemente *ortotrópica*; en esta sección se analizarán sólo losas isotrópicas. El refuerzo ortotrópico, que se utiliza con bastante frecuencia en la práctica, se estudiará en la sección 14.6.

En el análisis de líneas de fluencia resulta conveniente representar los momentos con vectores. Se seguirá la convención estándar, mediante la cual los momentos actúan en dirección de las manecillas del reloj cuando se observan a lo largo de la flecha del vector. El tratamiento de los momentos como cantidades vectoriales se ilustrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14.2. Análisis de una losa cuadrada mediante el equilibrio de segmentos. Una losa cuadrada está simplemente apoyada a lo largo de todos los lados y se va a reforzar isotrópicamente. Determine el momento resistente $m = \phi m_n$, por pie lineal, requerido para sostener justo una carga mayorada y uniformemente distribuida de w lb/pie^2.

Solución. Las condiciones de simetría indican el patrón de líneas de fluencia que se muestra en la figura 14.7*a*. Teniendo en cuenta el equilibrio de momentos en cualquiera de los segmentos de losa idénticos con respecto a su apoyo (ver la figura 14.7*b*), se obtiene

$$\frac{wL^2}{4}\frac{L}{6} - 2\frac{mL}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$m = \frac{wL^2}{24}$$

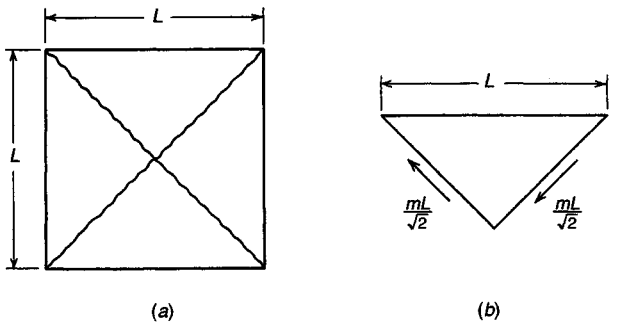


FIGURA 14.7
Análisis de una losa cuadrada en dos direcciones, mediante las ecuaciones de equilibrio de segmentos.

En los dos ejemplos anteriores, el momento resistente era constante a lo largo de cualquier línea de fluencia particular, es decir, las barras de refuerzo eran de diámetro constante y estaban espaciadas uniformemente a lo largo de determinada línea de fluencia. Por otro lado, se recordará que, al utilizar los métodos elásticos para el análisis de losas presentados en los capítulos 12 y 13, las barras de refuerzo aparecen generalmente con espaciamientos diferentes y pueden ser de diverso diámetro en las franjas centrales, en comparación con las franjas de columna o las de borde. La resistencia última de una losa diseñada con los métodos elásticos, que llevan a las variaciones anteriores, puede analizarse fácilmente por el método de las líneas de fluencia. Es necesario simplemente subdividir una línea de fluencia en sus partes componentes, dentro de cada una de las cuales el momento resistente por unidad de longitud de rótula es constante. Tanto las ecuaciones de equilibrio de esta sección como las de trabajo de la sección 14.5 pueden modificarse de esta manera.

14.5 ANÁLISIS MEDIANTE EL MÉTODO DE TRABAJO VIRTUAL

Como alternativa al método de la sección 14.4, se presenta un método de análisis que utiliza el principio de trabajo virtual. Puesto que los momentos y las cargas están en equilibrio cuando se forma el patrón de líneas de fluencia, un aumento infinitesimal en la carga producirá una deflexión adicional de la estructura. El trabajo externo realizado por las cargas para producir una deflexión virtual arbitrariamente pequeña debe ser igual al trabajo interno hecho a medida que la losa rota alrededor de las líneas de fluencia para permitir esta deflexión. Por consiguiente, se da a la losa un desplazamiento virtual unitario y de este modo pueden calcularse las rotaciones correspondientes en las diversas líneas de fluencia. Al igualar el trabajo interno con el externo, se obtiene la relación entre las cargas aplicadas y los momentos últimos resistentes de la losa. Las rotaciones y deflexiones elásticas no se tienen en cuenta al enunciar las ecuaciones de trabajo, puesto que son muy pequeñas en comparación con las deformaciones plásticas.

a. Trabajo externo realizado por las cargas

Al imponer un desplazamiento virtual pequeño, una carga externa que actúa sobre un segmento de losa realiza un trabajo igual al producto de su magnitud constante por la distancia a lo largo de la cual se mueve el punto de aplicación de la carga. Si la carga está distribuida sobre una longitud o sobre un área, en vez de ser concentrada, el trabajo puede calcularse como el producto de la carga total por el desplazamiento del punto de aplicación de su resultante.

La figura 14.8 ilustra las bases para el cálculo del trabajo externo para diversos tipos de cargas. Si a una losa cuadrada que soporta una carga concentrada única en su centro (ver la figura

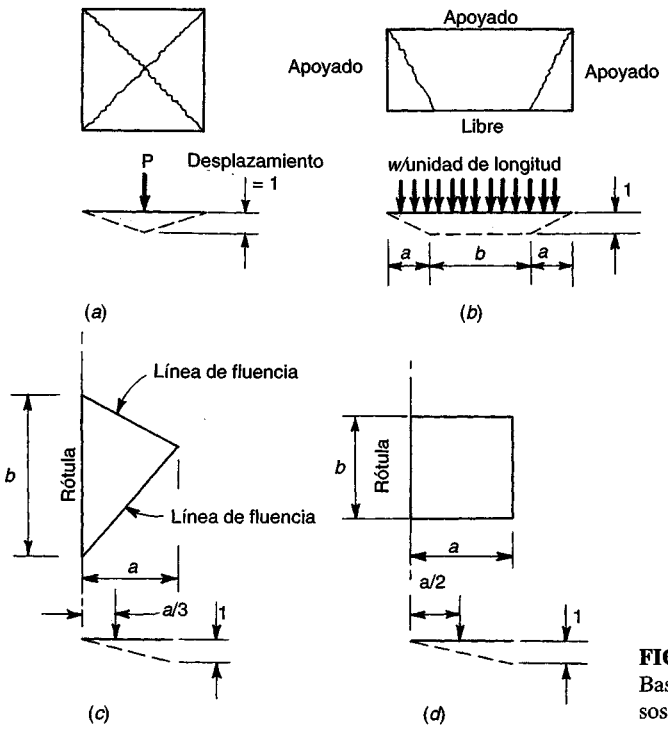


FIGURA 14.8
Bases para el cálculo del trabajo externo para diversos tipos de cargas.

14.8*a*) se le da un desplazamiento virtual definido por un valor unitario bajo la carga, el trabajo externo es

$$W_e = P \times 1 \qquad (a)$$

Si la losa de la figura 14.8*b*, apoyada a lo largo de tres lados y libre en el cuarto, se somete a una carga lineal w por unidad de longitud a lo largo de su borde libre, y si a este borde se le da un desplazamiento virtual con un valor unitario a lo largo de la parte central, el trabajo externo es

$$W_e = (2wa) \times \frac{1}{2} + wb = w(a + b) \qquad (b)$$

Cuando una carga distribuida w por unidad de área actúa sobre un segmento triangular definido por una rótula lineal y por líneas de fluencia, como en la figura 14.8*c*,

$$W_e = \frac{wab}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{wab}{6} \qquad (c)$$

mientras que para el segmento de losa rectangular de la figura 14.8*d*, que sostiene una carga distribuida w por unidad de área, el trabajo externo es

$$W_e = \frac{wab}{2} \qquad (d)$$

Formas trapezoidales más complicadas siempre pueden subdividirse en sus componentes triangulares y rectangulares. El trabajo externo total se calcula entonces, sumando el trabajo hecho por las cargas sobre las partes individuales de los mecanismos de falla, con todos los desplazamientos referidos a un valor unitario asignado en cualquier parte del sistema. No hay dificultades al combinar el trabajo realizado por cargas concentradas, lineales y distribuidas, cuando éstas actúan en combinación.

b. Trabajo interno realizado por los momentos resistentes

El trabajo interno hecho durante la aplicación de un desplazamiento virtual se encuentra sumando los productos de los momentos de fluencia m por unidad de longitud de rótula, por las rotaciones

plásticas θ en las respectivas líneas de fluencia, consistentes con el desplazamiento virtual. Si el momento resistente m es constante a lo largo de la línea de fluencia de longitud l, y si se experimenta una rotación θ el trabajo interno es,

$$W_i = ml\theta \qquad (e)$$

Si el momento resistente varía, como sería el caso en que el tamaño o el espaciamiento de las barras no sea constante a lo largo de la línea de fluencia, ésta última se divide en n segmentos dentro de cada uno de los cuales el momento es constante. El trabajo interno es entonces

$$W_i = (m_1 l_1 + m_2 l_2 + \ldots + m_n l_n)\theta \qquad (f)$$

Para todo el sistema, el trabajo interno total realizado es la suma de las contribuciones de todas las líneas de fluencia. Observe que en todos los casos la contribución del trabajo interno es positiva, independientemente del signo de m, porque la rotación ocurre en la misma dirección que el momento. Por otro lado, el trabajo externo puede ser positivo o negativo según la dirección del desplazamiento del punto de aplicación de la resultante de fuerzas.

Ejemplo 14.3. Análisis de una losa en una dirección mediante el método de trabajo virtual. Determine la capacidad de carga de la losa continua en una dirección (cargada uniformemente) que aparece en la figura 14.9, utilizando el método de trabajo virtual. Los momentos resistentes de la losa son 5.0, 5.0 y 7.5 klb-pie/pie en A, B y C respectivamente.

Solución. Se aplica una deflexión unitaria en el punto B de la losa. Entonces, el trabajo externo realizado por la carga es la suma de las cargas multiplicadas por sus desplazamientos y es igual a

$$\frac{wx}{2} + \frac{w}{2}(10 - x)$$

Las rotaciones en las rótulas se calculan en términos de la deflexión unitaria (ver la figura 14.9) y son

$$\theta_A = \theta_{B1} = \frac{1}{x} \qquad \theta_{B2} = \theta_C = \frac{1}{10 - x}$$

El trabajo interno es la suma de los momentos multiplicados por sus correspondientes ángulos de rotación:

$$5 \times \frac{1}{x} \times 2 + 5 \times \frac{1}{10 - x} + 7.5 \times \frac{1}{10 - x}$$

Al igualar el trabajo externo con el interno, se obtiene:

$$\frac{wx}{2} + 5w - \frac{wx}{2} = \frac{10}{x} + \frac{5}{10 - x} + \frac{7.5}{10 - x}$$

$$5w = \frac{10}{x} + \frac{25}{2(10 - x)}$$

$$w = \frac{2}{x} + \frac{5}{2(10 - x)}$$

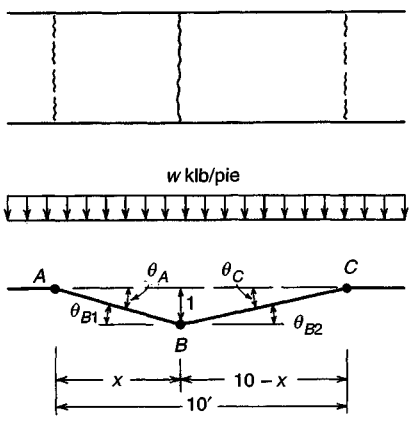


FIGURA 14.9
Análisis de una losa, en una dirección, mediante el método del trabajo virtual.

Para determinar el valor mínimo de w, esta expresión se deriva con respecto a x y se iguala a cero:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{2}{x^2} + \frac{5}{2(10-x)^2} = 0$$

A partir de lo cual

$$x = 4.75 \text{ pies}$$

Al sustituir este valor en la expresión anterior para w, se obtiene

$$w = 0.89 \text{ klb/pie}^2$$

como antes.

En muchos casos, en particular aquéllos con líneas de fluencia definidas mediante varias dimensiones desconocidas (como en la figura 14.4*f*), la solución directa por el método del trabajo virtual resultaría bastante tediosa. Las derivadas ordinarias en el ejemplo anterior se remplazarían por varias derivadas parciales, produciendo un conjunto de ecuaciones que deben resolverse simultáneamente. En estos casos, por lo general es más conveniente seleccionar una sucesión arbitraria de ubicaciones posibles de líneas de fluencia, resolver los mecanismos resultantes para la carga desconocida (o para el momento desconocido) y determinar la carga mínima correcta (o el momento máximo) por tanteos.

Ejemplo 14.4. Análisis de una losa rectangular mediante el método de trabajo virtual. La losa en dos direcciones de la figura 14.10 está simplemente apoyada en los cuatro lados y soporta una carga última, uniformemente distribuida, de w lb/pie^2. Determine la resistencia última a momento de la losa que se va a reforzar de manera isotrópica.

Solución. Se formarán líneas de fluencia positivas siguiendo el patrón que se ilustra en la figura 14.10*a*, con la dimensión a como incógnita. La dimensión correcta a será aquella que maximice la resistencia a momento requerida para soportar la carga w. Los valores de a y m se determinarán por tanteos.

En la figura 14.10*a*, la longitud de la línea de fluencia diagonal es $\sqrt{25+a^2}$. A partir de la semejanza de triángulos,

$$b = 5\frac{\sqrt{25+a^2}}{a} \qquad c = a\frac{\sqrt{25+a^2}}{5}$$

Entonces, la rotación de la rótula plástica en la línea de fluencia diagonal correspondiente a una deflexión unitaria en el centro de la losa (ver la figura 14.10*b*) es

$$\theta_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a}{5\sqrt{25+a^2}} + \frac{5}{a\sqrt{25+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{25+a^2}}\left(\frac{a}{5} + \frac{5}{a}\right)$$

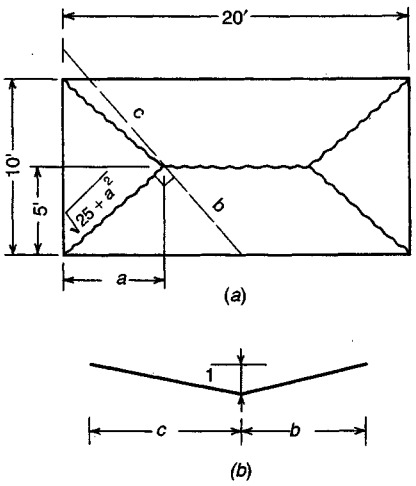


FIGURA 14.10
Análisis de una losa rectangular en dos direcciones mediante el método de trabajo virtual.

La rotación de la línea de fluencia paralela a los lados largos de la losa es:

$$\theta_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0.40$$

Para un primer ensayo tome $a = 6$ pies. Entonces, la longitud de la línea de fluencia diagonal es

$$\sqrt{25 + 36} = 7.81 \text{ pies}$$

La rotación en la línea de fluencia diagonal es:

$$\theta_1 = \frac{1}{7.81}\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{6}\right) = 0.261$$

En la línea de fluencia central, se tiene $\theta_2 = 0.40$. El trabajo interno realizado al aplicar el incremento en la deflexión es

$$W_i = (m \times 7.81 \times 0.261 \times 4) + (m \times 8 \times 0.40) = 11.36m$$

El trabajo externo realizado durante la misma deflexión es

$$W_e = (10 \times 6 \times \tfrac{1}{2}w \times \tfrac{1}{3} \times 2) + (8 \times 5w \times \tfrac{1}{2} \times 2) + (12 \times 5 \times \tfrac{1}{2}w \times \tfrac{1}{3} \times 2) = 80w$$

Al igualar W_i y W_e, se obtiene

$$m = \frac{80w}{11.36} = 7.05w$$

Tanteos sucesivos para diferentes valores de a generan los siguientes datos:

a	W_i	W_e	m
6.0	$11.36m$	$80.0w$	$7.05w$
6.5	$11.08m$	$78.4w$	$7.08w$
7.0	$10.87m$	$76.6w$	$7.04w$
7.5	$10.69m$	$75.0w$	$7.02w$

Resulta evidente que el patrón de líneas de fluencia definido mediante $a = 6.5$ pies es crítico. El momento resistente requerido para la losa dada es $7.08w$.

14.6 REFUERZO ORTOTRÓPICO Y LÍNEAS DE FLUENCIA OBLICUAS

Por lo general, el refuerzo de la losa se coloca ortogonalmente, es decir, en dos direcciones perpendiculares. El mismo refuerzo puede proporcionarse en cada dirección, pero en muchos casos prácticos se logra un diseño más económico utilizando refuerzo con diferentes áreas de barras o diversos espaciamientos en cada una de las direcciones. En estos casos, se dice que el refuerzo es ortogonalmente anisotrópico o simplemente ortotrópico.

Con frecuencia, las líneas de fluencia se desarrollan formando un ángulo con las direcciones establecidas por el refuerzo; éste fue el caso en muchos de los ejemplos que se analizaron anteriormente. Para el estudio de líneas de fluencia, es necesario calcular el momento resistente por unidad de longitud a lo largo de estas líneas de fluencia oblicuas. Esto requiere el cálculo de las contribuciones a la resistencia de cada uno de los dos conjuntos de barras.

La figura 14.11*a* presenta una malla ortogonal de refuerzo, que forma un ángulo α entre la línea de fluencia y las barras en la dirección X. Las barras en la dirección X están colocadas con un espaciamiento v y tienen un momento resistente m_y por unidad de longitud con respecto al eje Y, mientras que las barras en la dirección Y tienen un espaciamiento u y un momento resistente m_x por unidad de longitud con respecto al eje X. Los momentos resistentes por unidad de longitud

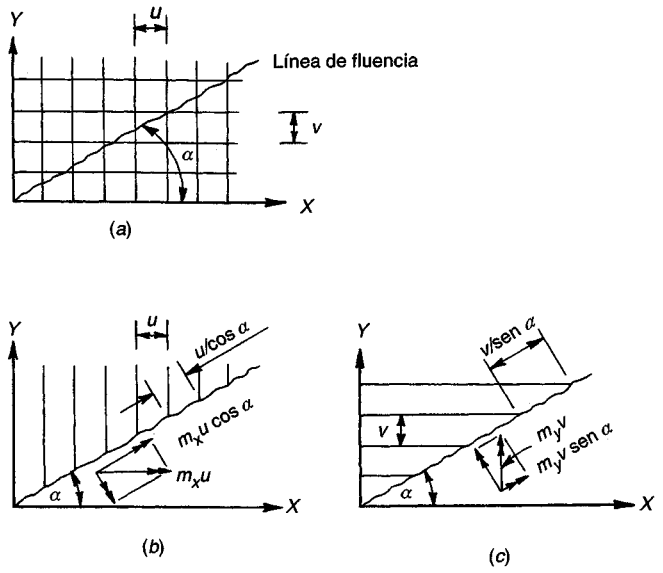


FIGURA 14.11
Línea de fluencia oblicua con refuerzo ortotrópico: (*a*) malla ortogonal y línea de fluencia; (*b*) barras en la dirección *Y*; (*c*) barras en la dirección *X*.

para las barras en las direcciones *Y* y *X* se determinarán por separado, con referencia a las figuras 14.11*b* y *c*, respectivamente.

Para las barras en la dirección *Y*, el momento resistente por barra con respecto al eje *X* es $m_x u$ y la componente de esta resistencia alrededor del eje α es $m_x u \cos \alpha$. El momento resistente por unidad de longitud α lo largo del eje a suministrado por las barras en la dirección *Y* es, por consiguiente,

$$m_{\alpha y} = \frac{m_x u \cos \alpha}{u/\cos \alpha} = m_x \cos^2 \alpha \qquad (a)$$

Para las barras en la dirección *X*, el momento resistente por barra con respecto al eje *Y* es $m_y v$, y la componente de esa resistencia con respecto al eje α es $m_y v \operatorname{sen} \alpha$. Así que, el momento resistente por unidad de longitud a lo largo del eje α que proveen las barras en la dirección *X* es

$$m_{\alpha x} = \frac{m_y v \operatorname{sen} \alpha}{v/\operatorname{sen} \alpha} = m_y \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad (b)$$

Así, para la combinación de los conjuntos de barras, el momento resistente por unidad de longitud medido a lo largo del eje α está dado por la suma de las resistencias determinadas por las ecuaciones (*a*) y (*b*):

$$m_\alpha = m_x \cos^2 \alpha + m_y \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad (14.1)$$

Observe que, para el caso especial en que $m_x = m_y = m$, con el mismo refuerzo proporcionado en las dos direcciones,

$$m_\alpha = m(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = m \qquad (14.2)$$

Se dice que la losa está *reforzada isotrópicamente*, con la misma resistencia por unidad de longitud independientemente de la orientación de la línea de fluencia.

El análisis que se acaba de presentar ignora cualquier consideración relacionada con la compatibilidad de deformaciones a lo largo de la línea de fluencia y supone que los desplazamientos al

nivel del acero durante la fluencia, que esencialmente son perpendiculares a la línea de fluencia, son suficientes para producir la fluencia en los dos conjuntos de barras. Esto es razonable de acuerdo con los datos de ensayos, excepto para valores de α cercanos a 0^o o a 90^o. Para estos casos, sería conservador no tener en cuenta la contribución de las barras casi paralelas a la línea de fluencia.

Se ha demostrado que el análisis de una losa ortotrópica puede simplificarse asimilándolo al de una losa isotrópica equivalente, llamada *losa afín*, siempre y cuando la relación entre las áreas de refuerzo negativa y positiva sea la misma en las dos direcciones. Las dimensiones horizontales y las cargas sobre la losa deben modificarse para permitir esta transformación. En las referencias 14.1 a 14.5 se encontrarán detalles con respecto a lo anterior.

Ejemplo 14.5. Momento resistente a lo largo de una línea de fluencia oblicua. La losa de balcón de la figura 14.12 tiene apoyos empotrados a lo largo de dos lados adyacentes y está libre de apoyo en el tercer lado. Está reforzada para flexión positiva con barras No. 5 espaciadas a 10 pulg y con una profundidad efectiva de 5.5 pulg, paralelas al borde libre, y barras No. 4 espaciadas a 10 pulg y con una altura efectiva de 5.0 pulg en dirección perpendicular a ese borde. La resistencia del concreto y el esfuerzo de fluencia del acero son 4000 lb/pulg^2 y 60,000 lb/pulg^2 respectivamente. Un posible mecanismo de falla incluye una línea de fluencia positiva formando un ángulo de 30^o con respecto al borde largo, como se ilustra. Determine el momento resistente total a lo largo de la línea de fluencia positiva suministrado por los dos conjuntos de barras.

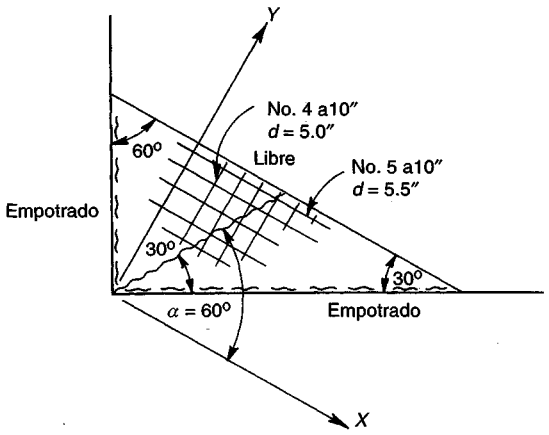


FIGURA 14.12
Ejemplo de línea de fluencia oblicua.

Solución. Se puede confirmar que el momento resistente con respecto al eje X, proporcionado por las barras en la dirección Y, es $m_x = 5.21$ klb-pie/pie y el momento resistente con respecto al eje Y que proveen las barras en la dirección X es $m_y = 8.70$ klb-pie/pie (los dos con un valor $\phi = 0.90$ incluido). La línea de fluencia forma un ángulo de 60^o con las barras en el eje X. Dado que $\cos\alpha = 0.500$ y $\text{sen}\,\alpha = 0.866$, el momento resistente a lo largo del eje α a partir de la ecuación (14.1) es

$$m_\alpha = 5.21 \times 0.500^2 + 8.70 \times 0.866^2 = 7.83 \text{ klb-pie/pie}$$

14.7 CONDICIONES ESPECIALES EN LOS BORDES Y EN LAS ESQUINAS

En los ejemplos anteriores se realizaron algunas simplificaciones para la definición de los patrones de líneas de fluencia en la vecindad de los bordes y de las esquinas. En algunos casos, como en las figuras 14.4*b* y *f*, se indican las líneas de fluencia positivas interceptando un borde en determinado ángulo. En realidad, tanto para los bordes libres como para los simplemente apoyados, los momentos de flexión al igual que los de torsión deben ser en teoría iguales a cero. Los esfuerzos principales son en la dirección paralela y en la perpendicular al borde y, en consecuencia, las líneas de fluencia deben penetrar en un borde en la dirección perpendicular a éste. Los ensayos confirman que lo anterior es cierto, pero las líneas de fluencia cambian de dirección generalmente sólo cuan-

do están muy cerca del borde, donde la distancia t de la figura 14.1 [illegible] ueña en comparación con las dimensiones de la losa (ver la referencia 14.4).

Con referencia a la figura 14.13, la línea de fluencia real de a puede simplificarse prolongándola en línea recta hasta el borde, como en b, si se introduce un par de fuerzas cortantes concentradas m_t en las esquinas de los segmentos de la losa. La fuerza m_t que actúa hacia abajo en la esquina aguda (cruz con círculo), y la fuerza m_t que actúa hacia arriba en la esquina obtusa (punto con círculo) son, conjuntamente, el equivalente estático de los momentos de torsión y de las fuerzas cortantes cerca del borde. En la referencia 14.4 se demuestra que la magnitud de las fuerzas cortantes ficticias m_t está determinada por la expresión

$$m_t = m \cot \alpha \tag{14.3}$$

donde m es el momento resistente por unidad de longitud a lo largo de la línea de fluencia y α es el ángulo agudo entre la línea de fluencia simplificada y el borde de la losa.

Debe observarse que, aunque las fuerzas ficticias entran en la solución por el método de equilibrio, la solución mediante el método de trabajo virtual no se afecta porque el trabajo neto realizado por el par de fuerzas iguales y opuestas que se mueven a través del desplazamiento virtual idéntico es cero.

También, en los ejemplos anteriores se supuso que las líneas de fluencia entraban en las esquinas entre los dos lados que se intersectan. Una alternativa posible es que la línea de fluencia se bifurque antes de alcanzar la esquina, formando lo que se conoce como una *palanca de esquina*, como aparece en la figura 14.14*a*.

Si la esquina no se sujeta hacia abajo, el elemento triangular *abc* pivotearán con respecto al eje *ab* y se levantará de los apoyos. El desarrollo de una palanca de esquina se expone claramente en la figura 14.15. La fotografía muestra un modelo de losa de concreto reforzado que se ensayó con carga uniformemente distribuida. Los bordes estaban simplemente apoyados y no se encontra-

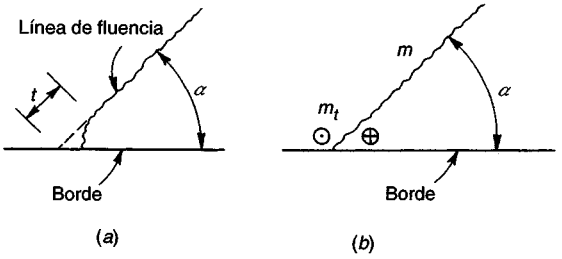


FIGURA 14.13
Condiciones en el borde de una losa: (*a*) línea de fluencia real; (*b*) línea de fluencia simplificada.

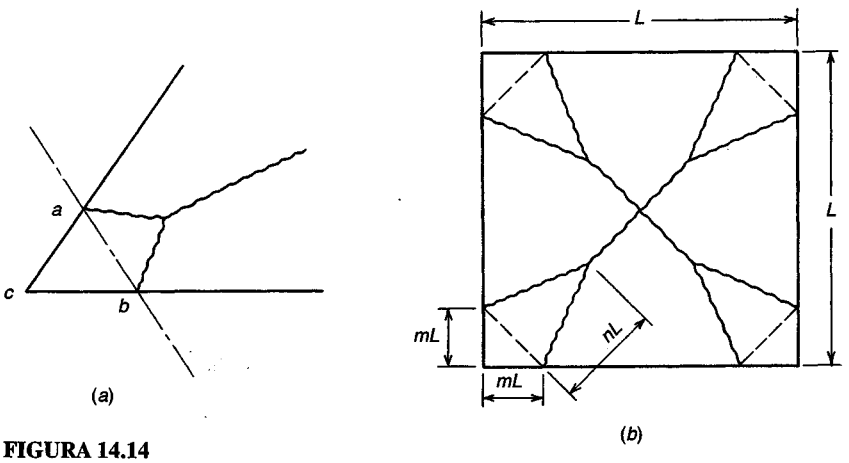


FIGURA 14.14
Condiciones de las esquinas.

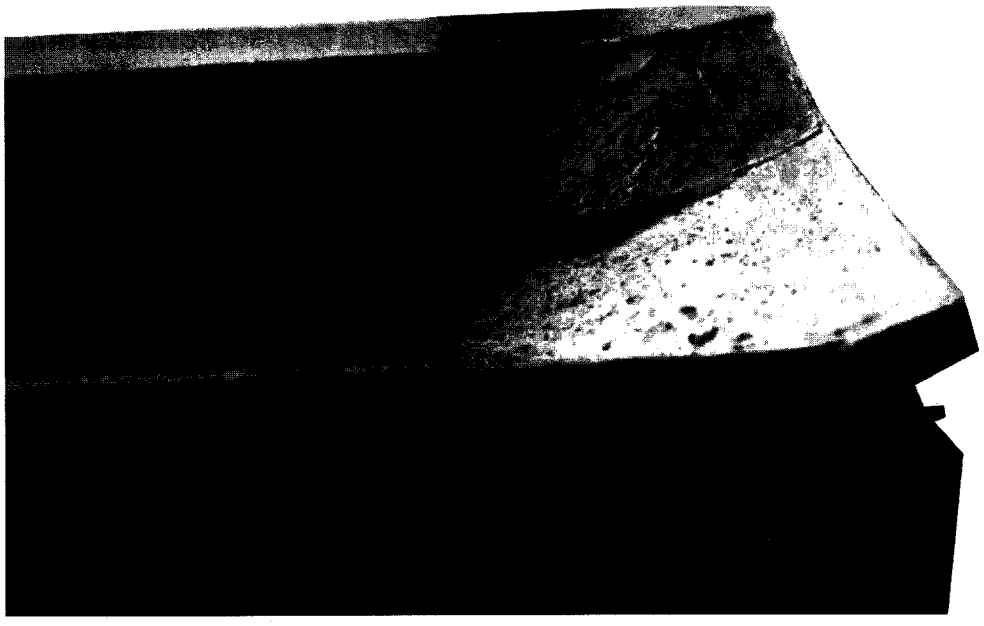


FIGURA 14.15
Desarrollo de palancas de esquina en una losa simplemente apoyada con carga uniforme.

ban restringidos contra movimiento hacia arriba. Si la esquina se sujeta hacia abajo se logra una situación similar, excepto que la línea *ab* se convierte en una línea de fluencia. Si se desea controlar el agrietamiento en las esquinas de estas losas, debe suministrarse acero superior en dirección más o menos perpendicular a la línea *ab*. La dirección tomada por las líneas de fluencia positivas, cerca de las esquinas, indica la conveniencia de refuerzo suplementario en la parte inferior de la losa en las esquinas, colocado en dirección aproximadamente paralela a la línea *ab* (ver la sección 12.6).

Aunque los patrones de líneas de fluencia con palancas de esquina generalmente son más críticos con los que no las tienen, éstas se ignoran a menudo en el análisis de líneas de fluencia. El análisis resulta considerablemente más complicado si se tiene en cuenta la posibilidad de las palancas de esquina, y el margen de error cometido al no tenerlas en cuenta por lo general es pequeño.

Como ilustración, la losa cuadrada cargada uniformemente del ejemplo 14.2, analizada para el patrón de líneas de fluencia supuesto de la figura 14.7, requería una capacidad última a momento de $wL^2/24$. El patrón real de líneas de fluencia en la falla es el que se indica en la figura 14.4*b*. Puesto que se introducen dos parámetros adicionales m y n necesarios para definir el patrón de líneas de fluencia, ahora se requiere un total de tres ecuaciones de equilibrio. Estas ecuaciones se obtienen sumando los momentos y las fuerzas verticales sobre los segmentos de la losa. Este análisis genera un momento resistente requerido de $wL^2/22$, con un aumento aproximado del 9 por ciento en comparación con los resultados de un análisis que desprecia las palancas de esquina. La influencia de estos efectos de esquina puede ser considerablemente mayor cuando el ángulo de la esquina es menor que 90°.

14.8 PATRONES EN FORMA DE ABANICO BAJO CARGAS CONCENTRADAS

Cuando una carga concentrada actúa sobre una losa de concreto reforzado en un punto interior de la misma, lejos de cualquier borde o esquina, se formará una línea de fluencia negativa con un patrón más o menos circular como aparece en la figura 14.16*a* con líneas de fluencia positivas saliendo radialmente a partir del punto de aplicación de la carga. Si el momento resistente positivo por unidad de longitud es m y el negativo es m', los momentos por unidad de longitud que actúan a

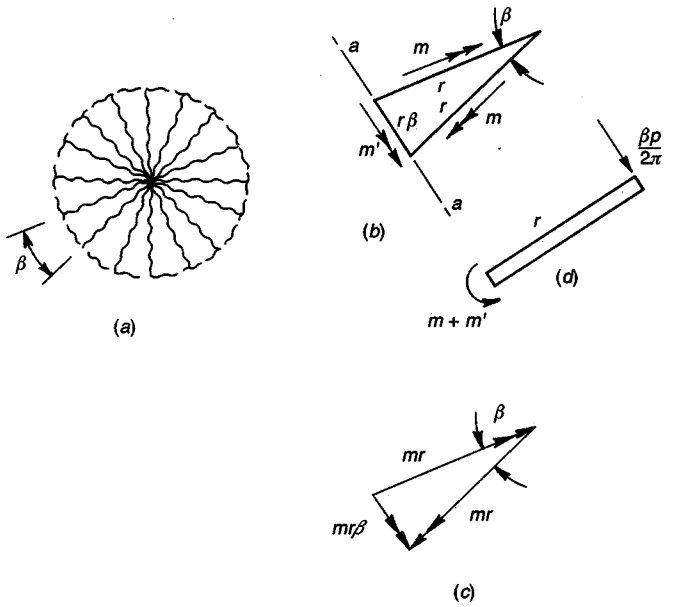


FIGURA 14.16
Patrón de las líneas de fluencia en forma de abanico bajo cargas concentradas: (*a*) líneas de fluencia en forma de abanico; (*b*) vectores de momento actuando sobre un segmento de abanico; (*c*) resultante de los vectores de momento positivo; (*d*) vista de borde de un segmento de abanico.

lo largo de los bordes de un elemento individual del abanico, con un ángulo central β y un radio r, son como los de la figura 14.16*b*. Para valores pequeños del ángulo β el arco a lo largo de la línea de fluencia negativa puede representarse mediante una línea recta con longitud $r\beta$.

La figura 14.16*c* indica la resultante de momentos obtenida mediante la suma vectorial de los momentos positivos mr que actúan a lo largo de los bordes radiales del segmento de abanico. La suma vectorial es igual a $mr\beta$ que actúa a lo largo de la longitud $r\beta$ y el momento positivo resultante por unidad de longitud es, en consecuencia, m. Éste actúa en la misma dirección que el momento negativo m', como se señala en la figura 14.16*d*. Esta figura también muestra la fracción de la carga total P que actúa sobre el segmento de abanico.

Al tomar momentos con respecto al eje *a-a*, se obtiene

$$(m + m')r\beta - \frac{\beta Pr}{2\pi} = 0$$

a partir de lo cual

$$P = 2\pi(m + m') \tag{14.4}$$

Observe que la carga P de colapso resulta independiente del radio r del abanico. Cuando sólo actúa una carga concentrada, puede formarse un abanico completo de cualquier radio sin que cambie la carga de colapso.

Se concluye que la ecuación (14.4) también de la carga de colapso para una losa con extremos empotrados de cualquier forma y que sostiene sólo una carga concentrada P. La única condición necesaria es que la frontera sea capaz de soportar un momento de restricción igual a m' en todos los puntos.

Otros casos de carga de interés práctico, que incluyen una carga concentrada cerca o sobre un borde libre y una carga concentrada sobre una esquina, se tratan en al referencia 14.5. Cargas distribuidas sobre pequeñas áreas y combinaciones de carga se analizan en la referencia 14.12.

14.9 LIMITACIONES DE LA TEORÍA DE LÍNEAS DE FLUENCIA

A partir de las secciones anteriores se hace evidente la utilidad de la teoría de líneas de fluencia. En general, las soluciones elásticas sólo están disponibles para condiciones restringidas, por lo general losas y sistemas de losas rectangulares cargadas de manera uniforme; éstas no tienen en cuenta los efectos de acción inelástica, excepto en forma empírica. Mediante el análisis de líneas de fluencia se puede tener una determinación racional de la resistencia a flexión de losas de cualquier forma, apoyadas de varias maneras, con cargas concentradas al igual que distribuidas y cargas parcialmente distribuidas; los efectos de huecos de cualquier tamaño también pueden incluirse. Se observa entonces, que este método es una poderosa herramienta analítica para el ingeniero estructural.

Por otro lado, como método de límite superior, éste predice una carga de colapso que puede ser mayor que la de colapso real. La capacidad real será menor que la estimada si el mecanismo seleccionado no es el que controla o si la ubicación específica de las líneas de fluencia no es correcta. La mayoría de los ingenieros preferiría un método que, aunque produzca error, esté del lado de la seguridad. A este respecto, el método de las franjas del capítulo 15 es claramente superior.

Además de lo anterior, también es evidente que la teoría de líneas de fluencia ofrece en esencia un método para calcular la capacidad de diseños preliminares, a los cuales se llega mediante cualquier otro medio, más que para determinar la cantidad y el espaciamiento del refuerzo. No es, estrictamente hablando, un método de diseño. Para ilustrar lo anterior, la teoría de las líneas de fluencia no induce al diseñador a colocar acero de manera diferente a un espaciamiento lateral uniforme a lo largo de una línea de fluencia. Por ejemplo, es necesario considerar los resultados del análisis elástico de una placa plana para comprender que, en este caso, el refuerzo debe colocarse conformando bandas más fuertes a través de las columnas.

En la aplicación del análisis de líneas de fluencia a losas, debe recordarse que éste se basa en la capacidad de rotación disponible en dichas líneas. Si el refuerzo de la losa corresponde en forma cercana a la distribución elástica de momentos en la losa, se requiere poca rotación. Si, de otro lado, existe una marcada diferencia, es posible que la rotación requerida exceda la capacidad de rotación disponible, en cuyo caso la losa fallará prematuramente. Sin embargo, puesto que las losas tienen en general muy poco refuerzo, tendrán capacidad de rotación adecuada para alcanzar las cargas últimas estimadas mediante el análisis por líneas de fluencia.

Debe también tenerse en cuenta que el análisis mediante líneas de fluencia se enfoca totalmente hacia la capacidad a flexión de la losa. Se presume que no ocurrirá una falla temprana por cortante o por torsión, y que no se presentarán agrietamientos y deflexiones excesivas para las cargas de servicio. El Código ACI 13.5.1 llama la atención específicamente a la necesidad de cumplir "todas las condiciones de funcionalidad, incluyendo los límites especificados referentes a las deflexiones" y el comentario del ACI 13.5.1 enfatiza la necesidad de una "evaluación de las condiciones de esfuerzos alrededor de los apoyos con relación al cortante y a la torsión al igual que a la flexión".

REFERENCIAS

14.1. A. Ingerslev, "The Strength of Rectangular Slabs", *J. Inst. Struct. Eng.*, London, vol. 1, no. 1, 1923, pp. 3-14.

14.2. K. W. Johansen, *Brutlinieteorier*, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1943 (ver también *Yield Line Theory*, English traslation, Cement and Concrete Association, London, 1962).

14.3. K. W. Johansen, *Pladeformler*, 2d ed., Polyteknisk Forening, Copenhagen, 1949 (ver también *Yield Line Formulae for Slabs*, English traslation, Cement and Concrete Association, London, 1972).

14.4. E. Hognestad, "Yield Line Theory for the Ultimate Flexural Strength of Reinforced Concrete Slabs", *J. ACI*, vol. 24, no. 7, 1953, pp. 637-656.

14.5. L. L. Jones and R. H. Wood, *Yield Line Analysis of Slabs*, American Elsevier, New York, 1967.

14.6. R. Taylor, D. R. H. Maher, and B. Hayes, "Effect of the Arrangement of Reinforcement on the Behavior of Reinforced Concrete Slabs", *Mag. Concr. Res.*, vol. 18, no. 55, 1966, pp. 85-94.

14.7. R. Lenschow and M. A. Sozen, "A Yield Criterion for Reinforced Concrete Slabs", *J. ACI*, vol. 64, no. 5, 1967, pp. 266-273.

14.8. S. H. Simmonds and A. Ghali, "Yield Line Design of Slabs", *J. Struct. Div.*, ASCE, vol. 102, no. ST1, 1976, pp. 109-123.
14.9. K. H. Chu and R. B. Singh, "Yield Analysis of Balcony Floor Slabs", *J. ACI*, vol. 63, no. 5, 1966, pp. 571-586.
14.10. E. C. Demsky and D. S. Hatcher, "Yield Line Analysis of Slabs Supported on Three Sides", *J. ACI*, vol. 66, no. 9, 1969, pp. 741-744.
14.11. A. Zaslavsky and C. H. Avraham, "Yield Line Design of Rectangular Reinforced Concrete Balconies", *J. ACI*, vol. 67, no. 1, 1970, pp. 53-56.
14.12. H. Gesund, "Limit Design of Slabs for Concentrated Loads", *J. Struct. Div.*, ASCE, vol. 107, no. ST9, 1981, pp. 1839-1856.
14.13. A. Zaslavsky, "Yield Line Analysis of Rectangular Slabs with Central Openings", *J. ACI*, vol. 64, no. 12, 1967, pp. 838-844.
14.14. S. Islam and R. Park, "Yield Line Analysis of Two-Way Reinforced Concrete Slabs with Openings", *J. Inst. Struct. Eng.*, vol. 49, no. 6, 1971, pp. 269-276.
14.15. R. Park and W. L. Gamble, *Reinforced Concrete Slabs*, John Wiley and Sons, New York, 1980.

PROBLEMAS

14.1. Una losa cuadrada que mide 10 pies en cada lado está simplemente apoyada en tres de sus lados y libre de apoyo a lo largo del cuarto. Está reforzada para flexión positiva con una malla de acero isotrópica que proporciona una resistencia ϕm_n de 7000 lb-pie/pie en cada una de las dos direcciones principales. Determine la carga uniformemente distribuida que producirá la falla a flexión utilizando el método de trabajo virtual.

14.2. La losa triangular de la figura P14.2 tiene apoyos empotrados a lo largo de dos bordes perpendiculares y está libre de cualquier apoyo en el borde diagonal. El refuerzo negativo en dirección perpendicular a los bordes de apoyo suministra una resistencia de diseño $\phi m_n = 4$ klb-pie/pie. La losa está reforzada para flexión positiva mediante una malla ortogonal que provee una resistencia $\phi m_n = 2.67$ klb-pie/pie en todas las direcciones. Determine la carga mayorada total w_u que producirá la falla a flexión. Se sugiere una solución mediante el método de trabajo virtual.

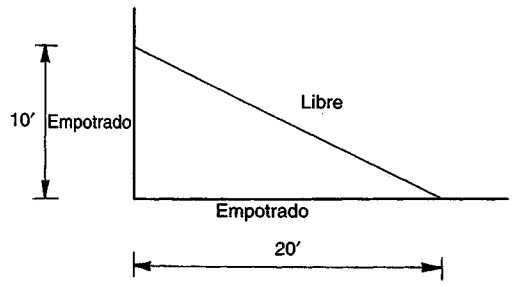


FIGURA P14.2

14.3. La losa de concreto reforzada en una dirección de la figura P14.3 tiene una luz de 20 pies. Está simplemente apoyada en su borde izquierdo, totalmente empotrada en su borde derecho y libre de apoyo a lo largo de los dos lados largos. El refuerzo proporciona una resistencia de diseño $\phi m_n = 5$ klb-pie/pie para flexión positiva y $\phi m_n = 7.5$ klb-pie/pie para flexión negativa en el extremo derecho. Con el método de equilibrio, determine la carga mayorada w_u uniformemente distribuida sobre la superficie, que producirá la falla a flexión.

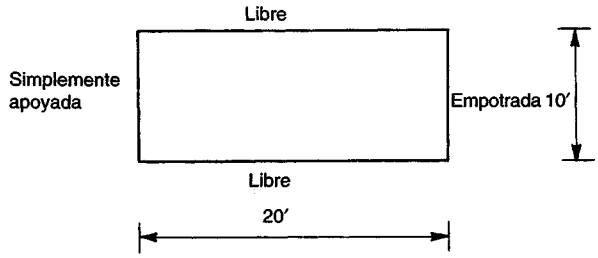


FIGURA P14.3

14.4. Resuelva el problema 14.3 utilizando el método de trabajo virtual.

14.5. La losa triangular que aparece en la figura P14.5 servirá como protección contra el clima sobre un muelle de carga. Las condiciones de apoyo son: esencialmente empotrada a lo largo de AB y BC y borde libre a lo largo de AC. Además de su peso propio, debe tenerse en cuenta una carga muerta superpuesta de 15 lb/pie^2 y una carga viva de servicio de 40 lb/pie^2. Las resistencias de los materiales son f'_c = 4000 lb/pulg^2 y f_y = 60,000 lb/pulg^2. Utilizando el análisis mediante líneas de fluencia, determine el espesor requerido de losa h y encuentre el refuerzo necesario en las secciones críticas. Ignore los pivotes de esquina. Utilice una cuantía máxima de acero de 0.005. Seleccione el tamaño de las barras y su espaciamiento e incluya un esquema que resuma los aspectos importantes del diseño. Haga una verificación aproximada pero conservadora de la seguridad contra falla a cortante para el diseño. Incluya también un estimativo conservador de la deflexión cercana al centro del borde AC que ocasiona la carga viva total.

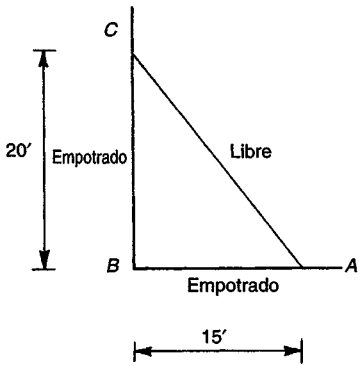


FIGURA P14.5

14.6. La losa cuadrada de concreto de la figura P14.6 está soportada por muros monolíticos de concreto que proporcionan restricción total vertical y rotacional a lo largo de dos bordes adyacentes, y por una columna en tubo de acero de 6 pulg de diámetro, cercana a la esquina exterior, que ofrece restricción rotacional insignificante. Está reforzada para flexión positiva mediante una malla ortogonal de barras paralelas a los muros, la cual suministra una capacidad de diseño a momento ϕm_n = 6.5 klb-pie/pie en todas las direcciones. El refuerzo negativo en dirección perpendicular a los muros, y las barras negativas en la esquina exterior paralelas a la diagonal de la losa, proveen un ϕm_n = 8.9 klb-pie/pie. Ignorando los pivotes de esquina, determine la carga mayorada total uniformemente distribuida w_u que iniciará la falla a flexión. Se recomienda la solución mediante el método de trabajo virtual con una geometría de colapso establecida mediante ensayos sucesivos. Las longitudes de las líneas de fluencia y las distancias perpendiculares se determinan más fácilmente en forma gráfica.
Incluya una revisión de la capacidad a cortante de la losa utilizando métodos aproximados. La columna de acero está coronada con una platina de 12 × 12 pulg que suministra el área de contacto.

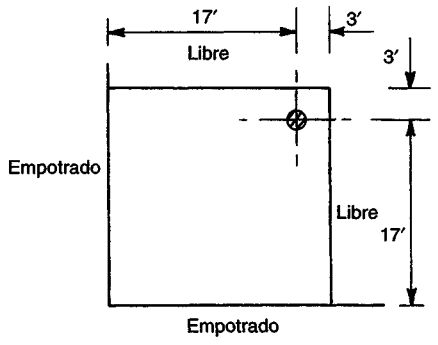


FIGURA P14.6

14.7. La losa cuadrada que aparece en la figura P14.7, monolítica con un muro de concreto reforzado a lo largo del borde CD, el cual le proporciona empotramiento total, también se apoya en el muro de mampostería AB que proporciona una línea de apoyo simple. La losa debe sostener una carga mayorada w_u = 300 lb/pie^2 incluyendo su peso propio. Suponiendo un espesor de losa uniforme de 6 pulg, determine el refuerzo requerido. Incluya un esquema que resuma los detalles de su diseño indicando la

ubicación y la longitud de todas las barras de refuerzo. Revise también la capacidad a cortante de la estructura adoptando cualquier supuesto que parezca razonable y necesario. Utilice f'_c = 4000 lb/pulg^2 y f_y = 60,000 lb/pulg^2.

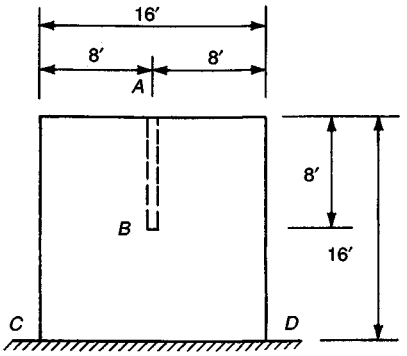


FIGURA P14.7

14.8. La losa de la figura P14.8 está apoyada sobre tres bordes empotrados pero no tiene soporte a lo largo de uno de los lados largos. Tiene un espesor uniforme de 7 pulg, que genera profundidades efectivas en la dirección larga de 6 pulg y en la dirección corta de 5.5 pulg. El refuerzo inferior consta de barras No. 4 espaciadas a 14 pulg entre centros en cada dirección, que continúan hasta los apoyos y hasta el borde libre. El acero negativo superior a lo largo de los bordes apoyados consta de barras No. 4 espaciadas a 12 pulg entre centros, excepto que en una "banda fuerte" de 2 pies de ancho paralela y adyacente al borde libre se utilizan cuatro barras No. 5. Todas las barras negativas se prolongan más allá de los puntos de inflexión como lo requiere el Código ACI. Las resistencias de los materiales son f'_c = 4000 lb/pulg^2 y f_y = 60,000 lb/pulg^2. Utilizando el método de las líneas de fluencia, determine la carga última w_u que puede aplicarse.

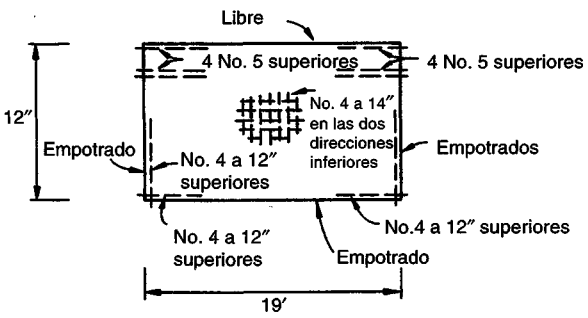


FIGURA P14.8

14.9. Utilizando el método de trabajo virtual y la teoría de las líneas de fluencia, calcule la carga de colapso a flexión de la losa en una dirección del ejemplo 12.1 del capítulo 12. Suponga que todas las barras que se utilizan son rectas, de acuerdo con la figura 12.4*b*. Compare la carga de colapso calculada con la original de diseño mayorada y comente las diferencias.

14.10. Con el método de trabajo virtual y la teoría de las líneas de fluencia, calcule la carga de colapso a flexión de la losa en dos direcciones apoyada en los bordes del ejemplo 12.2 del capítulo 12. Para facilitar los cálculos, suponga que todas las barras que se utilizan son rectas y que todo el acero para momento positivo se lleva hasta la cara de las vigas de apoyo, sin que se corten barras en la longitud de la luz. Ignore los efectos de esquina. Observe que el efecto de la continuidad sobre una viga de borde es correr la línea de fluencia del momento positivo, alejándola de ese borde hacia el borde discontinuo en el lado opuesto. Compare la carga de colapso calculada con la original de diseño mayorada y comente las diferencias.

14.11. Utilizando el método de trabajo virtual y la teoría de líneas de fluencia, calcule la carga de colapso a flexión de la placa plana en dos direcciones apoyadas sobre columnas del ejemplo 13.2 del capítulo 13. Para simplificar los cálculos, suponga que todas las barras para momentos positivos se llevan hasta los bordes de los paneles sin que se corten en la luz. Tenga en cuenta todos los posibles mecanismos de falla, incluyendo un abanico circular alrededor de la columna. Los efectos de esquina son insignificantes. Compare la carga de colapso calculada con la original de diseño mayorada y comente las diferencias.

CAPÍTULO

15 MÉTODO DE LAS FRANJAS PARA Llosas

15.1 INTRODUCCIÓN

En la sección 14.2 del capítulo 14 se presentaron los teoremas del límite superior e inferior de la teoría de la plasticidad y se señaló que el método de líneas de fluencia para el análisis de losas es un *método de límite superior* para determinar la resistencia a flexión última de losas. Un análisis de límite superior, si no se realiza correctamente, no será seguro. La capacidad de carga real será menor o, en el mejor de los casos, igual a la capacidad estimada, lo que causa preocupación en el diseño. También, cuando se aplica el método de las líneas de fluencia, es necesario suponer que se conoce la distribución del refuerzo sobre la totalidad de la losa. Se concluye que el método de las líneas de fluencia es una herramienta para *revisar* la capacidad de una determinada losa y puede utilizarse en *diseño* únicamente de manera iterativa, para calcular las capacidades de diseños tentativos con diferentes refuerzos hasta que se encuentre una distribución satisfactoria.

Estas circunstancias motivaron a Hillerborg a desarrollar lo que se conoce como el *método de las franjas* para el diseño de losas, cuyos primeros resultados se publicaron en idioma sueco en 1956 (ver la referencia 15.1). En contraste con el análisis mediante líneas de fluencia, el de las franjas es un *método de límite inferior* que se basa en el cumplimiento de los requisitos de equilibrio en toda la losa. Mediante este método (llamado algunas veces *teoría del equilibrio*), se determina inicialmente un campo de momentos que cumple los requisitos de equilibrio; después, se diseña el refuerzo de la losa en cada punto para este campo de momentos. Si se puede encontrar una distribución de momentos que satisfaga tanto el equilibrio como las condiciones de frontera para determinada distribución de cargas externas, y si la capacidad a momentos de fluencia de la losa no se excede en ninguna parte, entonces la distribución de cargas externas representará un límite inferior de la capacidad de carga real.

El método de las franjas ofrece resultados con respecto a la seguridad, lo que en la práctica es preferible, y las diferencias con respecto a la capacidad de carga real no afectarán en ningún momento esta seguridad. El método de las franjas es un método de diseño mediante el cual puede calcularse el refuerzo necesario. El método anima al diseñador a variar el refuerzo de manera lógica llevando a una distribución económica del acero al igual que a un diseño seguro. Por lo general es muy sencillo de utilizar, aún para losas con huecos o con límites irregulares.

En su trabajo original de 1956, Hillerborg estableció los principios básicos para losas apoyadas en los bordes e introdujo la expresión "método de las franjas" (ver la referencia 15.1). Posteriormente, amplió la teoría para incluir el diseño práctico de losas apoyadas en columnas y de losas con forma de L (ver las referencias 15.2 y 15.3). El primero en tratar este tema en inglés fue Crawford (ver la referencia 15.4). En 1964, Blakely tradujo al inglés el primer trabajo de Hillerborg (ver la referencia 15.5). Kemp (ver las referencias 15.6 y 15.7), y Wood y Armer (ver las referencias 15.8, 15.9 y 15.10) hicieron contribuciones importantes particularmente con relación a las condiciones de continuidad. Armer (ver la referencia 15.11) llevó a cabo pruebas de carga en losas diseñadas mediante el método de las franjas y confirmó que éste producía diseños seguros y satisfactorios. Más recientemente, Hillerborg escribió un libro "dirigido al diseñador práctico, para ayudarlo de la manera más sencilla posible a generar diseños seguros para muchas de las losas que se presentan en la práctica, incluyendo losas irregulares en planta o losas que soportan cargas no uniformes" (ver la referencia 15.12). Posteriormente publicó un artículo donde resumió lo que se conoce ahora como el "método avanzado de las franjas", que se relaciona con el diseño de losas apoyadas sobre columnas, esquinas entrantes o muros interiores (ver la referencia 15.13). En la referencia 15.14 se encuentra un resumen muy útil de los métodos simple y avanzado de las franjas.

El método de las franjas es atractivo no sólo porque es seguro, económico y versátil para un amplio rango de aplicaciones, sino también porque formaliza los procedimientos que siguen de manera instintiva los diseñadores competentes para colocar el refuerzo en la mejor posición posible. En contraste con el método de las líneas de fluencia, que no induce a variar el espaciamiento de las barras, el de las franjas promueve la utilización de bandas fuertes de acero donde se necesitan (como alrededor de las aberturas o sobre las columnas), lo cual mejora la economía y reduce la posibilidad de agrietamiento excesivo o de deflexiones considerables bajo cargas de servicio.

15.2 PRINCIPIOS BÁSICOS

La ecuación de equilibrio que regula el comportamiento de un pequeño elemento de losa con lados dx y dy es

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -w \tag{15.1}$$

donde w es la carga externa por unidad de área; m_x y m_y son los momentos flectores por unidad de ancho en las direcciones X y Y respectivamente, y m_{xy} es el momento torsor (ver la referencia 15.15). De acuerdo con el teorema del límite inferior, cualquier combinación de m_x, m_y y m_{xy} que satisfaga las ecuaciones de equilibrio en todos los puntos de la losa y que cumpla las condiciones de frontera es una solución válida, siempre y cuando se coloque refuerzo para soportar estos momentos.

La base para el método simple de las franjas consiste en suponer que el momento torsor es igual a cero; se desprecia la resistencia a torsión de la losa. Por consiguiente, si el refuerzo es paralelo a los ejes en un sistema coordenado rectilíneo,

$$m_{xy} = 0$$

La ecuación de equilibrio se reduce entonces a

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -w \tag{15.2}$$

Esta ecuación puede dividirse convenientemente en dos partes, que representan la acción de una franja de viga sin torsión,

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -kw \tag{15.3a}$$

y

$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -(1 - k)w \tag{15.3b}$$

donde la proporción de la carga que toman las franjas en la dirección X es k y en la dirección Y es $(1 - k)$. En muchas zonas de la losa, el valor de k será 0 ó 1. Con un valor de $k = 0$ las franjas transmiten toda la carga en la dirección Y; con un valor de $k = 1$ toda la carga se transmite en la dirección X. En otras zonas, es razonable suponer que la carga se divide igualmente en las dos direcciones (es decir, $k = 0.5$).

15.3 SELECCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS

Teóricamente, la carga w puede dividirse arbitrariamente entre las direcciones X y Y. Diferentes proporciones llevarán naturalmente a patrones diversos de refuerzo y no todas serán igualmente apropiadas. El objetivo deseado es llegar a una distribución de acero que sea segura y económica y que evite problemas a nivel de cargas de servicio, asociados con agrietamientos o deflexiones excesivas. En general, el diseñador puede guiarse por su conocimiento sobre la distribución general de momentos elásticos.

Para observar un ejemplo del método de las franjas e ilustrar las posibilidades abiertas al diseñador, considere la losa cuadrada simplemente apoyada de la figura 15.1, con una longitud de lados a y una carga última (mayorada) y uniformemente distribuida w por unidad de área.

La distribución de carga más sencilla se obtiene estableciendo un valor de $k = 0.5$ sobre la totalidad de la losa, como aparece en la figura 15.1. La carga sobre todas las franjas en cada una de las direcciones es entonces $w/2$, como lo ilustran las flechas de dispersión de carga de la figura 15.1*a*. Esto da valores máximos de momentos de diseño

$$m_x = m_y = \frac{wa^2}{16} \tag{15.4}$$

sobre la totalidad de la losa, como se indica en la figura 15.1*c*, con una distribución transversal uniforme a lo ancho de la sección crítica, como se observa en la figura 15.1*d*.

Esto no representaría una solución económica o funcional puesto que se sabe que las curvaturas, y por tanto los momentos, deben ser mayores en las franjas cercanas al centro de la losa que en las próximas a los bordes en la dirección paralela a éstos (ver la figura 12.5). Si se reforzara la losa de acuerdo con esta solución, se requeriría una extensa redistribución de momentos acompañada, en efecto, por un amplio agrietamiento en las zonas de altos esfuerzos cercanas al centro de la losa.

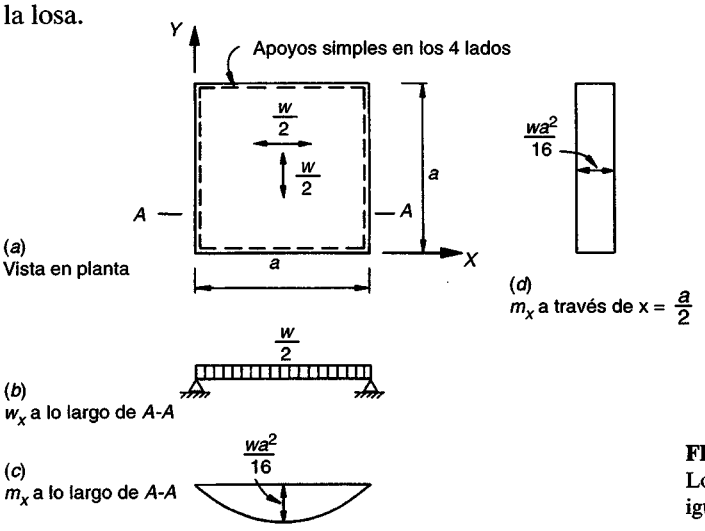


FIGURA 15.1
Losa cuadrada con carga compartida igualmente en dos direcciones.

Una distribución alterna más razonable se presenta en la figura 15.2. En ésta, las zonas con dispersiones diferentes de carga, separadas por las "líneas de discontinuidad" con rayas y puntos, siguen las diagonales y toda la carga sobre cualquier zona se transmite en la dirección que da la distancia mínima hasta el apoyo más cercano. La solución se obtiene con valores de k de 0 ó 1 según la región, con la carga transmitida en las direcciones indicadas por las flechas de la figura 15.2*a*. Para la franja *A-A*, a una distancia $y \leq a/2$ desde el eje X, el momento de diseño es

$$m_x = \frac{wy^2}{2} \tag{15.5}$$

La carga que actúa sobre la franja *A-A* se ilustra en la figura 15.2*b* y el diagrama resultante de momentos m_x se presenta en la figura 15.2*c*. La variación transversal de m_x a lo ancho de la losa se indica en la figura 15.2*d*.

La distribución transversal de momentos de la figura 15.2*d* requeriría teóricamente un espaciamiento de barras continuamente variable, lo cual es por supuesto impráctico. Una manera de utilizar la distribución de la figura 15.2, que es considerablemente más económica que la de la figura 15.1, sería reforzar para el momento *promedio* en un ancho determinado, tratando de aproximar la variación transversal real de la figura 15.2*d* de manera escalonada. Hillerborg indica que esto no está estrictamente de acuerdo con la teoría del equilibrio y así la seguridad se ve afectada, pero que otros supuestos conservadores, por ejemplo el hecho de ignorar la resistencia por el efecto de membrana en la losa y el endurecimiento por deformación del refuerzo, compensarán la pequeña reducción en el margen de seguridad.

Una tercera alternativa de distribución se expone en la figura 15.3. En este caso la división se hace de manera que la carga se transmita al apoyo más cercano, como antes, pero las cargas cercanas a las diagonales se dividen de modo que se transmita la mitad en cada una de las direcciones. Así, se asignan valores a k de 0 ó 1 a lo largo de los bordes centrales, y de 0.5 en las esquinas y en el centro de la losa, con dispersión de carga en las direcciones indicadas por las flechas de la figura

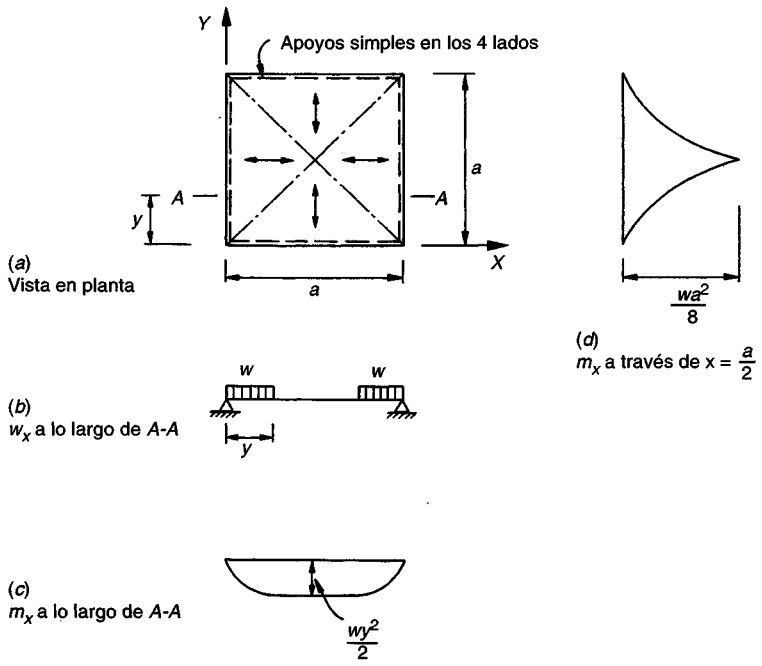


FIGURA 15.2
Losa cuadrada con líneas de dispersión de la carga a lo largo de las diagonales.

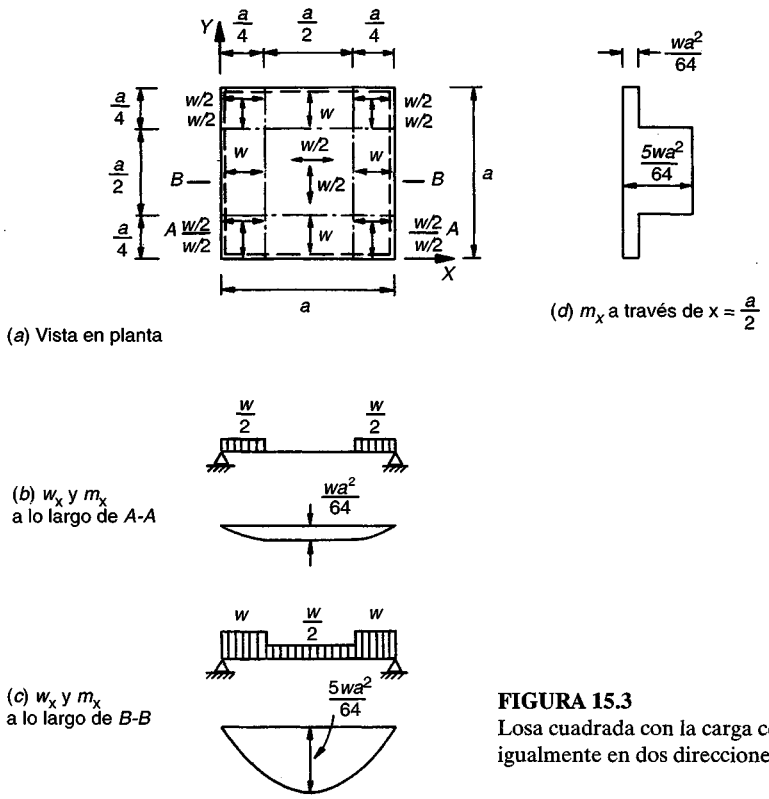


FIGURA 15.3
Losa cuadrada con la carga cercana a las diagonales, compartida igualmente en dos direcciones.

15.3*a*.Se identifican ahora dos distribuciones de carga diferentes en las franjas. Para una franja en la dirección X a lo largo de la sección A-A, el momento máximo es

$$m_x = \frac{w}{2} \times \frac{a}{4} \times \frac{a}{8} = \frac{wa^2}{64} \tag{15.6a}$$

y para una franja a lo largo de la sección B-B, el momento máximo es

$$m_x = w \times \frac{a}{4} \times \frac{a}{8} + \frac{w}{2} \times \frac{a}{4} \times \frac{3a}{8} = \frac{5wa^2}{64} \tag{15.6b}$$

Este diseño lleva a una distribución práctica del refuerzo, con un espaciamiento constante a través de la franja central de ancho $a/2$ y con un espaciamiento mayor que pasa por las franjas exteriores, donde se sabe que las curvaturas y momentos elásticos son menores. Así se evita promediar los momentos, como era necesario en la segunda solución, y esta tercera opción es totalmente consistente con la teoría del equilibrio.

Al comparar las tres soluciones que se acaban de presentar, se concluye que la primera no resultaría satisfactoria como se anotó anteriormente porque para que ésta sea posible se requiere una redistribución de momentos muy grande, posiblemente acompañada por agrietamientos excesivos y deflexiones considerables. La segunda, con líneas de discontinuidad que siguen las diagonales de la losa, tiene la ventaja de que el refuerzo se aproxima mejor a la distribución elástica de momentos, pero lleva a un patrón de refuerzo impráctico o requiere promediar los momentos de diseño por bandas, lo cual obliga a una desviación de la estricta teoría del equilibrio. La tercera solución, con líneas de discontinuidad paralelas a los bordes, no exige promediar los momentos y lleva a una distribución del refuerzo práctica, por lo cual ésta será a menudo preferible.

Los tres ejemplos anteriores ilustran la manera simple mediante la cual pueden encontrarse los momentos en la losa utilizando el método de franjas con base en el análisis corriente de vigas. Es importante anotar que las cargas en las vigas de apoyo son relativamente fáciles de determinar porque éstas pueden calcularse en todos los casos a partir de las reacciones en los extremos de las

franjas de viga de la losa. Esta información no está disponible en soluciones como las obtenidas por la teoría de las líneas de fluencia.

15.4 LOSAS RECTANGULARES

Para el caso de losas rectangulares, resulta razonable suponer que en la mayor parte del área la carga se transmitirá en la dirección corta, lo cual es consistente con la teoría elástica (ver la sección 12.4). Además, es importante tener en cuenta el hecho de que por su longitud las barras longitudinales de refuerzo serán más costosas que las transversales con el mismo tamaño y espaciamiento. Para una losa rectangular con carga uniforme sobre apoyos simples Hillerborg presenta una posible división, como se indica en la figura 15.4, con líneas de discontinuidad que se originan en las esquinas de la losa a un ángulo que depende de la relación entre los lados corto y largo de la misma. Se supone que toda la carga en cada zona se transmite en las direcciones señaladas por las flechas.

En vez de la solución de la figura 15.4, que exige una distribución del refuerzo continuamente variable para que sea estrictamente correcta, Hillerborg sugiere que la carga puede distribuirse como en la figura 15.5, con líneas de discontinuidad paralelas a los lados de la losa. Para estos casos, es razonable tomar bandas de borde con ancho igual a un cuarto de la dimensión de la luz corta; así, la carga en las esquinas se divide igualmente en las direcciones X y Y, como se muestra, mientras que para las otras zonas de la losa toda la carga se transmite en la dirección indicada por las flechas.

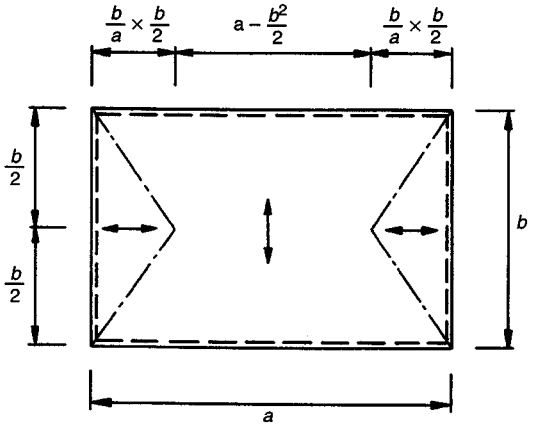


FIGURA 15.4
Losa rectangular con líneas de discontinuidad que se originan en las esquinas.

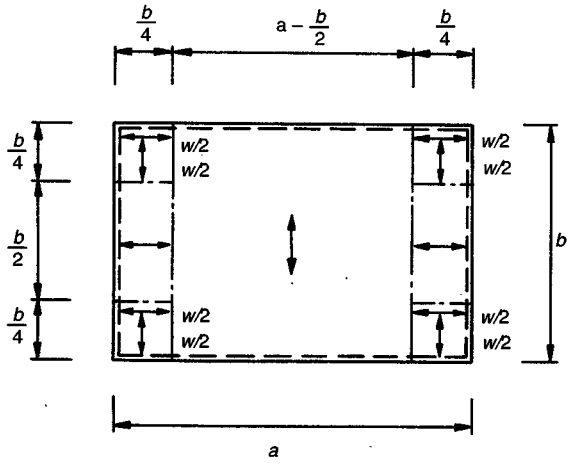


FIGURA 15.5
Líneas de discontinuidad paralelas a los lados de una losa rectangular.

La segunda distribución, que es la preferida, se ilustra en la figura 15.5 y produce los siguientes momentos de diseño:

En la dirección X:

franjas laterales $$m_x = \frac{w}{2} \times \frac{b}{4} \times \frac{b}{8} = \frac{wb^2}{64} \tag{15.7a}$$

franjas centrales $$m_x = w \times \frac{b}{4} \times \frac{b}{8} = \frac{wb^2}{32} \tag{15.7b}$$

En la dirección Y:

franjas laterales $$m_y = \frac{wb^2}{64} \tag{15.8a}$$

franjas centrales $$m_y = \frac{wb^2}{8} \tag{15.8b}$$

Esta distribución, que no exige promediar los momentos a través de los anchos de las bandas, es siempre segura, sencilla y económica.

15.5 BORDES EMPOTRADOS Y CONTINUIDAD

El diseño mediante el método de las franjas demuestra ser muy flexible en la asignación de carga a las diferentes zonas de la losa; esta misma flexibilidad se extiende a la asignación de momentos entre secciones de flexión positiva y negativa para las losas que están empotradas o continuas sobre sus bordes de apoyo. Debe prestarse un poco de atención a las relaciones de momentos elásticos para evitar problemas con agrietamientos y deflexiones para cargas de servicio. Sin embargo, la redistribución que puede alcanzarse en las losas, que están por lo general muy poco reforzadas y tienen en consecuencia grandes capacidades de rotación plástica cuando están sometidas a sobrecargas, permite reajustes arbitrarios considerables de la relación entre los momentos negativo y positivo en una franja.

Esto se ilustra con la figura 15.6, que presenta una franja de losa que soporta cargas únicamente en las zonas cercanas a los apoyos y sin carga en la zona central, lo cual ocurre a menudo cuando se diseña por el método de las franjas. Esta distribución es conveniente si la zona no sometida a carga está sujeta a un momento constante (y a cortante cero), pues esto simplifica la selección del refuerzo positivo. La suma de los valores absolutos del momento positivo en la luz y del momento negativo en el extremo izquierdo o derecho, indicados como m_l y m_r, en la figura 15.6, depende únicamente de las condiciones en los respectivos extremos y es numéricamente igual al momento negativo si la franja transmite la carga como un voladizo. Así que, para determinar los momentos de diseño, se calculan los momentos en "voladizo", se selecciona el momento en la luz y se determinan los momentos correspondientes en los apoyos. Hillerborg anota que, como regla

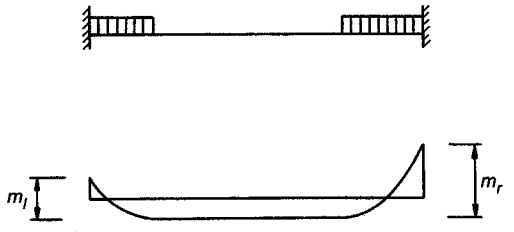


FIGURA 15.6
Franja de losa sin carga en la zona central.

general para bordes empotrados, el momento en el apoyo debe estar aproximadamente entre 1.5 y 2.5 veces el momento en la luz de la misma franja. Para franjas longitudinales que casi no tengan carga deben seleccionarse valores mayores y, en tales casos, puede utilizarse una relación de momentos en el apoyo a momentos en la luz entre 3 y 4. Sin embargo, se ganará muy poco al utilizar estas grandes relaciones si el acero para momento positivo es controlado por los requisitos mínimos del Código ACI.

En franjas de losa con un extremo empotrado y uno simplemente apoyado, los dos objetivos: lograr momento constante en la zona central sin carga y una relación adecuada entre los momentos negativo a positivo, controlan la selección de la ubicación de las líneas de discontinuidad. La figura 15.7*a* presenta una losa rectangular uniformemente cargada con dos bordes adyacentes empotrados y los otros dos simplemente apoyados. Observe que aunque las franjas centrales tienen el mismo ancho que las de la figura 15.5, las líneas de discontinuidad se corren para tener en cuenta la mayor rigidez de las franjas con extremos empotrados. Su localización se define mediante un coeficiente α, con un valor menor que 0.5 para la losa mostrada y cuyo valor exacto debe determinarse en el análisis. Se observará que la selección de α se asocia directamente con la relación de los momentos negativo a positivo en las franjas.

La curva de momentos de la figura 15.7*b* se selecciona de manera que el momento sea constante sobre la zona sin carga, es decir, que la fuerza cortante sea cero. Con un momento constante, el acero positivo puede someterse a sus esfuerzos máximos en la mayor parte de la franja. El máximo momento positivo en la franja central de la dirección X es entonces

$$m_{xf} = \frac{\alpha wb}{2} \times \frac{\alpha b}{4} = \alpha^2 \frac{wb^2}{8} \tag{15.9}$$

El momento de voladizo en el apoyo izquierdo es

$$m_x = (1-\alpha)\frac{wb}{2}(1-\alpha)\frac{b}{4} = (1-\alpha)^2 \frac{wb^2}{8} \tag{15.10}$$

y, por tanto, el momento negativo en el apoyo izquierdo es

$$m_{xs} = (1-\alpha)^2 \frac{wb^2}{8} - \alpha^2 \frac{wb^2}{8} = (1-2\alpha)\frac{wb^2}{8} \tag{15.11}$$

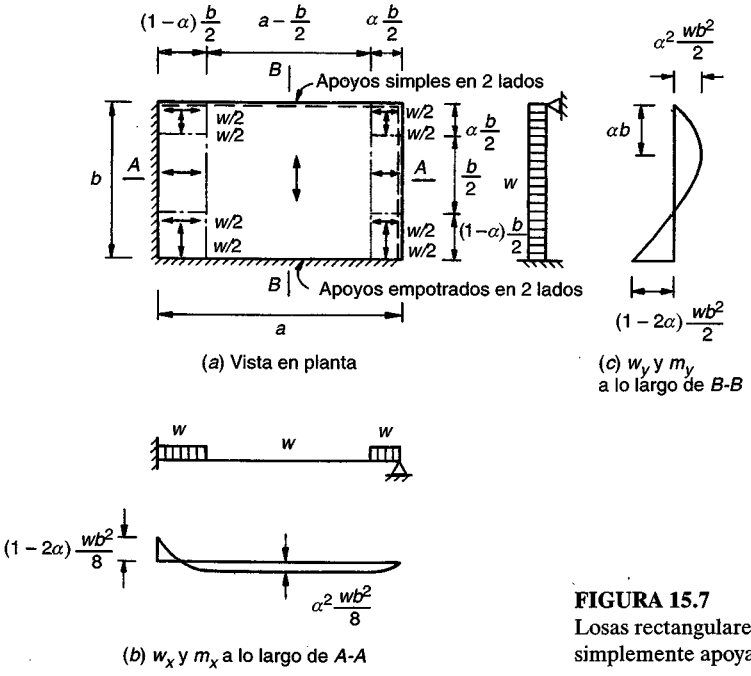


FIGURA 15.7
Losas rectangulares con dos bordes empotrados y dos bordes simplemente apoyados.

Como punto de referencia, la relación de momentos negativo a positivo en la franja central de la dirección X es

$$\frac{m_{xs}}{m_{xf}} = \frac{1 - 2\alpha}{\alpha^2} \tag{15.12}$$

Los momentos en las franjas de borde en la dirección X son iguales a la mitad de aquéllos en las franjas centrales puesto que la carga es la mitad.

Resulta razonable seleccionar la misma relación entre los momentos en el apoyo y en la luz, tanto para la dirección Y como para la dirección X. De acuerdo con esto, la distancia desde el apoyo derecho, figura 15.7*c*, hasta la sección de máximo momento positivo se selecciona como αb. Se obtiene que el máximo momento positivo es

$$m_{yf} = \alpha wb \times \frac{\alpha b}{2} = \alpha^2 \frac{wb^2}{2} \tag{15.13}$$

Al aplicar los mismos métodos que se utilizaron para la dirección X, se obtiene que el momento negativo en el apoyo en la franja central en la dirección Y es

$$m_{ys} = (1 - 2\alpha)\frac{wb^2}{2} \tag{15.14}$$

Se confirma así que los momentos en las franjas de borde en la dirección Y son justo iguales a un octavo de los de la franja central en la misma dirección.

Con las expresiones anteriores, se pueden determinar todos los momentos de diseño de la losa, una vez que se seleccione un valor adecuado de α. A partir de la ecuación (15.12) puede confirmarse que valores de α entre 0.35 y 0.39 dan relaciones correspondientes de los momentos negativo a positivo desde 2.45 hasta 1.45, el intervalo recomendado por Hillerborg. Por ejemplo, si se decide que los momentos en los apoyos deben ser el doble de los momentos en luces, el valor de α debe ser 0.366 y los momentos negativo y positivo en la franja central en la dirección Y son respectivamente $0.134wb^2$ y $0.067wb^2$. En la franja central en la dirección X, los momentos son iguales a un cuarto de los valores anteriores; y en las franjas de borde en ambas direcciones, los momentos son iguales a un octavo de dichos valores.

Ejemplo 15.1. Losa rectangular con bordes empotrados. La figura 15.8 presenta un panel interior típico de una losa de piso con vigas de apoyo en todos los ejes de columnas. Las vigas que se proporcionan serán suficientemente rígidas, tanto a flexión como a torsión, como para suponer que la losa está restringida en todos los lados. Las luces libres de la losa, entre las caras de las vigas, son 25 y 20 pies, como se ilustra. El piso debe soportar una carga viva de servicio de 130 lb/pie^2, utilizando concreto con resistencia $f'_c = 3000$ lb/pulg^2 y acero con $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. Calcule los momentos en todas las secciones críticas y determine el espesor requerido de losa y el refuerzo.

Solución. El espesor mínimo de losa exigido por el Código ACI puede encontrarse a partir de la ecuación (13.8*b*) del capítulo 13, con $l_n = 25$ pies y $\beta = 1.25$:

$$h = \frac{25 \times 12(0.8 + 60/200)}{36 + 9 \times 1.25} = 6.98 \text{ pulg}$$

Se seleccionará un espesor total de 6.75 pulg para el cual $w_d = 150 \times 6.75/12 = 84$ lb/pie^2. Si se aplican los factores de carga usuales de 1.4 y 1.7 a las cargas muerta y viva respectivamente, se encuentra que la carga mayorada total de diseño es 338 lb/pie^2. Para el análisis mediante franjas, las líneas de discontinuidad se seleccionarán como en la figura 15.8, con unas franjas de borde de ancho igual a $b/4 = 20/4 = 5$ pies. En las esquinas, la carga se divide igualmente en las dos direcciones; en los demás sitios, el cien por ciento de la carga se asigna en la dirección indicada por las flechas. Se utilizará una relación entre el momento en el apoyo y el momento en la luz igual a 2.0. El cálculo de los momentos se realiza entonces de la siguiente manera:

Franja central en la dirección X:

$$\text{voladizo } m_x = \frac{wb^2}{32} = 338 \times \frac{400}{32} = 4225 \text{ lb-pie/pie}$$

$$\text{negativo } m_{xs} = 4225 \times \frac{2}{3} = 2817$$

$$\text{positivo } m_{xf} = 4225 \times \frac{1}{3} = 1408$$

Franjas de borde en la dirección X:

$$\text{voladizo } m_x = \frac{wb^2}{64} = 2113 \text{ lb-pie/pie}$$

$$\text{negativo } m_{xs} = 2113 \times \frac{2}{3} = 1408$$

$$\text{positivo } m_{xf} = 2113 \times \frac{1}{3} = 704$$

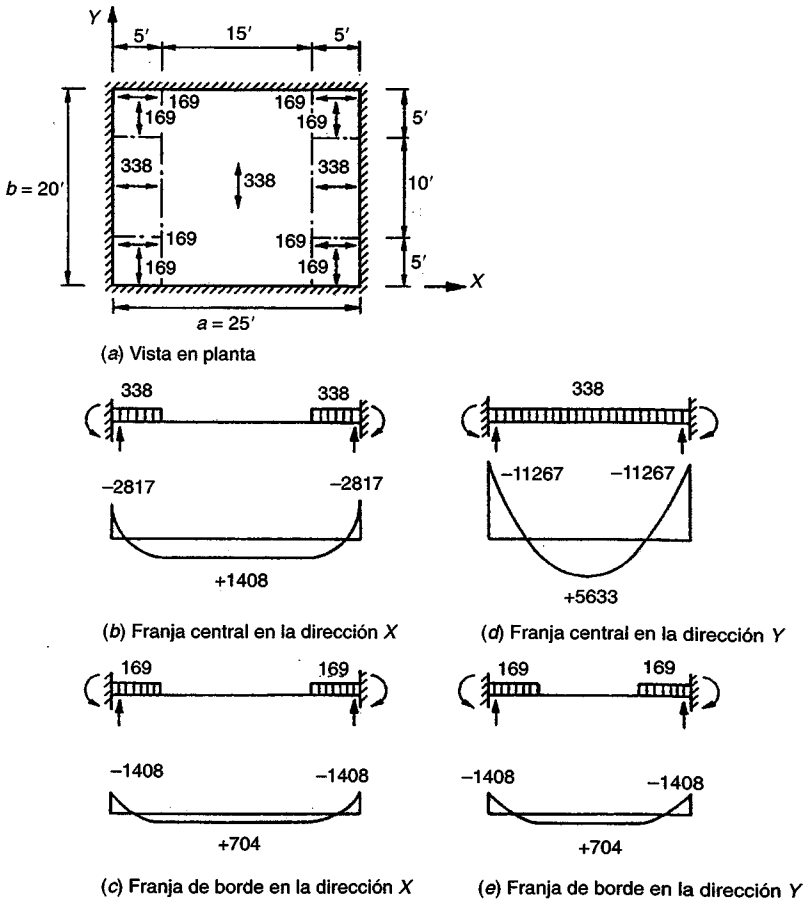


FIGURA 15.8
Ejemplo de diseño: losa en dos direcciones con bordes empotrados.

Franja central en la dirección Y:

$$\text{voladizo} \qquad m_y = \frac{wb^2}{8} = 338 \times \frac{400}{8} = 16{,}900 \text{ lb-pie/pie}$$

$$\text{negativo} \qquad m_{ys} = 16{,}900 \times \frac{2}{3} = 11{,}267$$

$$\text{positivo} \qquad m_{yf} = 16{,}900 \times \frac{1}{3} = 5633$$

Franjas de borde en la dirección Y:

$$\text{voladizo} \qquad m_y = \frac{wb^2}{64} = 2113 \text{ lb-pie/pie}$$

$$\text{negativo} \qquad m_{ys} = 2113 \times \frac{2}{3} = 1408$$

$$\text{positivo} \qquad m_{yf} = 2113 \times \frac{1}{3} = 704$$

Las cargas y los diagramas de momento para las franjas son como se muestran en la figura 15.8. De acuerdo con el Código ACI 7.12, el acero mínimo requerido para control de grietas por retracción de fraguado y temperatura es $0.0018 \times 6.75 \times 12 = 0.146$ pulg^2/pie de franja. Con un espesor total de 6.75 pulg, un recubrimiento de concreto de $\frac{3}{4}$ de pulg y con diámetros de barra estimados en $\frac{1}{2}$ pulg, la altura efectiva de la losa en la dirección corta será de 5.75 pulg, y en la dirección larga, de 5.25 pulg. Según esto, la cuantía de acero a flexión proporcionada por el acero mínimo que actúa con la menor altura efectiva es

$$\rho_{\min} = \frac{0.146}{5.25 \times 12} = 0.0023$$

De la tabla A.6*a* del apéndice A, $R = 134$ y la resistencia a flexión de diseño es

$$\phi m_n = \phi R b d^2 = \frac{0.9 \times 134 \times 12 \times 5.25^2}{12} = 3324 \text{ lb-pie/pie}$$

Comparando este valor con la resistencia requerida a momento, se concluye que el acero mínimo será adecuado en la dirección X, tanto para la franja central como para las de borde, lo mismo que para las franjas de borde en la dirección Y. Barras No. 3 espaciadas a 9 pulg suministrarán el área necesaria. En la franja central en la dirección Y, para flexión negativa,

$$R = \frac{m_u}{\phi b d^2} = \frac{11{,}267 \times 12}{0.9 \times 12 \times 5.75^2} = 379$$

y de la tabla A.6*a*, la cuantía de acero necesaria es 0.0069. El acero requerido es entonces

$$A_s = 0.0069 \times 12 \times 5.75 = 0.48 \text{ pulg}^2\text{/pie}$$

Este acero se suministrará con barras No. 5 espaciadas a 8 pulg entre centros. Para flexión positiva

$$R = \frac{5633 \times 12}{0.90 \times 12 \times 5.75^2} = 189$$

para el cual $\rho = 0.0033$ y el área de acero positivo que se exige por franja es

$$A_s = 0.0033 \times 12 \times 5.75 = 0.23 \text{ pulg}^2\text{/pie}$$

que se suministrará mediante barras No. 4 espaciadas a 10 pulg entre centros. Observe que se realizaron pequeños ajustes hacia abajo y hacia arriba en el acero requerido en las secciones de flexión positiva y negativa, lo cual está permitido por el Código ACI 8.4, para obtener espaciamientos prácticos de las barras. Hay que advertir también que todos estos espaciamientos son menores que $2h = 2 \times 6.75 = 13.5$ pulg, como lo requiere el Código ACI, y que las cuantías de acero están muy por debajo del máximo valor permitido de 0.0160.

Los puntos de corte para las barras negativas pueden calcularse fácilmente a partir de los diagramas de momento. Para la franja central en la dirección X, el punto de inflexión localizado a una distancia x desde el borde izquierdo se determina de la siguiente manera:

$$1690x - 2817 - 338\frac{x^2}{2} = 0$$

$$x = 2.11 \text{ pies}$$

De acuerdo con el Código ACI, las barras negativas deben prolongarse al menos una distancia igual a d o $12d_b$ más allá de este punto, requiriéndose una extensión de 6 pulg en este caso. Así las barras negativas se cortarán a 2.11 + 0.50 = 2.61 pies, que se aproxima a 2 pies 8 pulg de la cara del apoyo. El mismo resultado se obtiene para las franjas de borde en la dirección X y para las franjas de borde en la dirección Y. Para la franja central en la dirección Y, la distancia $y = 4.21$ pies de la cara del apoyo al punto de inflexión se determina de manera similar. En este caso, al utilizar barras No. 5, la prolongación necesaria es de 7.5 pulg, obteniéndose una longitud total más allá de la cara de los apoyos de 4.21 + 0.63 = 4.84 pies, que se aproxima a 4 pies 10 pulg. Todas las barras positivas se llevarán 6 pulg dentro de la cara de las vigas de soporte.

15.6 BORDES LIBRES

Las losas consideradas en las secciones anteriores, con cargas uniformes y con apoyos en los cuatro lados, podrían haberse diseñado también mediante los métodos del capítulo 12. El verdadero poderío del método de las franjas se hace evidente cuando se consideran problemas no comunes como losas con un borde libre, losas con huecos o losas con esquinas entrantes (losas en forma de L).

Por ejemplo, para una losa con un borde libre, una base razonable para realizar el análisis mediante el método sencillo de las franjas consiste en considerar que una franja a lo largo del borde libre, toma una carga por unidad de área mayor que la carga unitaria real que actúa, es decir, que la franja a lo largo del borde libre actúa a manera de apoyo para las franjas perpendiculares a ella. Wood y Armer (ver la referencia 15.8) llaman a estas franjas "bandas fuertes". Una banda fuerte es, en efecto, una viga integral cuyo espesor es por lo general igual al del resto de la losa, pero que contiene una concentración de refuerzo. La franja puede hacerse de mayor espesor que el resto de la losa para aumentar su capacidad de carga, pero esto no será necesario en muchos casos.

La figura 15.9*a* ilustra una losa rectangular que sostiene una carga última w uniformemente distribuida por unidad de área, con bordes empotrados a lo largo de tres lados y sin soporte a lo largo de uno de los lados cortos. Las líneas de discontinuidad se seleccionan como se indica. La carga sobre una franja central unitaria en la dirección X, indicada en la figura 15.9*b*, incluye la carga hacia abajo w en la zona adyacente al borde empotrado izquierdo y la reacción hacia arriba kw en la zona adyacente al borde libre. Al sumar momentos con respecto al extremo izquierdo, considerando positivos los momentos en el sentido de las agujas del reloj y designando el momento desconocido en el apoyo como m_{xs}, se obtiene

$$m_{xs} + \frac{wb^2}{32} - \frac{kwb}{4}\left(a - \frac{b}{8}\right) = 0$$

a partir de lo cual

$$k = \frac{1 + 32m_{xs}/wb^2}{8(a/b) - 1} \tag{15.15}$$

Así, el valor de k se puede calcular después de seleccionar el momento en el apoyo.

El valor apropiado de m_{xs} a utilizar en la ecuación (15.15) dependerá de la forma de la losa. Si el valor de a es relativamente grande en comparación con b, la banda fuerte en la dirección Y en el borde será relativamente rígida y el momento en el apoyo izquierdo de las franjas en la dirección X se aproximará al valor elástico para una viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro. Si la losa es casi cuadrada, la deflexión de la banda fuerte tenderá a incrementar el

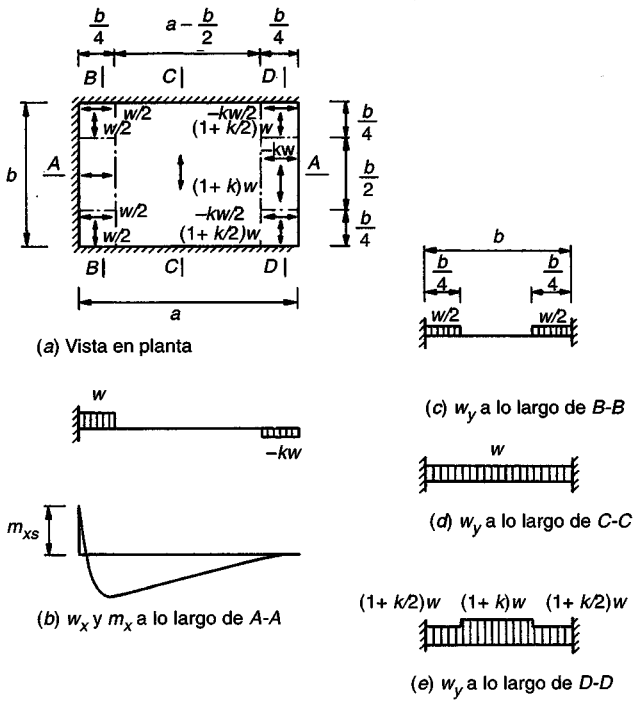


FIGURA 15.9
Losa con un borde libre a lo largo de un lado corto.

momento en el apoyo; se puede seleccionar un valor aproximadamente igual a la mitad del momento correspondiente a un voladizo libre (ver la referencia 15.14).

Una vez seleccionado el valor de m_{xs} y conocido el valor de k se demuestra que el momento máximo en la luz ocurre cuando

$$x = (1 - k)\frac{b}{4}$$

Este momento tiene un valor de

$$m_{xf} = \frac{kwb^2}{32}\left(\frac{8a}{b} - 3 + k\right) \tag{15.16}$$

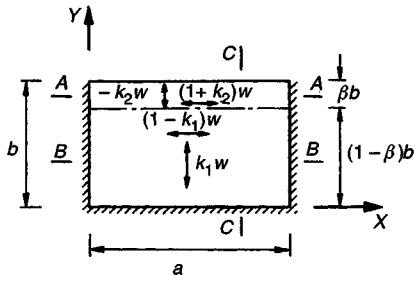
Los momentos en las franjas de borde en la dirección X son iguales a la mitad de los momentos en la franja central. En la franja central en la dirección Y, figura 15.9*d*, el momento de voladizo es $wb^2/8$. Al adoptar una relación entre el momento en el apoyo y el momento en la luz igual a 2, se obtienen valores para el momento en el apoyo y el momento en la luz respectivamente de

$$m_{ys} = \frac{wb^2}{12} \tag{15.17a}$$

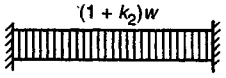
$$m_{yf} = \frac{wb^2}{24} \tag{15.17b}$$

Los momentos en la franja en la dirección Y adyacente al borde empotrado, figura 15.9*c*, serán iguales a un octavo de los valores anteriores. En la franja en la dirección Y a lo largo del borde libre, figura 15.9*e*, los momentos pueden igualarse, un poco conservadoramente, a $(1 + k)$ veces los momentos de la franja central en la dirección Y.

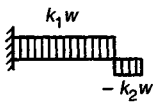
Si el borde libre está en la dirección larga de la luz, entonces una fracción significativa de la carga de la zona central de la losa se transmitirá en dirección perpendicular a los bordes largos y resulta más conveniente una distribución simple como lo indica la figura 15.10*a*. Una banda fuerte a lo largo del borde libre funciona como una viga de borde integral con ancho βb seleccionado normalmente tan bajo como sea posible, considerando las limitaciones en la cuantía de acero a tensión en la banda fuerte.



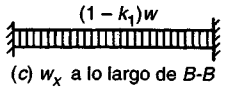
(a) Vista en planta



(b) w_x a lo largo de A-A



(d) w_y a lo largo de C-C



(c) w_x a lo largo de B-B

FIGURA 15.10
Losa con un borde libre en dirección de la luz larga.

Para una franja en la dirección *Y*, considerando positivos los momentos en el sentido de las agujas del reloj,

$$m_{ys} + \frac{1}{2}k_1w(1-\beta)^2b^2 - k_2w\beta b^2(1-\beta/2) = 0$$

a partir de lo cual

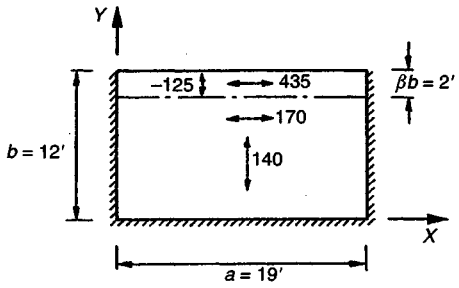
$$k_2 = \frac{k_1(1-\beta)^2 + 2m_{ys}/wb^2}{\beta(2-\beta)} \tag{15.18}$$

El valor de k_1 se puede seleccionar de manera que se utilice el acero mínimo en la dirección *X* requerido por el Código ACI 7.12. Al escoger el valor de m_{ys} que se va a utilizar en la ecuación (15.18) para calcular k_2, debe reconocerse de nuevo que la deflexión de la banda fuerte a lo largo del borde libre incrementará el momento en la dirección *Y*, en el borde apoyado, por encima del valor correspondiente de la viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro que se basa en una deflexión igual a cero. En casos típicos puede ser apropiado un valor para m_{ys} igual a aproximadamente la mitad del momento de voladizo libre. Una relación alta de *a*/*b* dará lugar a una mayor deflexión del borde libre en la zona central, generando un incremento del momento en el apoyo, mientras que una relación baja restringirá la deflexión reduciendo el momento en el apoyo.

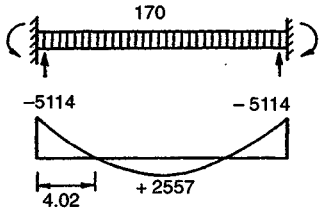
Ejemplo 15.2. Losa rectangular con un borde libre en la dirección larga. La losa de 12 × 19 pies que se ilustra en la figura 15.11*a*, con tres bordes empotrados y uno libre en la dirección larga, debe soportar una carga viva de servicio uniformemente distribuida de 110 lb/pie^2. La resistencia del concreto será de f'_c = 4000 lb/pulg^2 y las barras tendrán un f_y = 60,000 lb/pulg^2. Seleccione un espesor adecuado para la losa, determine todos los momentos de diseño y seleccione las barras de refuerzo y sus espaciamientos.

Solución. Los requisitos de espesor mínimo del Código ACI no son aplicables al tipo de losa que se analiza en este caso. Sin embargo, la tabla 13.3, que controla el caso de placas planas sin vigas, puede aplicarse en forma conservadora puesto que, aunque la losa en consideración no tiene viga a lo largo del borde libre, tiene apoyos infinitamente rígidos en los otros tres bordes. A partir de esta tabla con l_n = 19 pies,

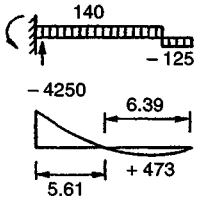
$$h = \frac{19 \times 12}{33} = 6.91 \text{ pulg}$$



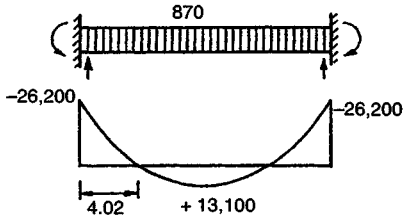
(*a*) Vista en planta



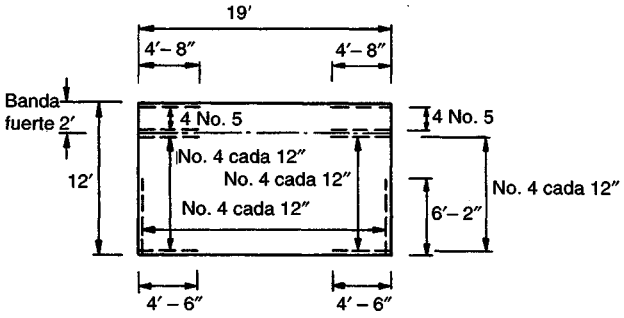
(*b*) Franja en la dirección *X*



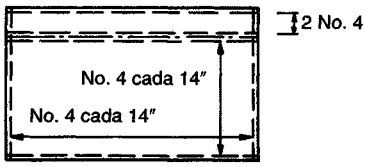
(*d*) Franja en la dirección *Y*



(*c*) Banda fuerte



(*e*) Barras superiores



(*f*) Barras inferiores

FIGURA 15.11
Ejemplo de diseño: losa con un borde libre en la dirección larga.

Se seleccionará en este caso un espesor total de 7 pulg. La carga muerta de la losa es $150 \times \frac{7}{2} = 88$ lb/pie^2, y la carga mayorada de diseño total es $1.4 \times 88 + 1.7 \times 110 = 310$ lb/pie^2.

Una banda fuerte de 2 pies de ancho servirá de apoyo a lo largo del borde libre. Para la losa principal se seleccionará un valor de $k_1 = 0.45$, que resulta en una carga de losa en la dirección Y de $0.45 \times 310 = 140$ lb/pie^2 y en la dirección X de $0.55 \times 310 = 170$ lb/pie^2.

En primer lugar, con respecto a las franjas de losa en la dirección Y, el momento negativo en el borde soportado se seleccionará como la mitad del momento de voladizo, que a su vez se calculará aproximadamente con base en una carga de 140 lb/pulg^2 aplicada en una distancia de 11 pies medida desde la cara del apoyo hasta el centro de la banda fuerte. El momento resistente es entonces

$$m_{ys} = \frac{1}{2} \times \frac{140 \times 11^2}{2} = 4235 \text{ lb-pie/pie}$$

Luego, a partir de la ecuación (15.6),

$$k_2 = \frac{0.45(5/6)^2 - 2 \times 4235/(310 \times 144)}{(1/6)(2 - 1/6)} = 0.402$$

Así, la banda fuerte suministrará un empuje hacia arriba de $0.402 \times 310 = 125$ lb/pie^2 para las franjas en la dirección Y, como se muestra en la figura 15.11*d*. Para esta carga, el momento negativo en el apoyo izquierdo es

$$m_{ys} = 140 \times \frac{10^2}{2} - 125 \times 2 \times 11 = 4250 \text{ lb-pie/pie}$$

La diferencia con respecto al valor original de 4235 lb-pie/pie se debe a pequeños errores de redondeo introducidos en los términos de la carga. Para diseño se utilizará el valor estáticamente consistente de 4250 lb-pie/pie. El máximo momento positivo en las franjas en la dirección Y estará localizado en el punto de cortante nulo. Llamando y_1 a la distancia desde este punto de cortante cero hasta el borde libre, y refiriéndose a la figura 15.11*d*,

$$125 \times 2 - 140(y_1 - 2) = 0$$

a partir de lo cual $y_1 = 3.79$ pies. El momento positivo máximo para este punto es

$$m_{yf} = 125 \times 2(3.79 - 1) - 140 \times \frac{1.79^2}{2} = 473 \text{ lb-pie/pie}$$

Como referencia posterior para el corte de las barras, el punto de inflexión está localizado a una distancia y_2 desde el borde libre:

$$125 \times 2(y_2 - 1) - \frac{140}{2}(y_2 - 2)^2 = 0$$

lo cual resulta en $y_2 = 6.39$ pies.

Para las franjas de losa en la dirección X, el momento de voladizo es

$$\text{voladizo } m_x = \frac{170 \times 19^2}{8} = 7671 \text{ lb-pie/pie}$$

En este caso se seleccionará una relación entre los momentos negativo y positivo de 2.0, que resulta en los siguientes valores respectivos de momento negativo y positivo,

$$\text{negativo} \qquad m_{xs} = 7671 \times \frac{2}{3} = 5114 \text{ lb-pie/pie}$$

$$\text{positivo} \qquad m_{xf} = 7671 \times \frac{1}{3} = 2557 \text{ lb-pie/pie}$$

como se muestra en la figura 15.11*b*.

La carga unitaria sobre la banda fuerte en la dirección X es

$$(1 + k_2)w = (1 + 0.402) \times 310 = 435 \text{ lb/pie}^2$$

de manera que la carga por pie para la banda de 2 pies de ancho es $2 \times 435 = 870$ lb/pie^2, tal como se indica en la figura 15.11*c*. Los momentos de voladizo negativo y positivo de la banda fuerte son, respectivamente

voladizo $M_x = 870 \times 19^2/8 = 39{,}300$ lb-pie

negativo $M_{xs} = 39{,}300 \times \frac{2}{3} = 26{,}200$ lb-pie

positivo $M_{xf} = 39{,}300 \times \frac{1}{3} = 13{,}100$ lb-pie

Con un momento negativo de –26,200 lb-pie y con una reacción en el apoyo de $870 \times \frac{19}{2} = 8265$ lb, el punto de inflexión en la banda fuerte se determina de la siguiente manera:

$$-26{,}200 + 8265x - \frac{870x^2}{2} = 0$$

obteniéndose un valor de $x = 4.02$ pies. El punto de inflexión de las franjas de losa en la dirección X estará localizado en el mismo sitio.

Para el diseño del acero de la losa en la dirección X, se observa que el acero mínimo requerido por el Código ACI es $0.0018 \times 7 \times 12 = 0.15$ pulg^2/pie. La altura efectiva de la losa en la dirección X, suponiendo barras con diámetro de $\frac{1}{2}$ pulg y con un recubrimiento de $\frac{3}{4}$ pulg, es $7.0 - 1.0 = 6.0$ pulg. La cuantía de acero a flexión correspondiente en la dirección X es $\rho = 0.15/(12 \times 6) = 0.0021$. A partir de la tabla A.6*a*, $R = 124$ y la resistencia de diseño es

$$\phi m_n = \phi R b d^2 = \frac{0.90 \times 124 \times 12 \times 6^2}{12} = 4018 \text{ lb-pie/pie}$$

Se puede observar que para la losa, el acero mínimo de losa requerido por el Código absorberá el momento flector positivo de 2557 lb-pie/pie. El requisito de 0.15 pulg^2/pie puede cumplirse con barras No. 3 espaciadas a 9 pulg, pero con el fin de reducir costos de colocación, se seleccionarán barras No. 4 con el máximo espaciamiento permitido de $2h = 14$ pulg, que proporciona un área de 0.17 pulg^2/pie. El momento negativo en la dirección X de 5114 lb-pie/pie requiere

$$R = \frac{m_u}{\phi b d^2} = \frac{5114 \times 12}{0.90 \times 12 \times 6^2} = 158$$

y la tabla A.6*a* indica que se necesita un $\rho = 0.0027$. Así, el requisito de barras negativas es $A_s = 0.0027 \times 12 \times 6 = 0.19$ pulg^2/pie. Esta área se suministrará mediante barras No. 4 espaciadas a 12 pulg que se prolongan a lo largo de una distancia de $4.02 \times 12 + 6 = 54$ pulg, o sea 4 pies 6 pulg a partir de la cara del apoyo.

En la dirección Y, la altura efectiva será un diámetro de barra menor que en la dirección X, o sea 5.5 pulg. Por tanto, la cuantía de acero a flexión que proporciona el acero de retracción de fraguado y temperatura es $\rho = 0.15/(12 \times 5.5) = 0.0023$. Esto genera un valor de $R = 135$, de modo que la resistencia de diseño es

$$\phi m_n = \frac{0.90 \times 135 \times 12 \times 5.5^2}{12} = 3675 \text{ lb-pie/pie}$$

valor que está muy por encima del requerido para flexión positiva, que es de 473 lb-pie/pie. La utilización de barras No. 4 espaciadas a 14 pulg será también satisfactoria para el acero positivo en esta dirección. Para el momento negativo de 4250 lb-pie/pie

$$R = \frac{4250 \times 12}{0.90 \times 12 \times 5.5^2} = 156$$

y a partir de la tabla A.6*a*, se requiere un valor de $\rho = 0.0027$. El requisito correspondiente de acero es $0.0027 \times 12 \times 5.5 = 0.18$ pulg^2/pie. Se utilizarán barras No. 4 espaciadas a 12 pulg, las cuales se prolongarán una distancia de $5.61 \times 12 + 6 = 74$ pulg, o sea 6 pies 2 pulg, más allá de la cara del apoyo.

En la banda fuerte, el momento positivo de 13,100 lb-pie requiere

$$R = \frac{13{,}100 \times 12}{0.90 \times 24 \times 6^2} = 202$$

La cuantía correspondiente de acero es 0.0035 y el área requerida de barras es $0.0035 \times 24 \times 6 = 0.38$ pulg^2. Este valor puede suministrarse mediante dos barras No. 4, apenas un poco más de acero que para una franja común de losa en la dirección X. Para el momento negativo de 26,200 lb-pie

$$R = \frac{26{,}200 \times 12}{0.90 \times 24 \times 6^2} = 404$$

que da un valor de $\rho = 0.0072$ y exige un área de acero de $0.0072 \times 24 \times 6 = 1.04$ pulg^2. Se utilizarán entonces cuatro barras No. 5 que proveen un área de 1.23 pulg^2 y se cortarán a $4.02 \times 12 + 7.5 = 56$ pulg o sea a 4 pies 8 pulg, de la cara del apoyo.

La distribución final de las barras de refuerzo aparece en la figura 15.11*e*. Los puntos de corte de las barras negativas son como se indica, y se suministrará la longitud de desarrollo de las barras mediante empotramiento dentro de los apoyos. Todas las barras positivas en la losa y en la banda fuerte se llevarán 6 pulg dentro de las caras de los apoyos.

Un problema de diseño que se presenta a menudo en la práctica es el de una losa apoyada a lo largo de tres bordes y sin soporte en el cuarto, con una carga distribuida que aumenta linealmente de cero a lo largo del borde libre, a un valor máximo en el borde opuesto que se apoya. Ejemplos de lo anterior incluyen muros de tanques rectangulares sometidos a presión de líquido y muros de contención de tierra con machones o contrafuertes (ver la sección 19.1).

La figura 15.12 ilustra una de estas losas, con una intensidad de carga igual a w_0 en el borde largo soportado, la cual se reduce a cero en el borde libre. En la zona principal de la losa, una carga constante igual a $k_2 w_0$ se transmite en la dirección X como se indica en la figura 15.12*c*, por lo cual debe restarse una carga constante igual a $k_2 w_0$ de la carga que varía linealmente en la dirección Y, como en la figura 15.12*a*. A lo largo del borde libre se proporciona una banda fuerte de ancho βb la cual soporta una carga igual a $k_1 w_0$, como en la figura 15.12*a*, y provee a su vez una carga hacia arriba igual al valor que se señala en el extremo de la franja en la dirección Y de la figura 15.12*d*. La selección de k_1 y k_2 depende de la relación de a/b; si esta relación es alta, k_2 se debe seleccionar con respecto al refuerzo mínimo de losa que exige el Código ACI. El valor de k_1 se calcula entonces mediante estática, con base en un valor seleccionado para el momento de restricción en el borde empotrado igual, por ejemplo, a la mitad del valor correspondiente a un voladizo libre. En muchos casos será conveniente tomar un valor de k_1 igual a k_2. Entonces será el momento de apoyo el que se obtenga por estática. El valor de β se selecciona tan bajo como sea posible teniendo en cuenta el límite superior en la cuantía de acero a tensión para la banda fuerte impuesta por el Código para

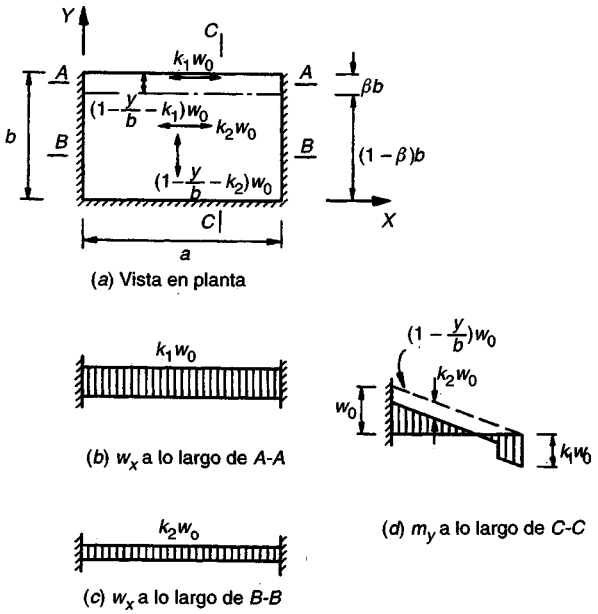


FIGURA 15.12
Losa con un borde libre y una carga que varía linealmente.

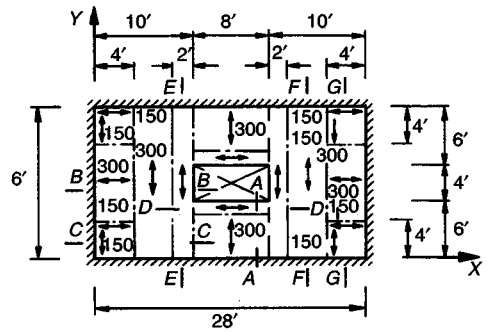
vigas. La banda fuerte se diseña para una carga con intensidad $k_1 w_0$ uniformemente distribuida sobre su ancho βb.

15.7 LOSAS CON ABERTURAS

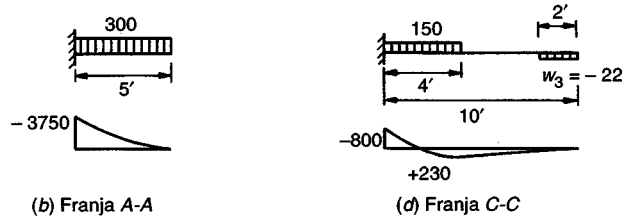
Las losas con aberturas pequeñas pueden diseñarse generalmente como si éstas no existieran, remplazando el acero interrumpido con bandas de refuerzo de área equivalente en cada uno de los lados de la abertura en las dos direcciones (ver la sección 13.8). Las losas con aberturas grandes deben tratarse en forma más rigurosa. En estos casos, el método de las franjas ofrece una base segura y racional para el diseño. Para esto se proveen vigas integrales portantes a lo largo de los bordes de las aberturas, usualmente con espesores iguales al de la losa, pero con refuerzo adicional para tomar la carga de las regiones afectadas y transmitirla a los apoyos. En general, estas vigas integrales deben seleccionarse de tal manera que lleven las cargas lo más directamente posible a los bordes apoyados de la losa. El ancho de las bandas fuertes debe seleccionarse de modo que las cuantías de acero sean iguales o estén por debajo del valor máximo permitido para vigas por el Código ACI, asegurando así que no se presente sobre refuerzo y falla de compresión.

En el siguiente ejemplo se ilustrará la utilización del método de las franjas para el análisis y diseño de una losa con un gran hueco central.

Ejemplo 15.3. Losa rectangular con abertura central. La figura 15.13*a* ilustra una losa de 16 × 28 pies con apoyos empotrados a lo largo de los cuatro lados. Debe ubicarse una abertura central de 4 × 8 pies. El espesor de losa, estimado con la ecuación (13.8*b*), es 7 pulg. La losa debe resistir una carga

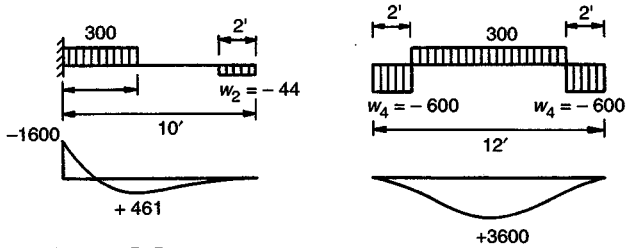


(*a*) Vista en planta



(*b*) Franja *A-A*

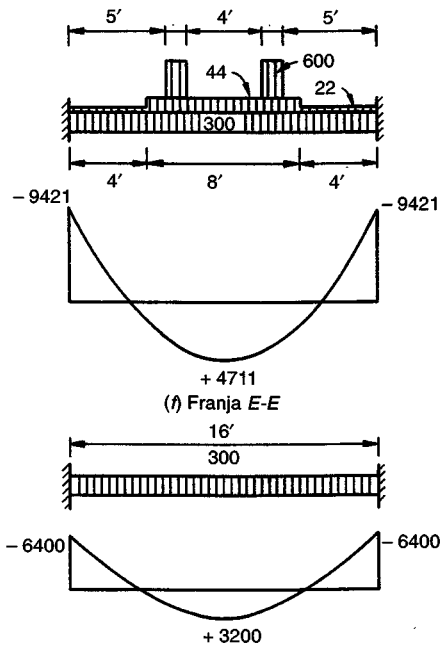
(*d*) Franja *C-C*



(*c*) Franja *B–B*

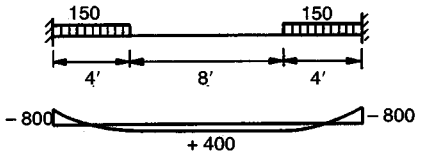
(*e*) Franja *D–D*

FIGURA 15.13
Ejemplo de diseño: losa con un hueco central.

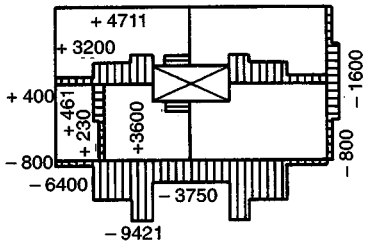


(*f*) Franja *E-E*

(*g*) Franja *F-F*



(*h*) Franja *G-G*



(*i*) Momentos de diseño - simétricos con respecto a ambos ejes

FIGURA 15.13
Continuación.

mayorada y uniformemente distribuida de 300 lb/pie^2, incluyendo el peso propio. Proyecte un sistema adecuado de bandas fuertes para reforzar la abertura y determinar los momentos que deben resistirse en todas las secciones críticas de la losa.

Solución. El patrón básico de líneas de discontinuidad y de dispersión de la carga se seleccionará de acuerdo con la figura 15.5. Se definen franjas de borde con un ancho de $\frac{16}{4} = 4$ pies. En las esquinas, la carga se divide igualmente en las dos direcciones. En la región central, el cien por ciento de la carga se asigna a la dirección *Y*, mientras que a lo largo de la parte central de los bordes cortos, el cien por ciento de la carga se transmite en la dirección *X*. Los momentos para este "caso básico" sin el hueco se calcularán y se utilizarán posteriormente como una guía en la selección de los momentos para la losa real con el hueco. Se utilizará una relación entre los momentos en el apoyo y la luz de 2.0, como en los ejemplos anteriores. Los momentos en la losa, sin considerar el hueco, serán entonces los siguientes:

Franjas centrales en la dirección *X*:

voladizo $\quad m_x = \dfrac{wb^2}{32} = 300 \times \dfrac{16^2}{32} = 2400$ lb-pie/pie

negativo $\quad m_{xs} = 2400 \times \dfrac{2}{3} = 1600$

positivo $\quad m_{xf} = 2400 \times \dfrac{1}{3} = 800$

Las franjas de borde en la dirección *X* tienen valores iguales a la mitad de los de la franja central.

Franjas centrales en la dirección *Y*:

voladizo $\quad m_y = \dfrac{wb^2}{8} = 300 \times \dfrac{16^2}{8} = 9600$ lb-pie/pie

negativo $\quad m_{ys} = 9600 \times \dfrac{2}{3} = 6400$

positivo $\quad m_{yf} = 9600 \times \dfrac{1}{3} = 3200$

Las franjas de borde en la dirección Y tienen valores iguales a $\frac{1}{8}$ de los de la franja central.

A causa del hueco, algunas franjas no tienen apoyo en uno de los extremos. Para soportarlas, deben proveerse bandas fuertes de un pie de ancho en la dirección X en los bordes largos del hueco, y bandas fuertes de 2 pies de ancho en la dirección Y a cada lado del hueco. Las bandas en la dirección Y servirán de apoyo a las bandas en la dirección X. Con la distribución de cargas mostrada en la figura 15.13*a*, se determinan las siguientes reacciones y momentos de las franjas:

Franja *A-A*

Puede suponerse inicialmente que se obtiene una acción de viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro, tomando un momento de restricción en el borde de la losa igual a 6400 lb-pie/pie, el mismo del caso básico. Al sumar momentos con respecto al extremo izquierdo de la franja cargada, se obtiene

$$w_1 = \frac{300 \times 6 \times 3 - 6400}{1 \times 5.5} = -182 \text{ lb/pie}^2$$

El valor negativo indica que las franjas en voladizo sirven de apoyo a la franja *D-D* y, a su vez, a las bandas fuertes en la dirección Y, lo cual es difícilmente un supuesto razonable. En cambio se supondrá una línea de discontinuidad a 5 pies del apoyo, como aparece en la figura 15.13*b*, que interrumpe el voladizo y permite que la franja *D-D* de un pie, ubicada a lo largo del borde de la abertura en la dirección X, soporte su propio peso. Así, el momento en el apoyo de la franja en voladizo es

$$m_{ys} \text{ (negativo)} = 300 \times 5 \times 2.5 = 3750 \text{ lb-pie/pie}$$

Franja *B-B*

El momento de restricción en el borde soportado se tomará igual que en el caso básico, es decir, 1600 lb-pie/pie. Al sumar momentos con respecto al extremo izquierdo de la franja de la figura 15.13*c*, se obtiene una reacción hacia arriba en el extremo derecho, que debe suministrar la franja *E-E*, igual a

$$w_2 = \frac{300 \times 4 \times 2 - 1600}{2 \times 9} = 44 \text{ lb/pie}^2$$

La reacción de la izquierda se puede encontrar fácilmente y resulta igual a 1112 lb, y el punto de cortante cero está ubicado a 3.70 pies del apoyo izquierdo. El momento positivo máximo en este punto es

$$m_{xf} \text{ (positivo)} = 1112 \times 3.70 - 1600 - 300\frac{3.70^2}{2} = 461 \text{ lb-pie/pie}$$

Franja *C-C*

Los momentos negativos y positivos, y la reacción que debe proveer la franja *E-E*, como se indica en la figura 15.13*d*, son todos iguales a la mitad de los valores correspondientes a la franja *B-B*.

Franja *D-D*

La franja de un pie de ancho soporta 300 lb/pie^2 en la dirección X con reacciones que suministran las bandas fuertes *E-E*, como en la figura 15.13*e*. El máximo momento positivo es

$$m_{xf} = 600 \times 2 \times 5 - 300 \times 4 \times 2 = 3600 \text{ lb-pie/pie}$$

Franja *E-E*

Con respecto a la figura 15.13*f*, las bandas fuertes en la dirección Y sostienen la carga aplicada en forma directa de 300 lb/pie^2, más la carga de 44 lb/pie^2 proveniente de la franja *B-B*, la carga de 22 lb/pie^2 de la franja *C-C* y la reacción en el extremo de 600 lb/pie^2 que proviene de la franja *D-D*. Para la franja *E-E*, los momentos de voladizo, negativo y positivo, son

voladizo $$m_y = 300 \times 8 \times 4 + 22 \times 4 \times 2 + 44 \times 4 \times 6 + 600 \times 1 \times 5.5$$
$$= 14{,}132 \text{ lb-pie/pie}$$

negativo $$m_{ys} = 14{,}132 \times \frac{2}{3} = 9421$$

positivo $$m_{yf} = 14{,}132 \times \frac{1}{3} = 4711$$

Debe enfatizarse que las cargas mostradas están en lb/pie^2 y deben multiplicarse por dos para obtener las cargas por pie que actúan sobre las bandas fuertes. Asimismo, los momentos que se acaban de obtener son por pie de ancho y deben multiplicarse por dos para obtener los momentos en el apoyo y en la luz para las bandas fuertes de dos pies de ancho.

Franja *F-F*

Los momentos para la franja central en la dirección *Y* del caso básico pueden utilizarse sin cambio; así, en la figura 15.13*g*,

negativo $m_{ys} = 6400$ lb-pie/pie

positivo $m_{yf} = 3200$

Franja *G-G*

Los momentos para las franjas de borde en la dirección *Y* del caso básico se utilizan sin cambio, obteniéndose lo siguiente:

negativo $m_{ys} = 800$ lb-pie/pie

positivo $m_{yf} = 400$

como se indica en la figura 15.13*h*.

La distribución final de momentos a través de las secciones críticas negativa y positiva de la losa se señalan en la figura 15.13*i*. La selección de las barras de refuerzo y la determinación de los puntos de corte siguen los mismos métodos que se presentaron en los ejemplos 15.1 y 15.2 y no se desarrollarán aquí. Las cuantías de barras de refuerzo necesarias en las bandas fuertes están muy por debajo de los máximos permitidos para la losa de 7 pulg de espesor.

Debe observarse que las franjas *B-B*, *C-C* y *D*-D se diseñaron como si estuvieran simplemente apoyadas sobre la banda fuerte *E-E*. Para evitar grietas anchas no deseables en los sitios donde estas franjas pasan sobre la banda fuerte, se debe adicionar refuerzo nominal negativo en esta región. Las barras positivas deben extenderse completamente hasta la parte interna de las bandas fuertes.

15.8 EL MÉTODO DE LAS FRANJAS AVANZADO

El método de las franjas simple descrito en las secciones anteriores de este capítulo no es directamente aplicable para el diseño de losas apoyadas sobre columnas (por ejemplo, placas planas) o losas apoyadas en esquinas entrantes†. Para estos casos, Hillerborg desarrolló el método de las franjas avanzado (ver las referencias 15.2, 15.5, 15.12 y 15.13).

En el método de las franjas avanzado es fundamental un elemento apoyado en la esquina como el que se ilustra en la figura 15.14*a*. Dicho elemento es una región rectangular de la losa con las siguientes propiedades:

1. Los bordes son paralelos a las direcciones del refuerzo.
2. Soporta una carga uniforme *w* por unidad de área.
3. Está apoyado únicamente en una esquina.
4. No actúan fuerzas cortantes a lo largo de los bordes.
5. No actúan momentos de torsión a lo largo de los bordes.
6. Todos los momentos flectores que actúan a lo largo de los bordes tienen el mismo signo o son iguales a cero.

† Sin embargo, Wood y Armer, en la referencia 15.8, sugieren que las placas sin vigas, con columnas de soporte, se pueden resolver por el método de las franjas simple, usando bandas fuertes entre columnas, o entre columnas y muros exteriores.

7. Los momentos flectores a lo largo de los bordes son los momentos de diseño para las barras de refuerzo.

Una franja uniformemente cargada en la dirección X, como se muestra en la figura 15.14*b*, tendría entonces los diagramas de corte y de momento que aparecen en las figuras 15.14*c* y *d*, respectivamente. Los momentos máximos están localizados en las líneas de cortante cero. Los bordes exteriores del elemento apoyado en la esquina se definen por las líneas de cortante cero en las direcciones X y Y.

En la figura 15.15 se muestra un elemento típico apoyado en la esquina, con una distribución supuesta de momentos a lo largo de los bordes. Se supondrá que el momento flector es constante a lo largo de las dos mitades de cada borde. La reacción vertical se encuentra sumando las fuerzas verticales:

$$R = wab \tag{15.19}$$

y, a partir del equilibrio de momentos con respecto al eje Y, se obtiene

$$m_{xfm} - m_{xsm} = \frac{wa^2}{2} \tag{15.20}$$

donde m_{xfm} y m_{xsm} son, respectivamente, el momento promedio en la luz y el momento en el apoyo por unidad de ancho; se sigue la misma convención de signos que para las vigas. En forma similar,

$$m_{yfm} - m_{ysm} = \frac{wb^2}{2} \tag{15.21}$$

Las dos últimas ecuaciones son idénticas a las condiciones para una parte correspondiente de una franja simple [la ecuación (15.20) para la luz en la dirección X y la ecuación (15.21) para la dirección Y] apoyada en el eje y que sostiene la carga wb o wa por pie. De esta manera, si un elemento apoyado en la esquina hace parte de una franja, esta parte debe soportar el cien por

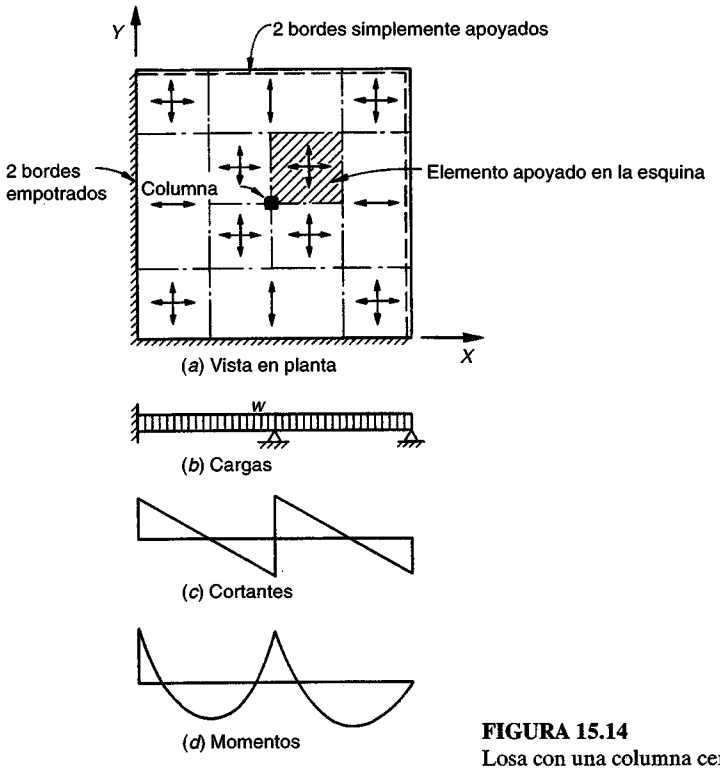


FIGURA 15.14
Losa con una columna central de apoyo.

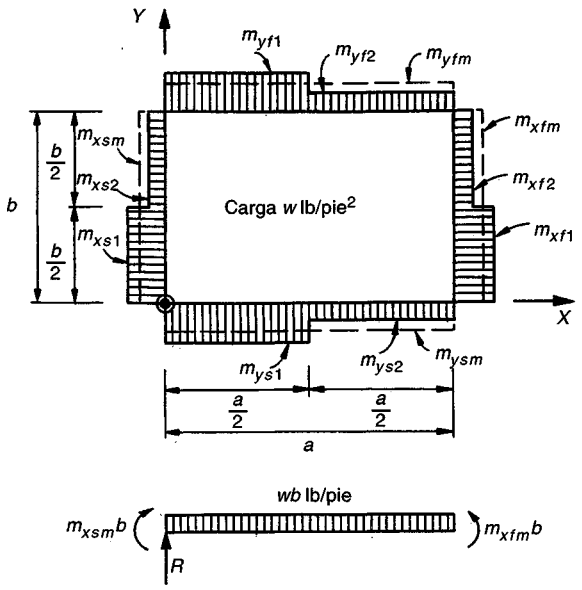


FIGURA 15.15
Elemento apoyado en la esquina.

ciento de la carga w en cada dirección (este requisito se analizó en el capítulo 13 y es un requisito de equilibrio estático).

La distribución de momentos dentro de los límites de un elemento apoyado en la esquina es compleja. Al considerar que la carga sobre el elemento está sostenida por una sola reacción vertical en una de las esquinas, deben presentarse fuertes momentos de torsión dentro del elemento; esto contrasta con los supuestos del método simple de las franjas utilizado anteriormente.

En la referencia 15.12 se explora con mayor detalle el campo de momentos dentro de un elemento apoyado en la esquina y los momentos de borde. Resulta esencial que éstos últimos, determinados en la figura 15.15, sean los momentos de diseño para las barras de refuerzo (es decir, que ninguna barra dentro del elemento quede sometida a un momento mayor que en los bordes). Para cumplir este requisito debe imponerse una limitación a la distribución de los momentos a lo largo de los bordes. Con base en sus estudios (ver la referencia 15.12), Hillerborg recomienda la siguiente restricción en los momentos de borde:

$$m_{xf2} - m_{xs2} = \alpha \frac{wa^2}{2} \tag{15.22a}$$

con

$$0.25 \leq \alpha \leq 0.7 \tag{15.22b}$$

donde m_{xf2} y m_{xs2} son, respectivamente, los momentos positivo y negativo en la dirección X en la mitad externa del elemento, como se indica en la figura 15.15. La restricción correspondiente es aplicable en la dirección Y. Hillerborg destaca que para muchas de las aplicaciones prácticas, la distribución de momentos de borde, que se ilustra en la figura 15.16, es apropiada con

$$m_{xf1} = m_{xf2} = m_{xfm} \tag{15.23}$$
$$m_{xs2} = 0 \tag{15.24a}$$
$$m_{xs1} = 2m_{xsm} \tag{15.24b}$$

(Como alternativa, en la referencia 15.14 se sugiere que los momentos negativos en los apoyos a través del eje de columnas se tomen iguales a $1.5m_{xsm}$ en la mitad del ancho del elemento cercana a la columna, e iguales a $0.5m_{xsm}$ en la mitad externa restante del ancho del elemento). El refuerzo positivo en la luz debe llevarse a través de todo el elemento apoyado en la esquina. El refuerzo negativo correspondiente a $m_{xs1} - m_{xs2}$ de la figura 15.15 debe llevarse

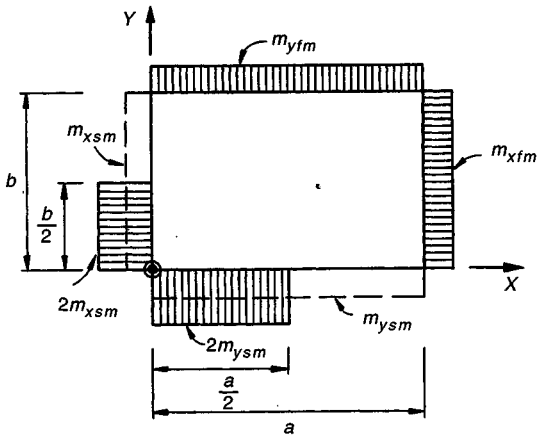


FIGURA 15.16
Distribución de momentos recomendada para un elemento típico apoyado en la esquina.

por lo menos hasta $0.6a$ del apoyo. El acero negativo restante, si queda, debe llevarse a través de todo el elemento apoyado en la esquina. Las restricciones correspondientes son aplicables en la dirección Y.

En aplicaciones prácticas, los elementos apoyados en la esquina se combinan entre sí y con partes de franjas en una dirección, como se señala en la figura 15.14, para conformar un sistema de franjas. En este sistema cada franja soporta la carga total w, como se estudió anteriormente. Para definir la ubicación de elementos y de franjas, se puede suponer que el apoyo puntual de esquina del elemento está localizado en el centro de la columna de apoyo, como aparece en la figura 15.14, a menos que los apoyos sean de un tamaño significativo. En ese caso, el apoyo de esquina puede tomarse en la esquina de la columna y se incluye una franja simple corriente que se extiende entre las caras de la columna, a lo largo del borde de los elementos apoyados en la esquina. Observe en la figura que las zonas de esquina de la losa no se incluyen dentro de las franjas principales que comprenden los elementos apoyados en la esquina. Estas regiones pueden diseñarse en forma segura para un tercio de los momentos correspondientes en las franjas principales (ver la referencia 15.13).

Ejemplo 15.4. Placa plana apoyada en los bordes con una columna central. La figura 15.17*a* ilustra una placa plana con dimensiones globales de 34 × 34 pies, con apoyos empotrados a lo largo de los bordes izquierdo e inferior en el diagrama, apoyos articulados en los bordes derecho y superior, y una sola columna central de sección cuadrada de 16 pulg. Debe soportar una carga viva de servicio de 30 lb/pie^2 sobre la totalidad de su superficie más su peso propio y una carga muerta adicional superpuesta de 4 lb/pie^2. Calcule los momentos en todas las secciones críticas y encuentre el espesor requerido de la losa y el refuerzo. Las resistencias de los materiales se especifican como f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2.

Solución. Se seleccionará un espesor tentativo de losa con base en la tabla 13.3, que controla en el caso de placas planas. Esta ecuación será conservadora en este caso, ya que se consideran apoyos continuos a lo largo de los bordes exteriores.

$$h = \frac{17 \times 12}{33} = 6.18 \text{ pulg}$$

Tentativamente se seleccionará un espesor de 6.5 pulg, para el cual el peso propio es 150 × 6.5/12 = 81 lb/pie^2. La carga total mayorada que debe soportar la losa es entonces:

$$w_u = 1.4(81 + 4) + 1.7 \times 30 = 170 \text{ lb/pie}^2$$

Los momentos promedio en la franja en la dirección X para la zona central producidos por la carga de 170 lb/pie^2 se determinan mediante la teoría elástica y aparecen en la figura 15.17*c*. El análisis en la dirección Y es idéntico. Los puntos de cortante cero (y de momentos máximos) están localizados a 9.11 pies a la izquierda de la columna y a 10.32 pies a la derecha, como se indica. Estas distancias determinan el tamaño de los cuatro elementos apoyados en la esquina.

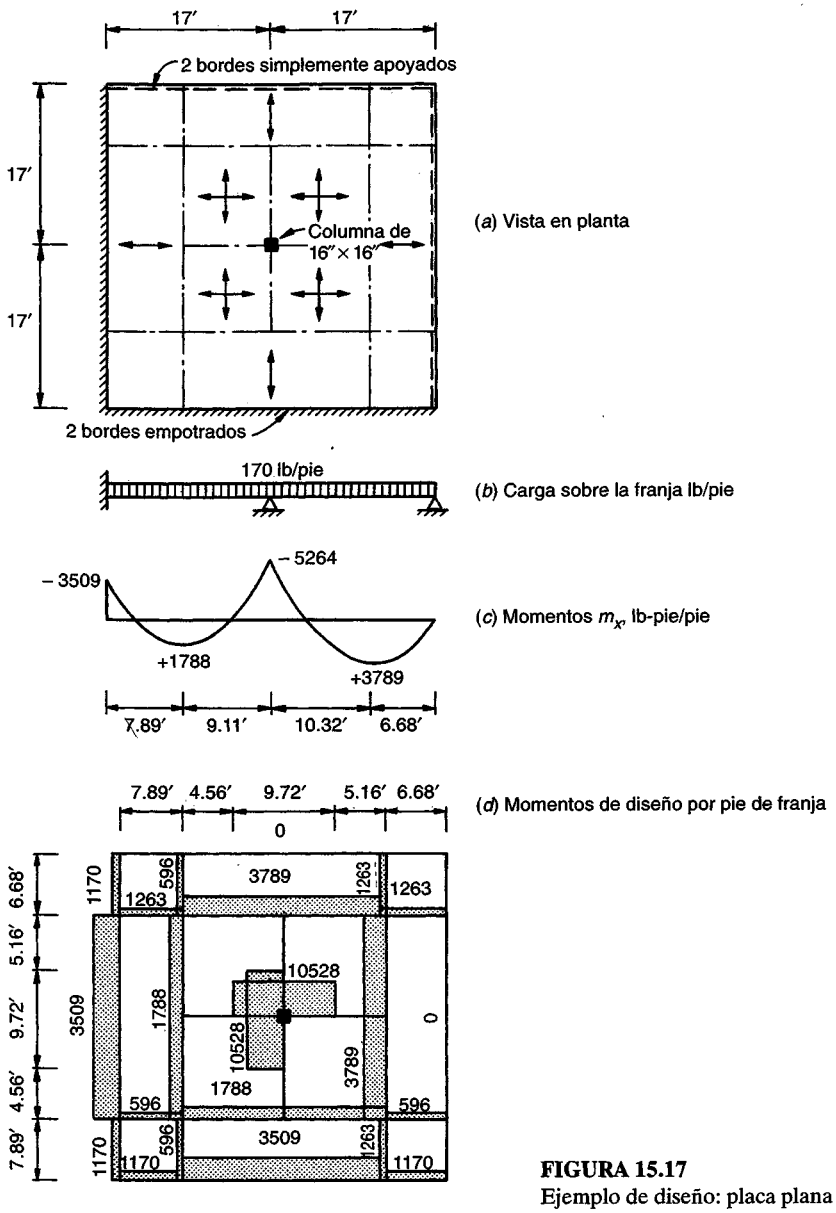


FIGURA 15.17
Ejemplo de diseño: placa plana apoyada en los bordes con columna central.

Los momentos en la losa se determinan entonces de acuerdo con las recomendaciones anteriores. Para el borde empotrado a lo largo del lado izquierdo de las franjas principales, el momento m_{xs} es simplemente el momento por pie de franja calculado a partir del análisis elástico, o sea, 3509 lb-pie/pie. En el borde izquierdo del elemento apoyado en la esquina en la luz izquierda,

$$M_{xf1} = m_{xf2} = m_{xfm} = 1788 \text{ lb-pie/pie}$$

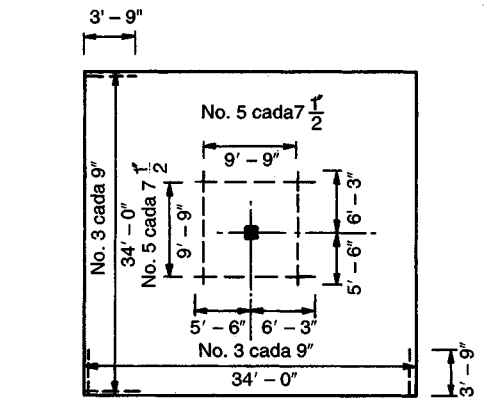
A lo largo de la línea central de la losa, sobre la columna, siguiendo las recomendaciones que se indican en la figura 15.16,

$$M_{xs2} = 0$$

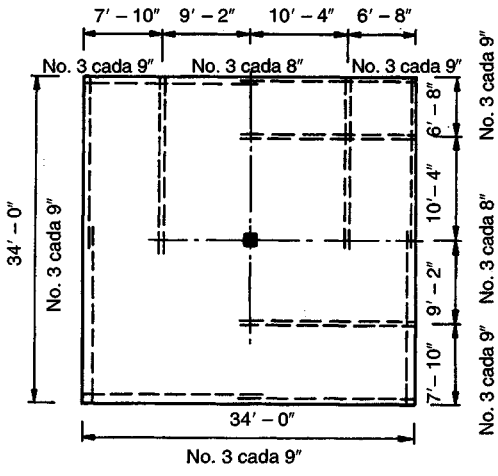
$$M_{xs1} = 2m_{xsm} = 10{,}528 \text{ lb-pie/pie}$$

En el borde derecho del elemento apoyado en la esquina en la luz derecha,

$$M_{xf1} = m_{xf2} = m_{xfm} = 3789 \text{ lb-pie/pie}$$



(*e*) Acero superior



(*f*) Acero inferior

FIGURA 15.17
Continuación.

En el borde exterior apoyado en una articulación todos los momentos son cero. Se realiza una verificación de los valores de α utilizando la ecuación (15.22*b*) y observando, a partir de la ecuación (15.20), que $wa^2/2 = m_{xfm} - m_{xsm}$. Así, para la luz izquierda,

$$\alpha = \frac{m_{xf2} - m_{xs2}}{wa^2/2} = \frac{1788 - 0}{1788 + 5264} = 0.25$$

y en la luz derecha,

$$\alpha = \frac{3789 - 0}{3789 + 5264} = 0.42$$

Puesto que los dos valores están dentro del intervalo de 0.25 a 0.75, la distribución propuesta de momentos es satisfactoria. Si el primero de estos valores hubiera estado por debajo del límite inferior de 0.25, el momento negativo en la media franja de columna hubiera podido reducirse con respecto al valor de 10,528 klb-pie/pie por pie y el momento negativo en la media franja adyacente se hubiera incrementado por encima del valor utilizado de 0. Como opción, el momento negativo total sobre la columna podría disminuirse ligeramente, con un aumento correspondiente de los momentos en la luz.

Los momentos en la dirección Y se calculan de manera similar y todos los resultados se resumen en la figura 15.17*d*. Los momentos en las franjas adyacentes a los bordes apoyados se hacen iguales a un tercio de los correspondientes a las franjas principales adyacentes.

Una vez conocidos los momentos por pie de franja en todas las secciones críticas, fácilmente se puede encontrar el refuerzo requerido. Con un recubrimiento de concreto de $\frac{3}{4}$ de pulgada y barras con diámetros de $\frac{1}{2}$ pulg, la altura efectiva de la losa será igual a 5.5 pulg. Cuando se presenten cruces de barras, es decir, sobre la columna central y cerca de la intersección de los dos bordes empotrados,

se utilizará una altura efectiva promedio igual a 5.25 pulg. Esto generará un refuerzo idéntico en las dos direcciones y facilitará la construcción.

Para la losa de 6.5 pulg de espesor, el acero mínimo para control de grietas por retracción de fraguado y temperatura es $0.0018 \times 6.5 \times 12 = 0.140$ pulg^2/pie, que se suministrará con barras No. 3 espaciadas a 9 pulg. La cuantía de acero a flexión correspondiente es

$$\rho_{\min} = \frac{0.140}{5.5 \times 12} = 0.0021$$

Interpolando, a partir de la tabla a A.6*a* del apéndice A, se obtiene un valor de $R = 124$ y la resistencia de diseño es

$$\phi m_n = \phi R b d^2 = 0.90 \times 124 \times 12 \times 5.5^2/12 = 3376 \text{ lb-pie/pie}$$

En comparación con las resistencias requeridas que se resumen en la figura 15.17*d*, este valor será adecuado en todas partes excepto para las siguientes regiones particulares:

Acero negativo sobre la columna:

$$R = \frac{m_u}{\phi b d^2} = \frac{10,528 \times 12}{0.90 \times 12 \times 5.25^2} = 424$$

para el cual $\rho = 0.0076$ (a partir de la tabla A.6*a*) y $A_s = 0.0076 \times 12 \times 5.25 = 0.48$ pulg^2/pie. Este acero se suministra mediante barras No. 5 espaciadas a 7.5 pulg. Las barras se prolongarán una distancia de $0.6 \times 9.11 = 5.47$ pie o sea, aproximadamente 5 pies 6 pulg a la izquierda del eje de la columna, y $0.6 \times 10.32 = 6.19$ pie, es decir, casi 6 pies 3 pulg a la derecha.

Acero negativo a lo largo de los bordes empotrados:

$$R = \frac{3509 \times 12}{0.90 \times 12 \times 5.50^2} = 129$$

para el cual $\rho = 0.0022$ y $A_s = 0.0022 \times 12 \times 5.5 = 0.15$ pulg^2/pie. Las barras No. 3 espaciadas a 9 pulg resultan adecuadas. El punto de inflexión para la losa en esta región puede encontrarse fácilmente y está ubicado a 3.30 pies del borde empotrado. Las barras negativas se extenderán 5.5 pulg más allá de este punto, lo que produce un punto de corte a 45 pulg, o sea 3 pies 9 pulg de la cara del apoyo.

Acero positivo para las luces exteriores:

$$R = \frac{3789 \times 12}{0.90 \times 12 \times 5.50^2} = 139$$

esto genera $\rho = 0.0024$ y $A_s = 0.0024 \times 12 \times 5.5 = 0.16$ pulg^2/pie. Se utilizarán barras No. 3 espaciadas a 8 pulg. En todos los casos se cumple el espaciamiento máximo de $2h = 13$ pulg. Este máximo impide la utilización económica de barras de diámetro mayor.

En las figuras 15.17*e* y 15.17*f* se resumen el tamaño de las barras, su espaciamiento y los puntos de corte para el acero superior e inferior, respectivamente.

Finalmente, la carga que soporta la columna central es

$$P = 170 \times 19.43 \times 19.43 = 64,200 \text{ lb}$$

Al investigar el cortante por punzonamiento en la sección crítica tomada a $d/2$ de la cara de la columna de 16 pulg, con referencia a la ecuación (13.11*a*) y tomando un valor de $b_o = 4 \times (16.00 + 5.25) = 85$ pulg, se obtiene

$$\phi V_c = 4\phi\sqrt{f'_c} b_o d = 4 \times 0.85\sqrt{4000} \times 85 \times 5.25 = 96,000 \text{ lb}$$

Este valor está muy por encima del cortante aplicado de 64,200 lb, lo que confirma que el espesor de la losa es adecuado y que no se requiere refuerzo a cortante.

15.9 COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS Y DISEÑO DE LOSAS

Los métodos convencionales para el análisis y diseño de losas descritos en los capítulos 12 y 13, y tratados en el capítulo 13 del Código ACI, se limitan a aplicaciones en las cuales los paneles de losa están apoyados en lados opuestos o en todos los cuatro lados en vigas o muros, o al caso de placas

planas y formas relacionadas apoyadas en una distribución de columnas relativamente regular. En todos los casos, los paneles de losa deben ser cuadrados o rectangulares, las cargas deben distribuirse de modo uniforme dentro de cada panel y las losas no deben incluir huecos considerables.

Tanto la teoría de líneas de fluencia como el método de las franjas ofrecen al diseñador procedimientos racionales para el análisis y diseño de losas dentro de un intervalo mucho más amplio de posibilidades que comprenden:

1. Fronteras de cualquier forma que incluyen límites rectangulares, triangulares, circulares y en forma de L con esquinas entrantes.
2. Bordes apoyados o libres, apoyos oblicuos, apoyos en columnas o diversas combinaciones de estas condiciones.
3. Cargas uniformemente distribuidas, cargas distribuidas sobre áreas parciales del panel, cargas distribuidas que varían linealmente, cargas lineales y cargas concentradas.
4. Losas con huecos considerables.

La diferencia más importante entre el método de franjas y el de líneas de fluencia es el hecho de que el análisis de franjas produce resultados dan seguridad, mientras que el de líneas de fluencia puede generar un diseño inseguro. Una losa diseñada con el método de las franjas puede soportar posiblemente una carga mayor que la estimada, mediante una redistribución interna de fuerzas, antes del colapso; una losa analizada con los procedimientos de líneas de fluencia puede fallar a una carga inferior que la estimada si se selecciona un mecanismo incorrecto como base del análisis o si las dimensiones que definen el mecanismo son incorrectas.

Además, se debe reconocer que el método de las franjas es una herramienta para el *diseño*, mediante la cual puede seleccionarse el espesor de la losa y el tamaño y distribución de las barras de refuerzo para resistir las cargas especificadas. En contraste, la teoría de líneas de fluencia ofrece apenas un método para *analizar la capacidad de determinada losa*, con refuerzo conocido. De acuerdo con el análisis de líneas de fluencia, el proceso de diseño es un asunto de revisión de las capacidades de varios diseños tentativos y de patrones alternos de refuerzo. Deben investigarse todos los patrones posibles de líneas de fluencia y variar las dimensiones específicas con el fin de estar seguros de haber encontrado la solución correcta. Excepto para casos sencillos, éste es un proceso que probablemente tomará un tiempo considerable.

Ni el método de las franjas, ni el de las líneas de fluencia ofrecen información con respecto al agrietamiento o a las deflexiones para las cargas de servicio. Los dos análisis enfocan su atención estrictamente hacia la resistencia a flexión. Sin embargo, con el procedimiento de las franjas, si se toma la preocupación de aproximarse al menos a la distribución elástica de momentos, se presentarán muy pocas dificultades con agrietamientos excesivos. Los métodos para predicción de deflexiones presentados en la sección 12.7 del capítulo 12 y en la sección 13.9 del capítulo 13, pueden adaptarse sin dificultad al de las franjas, puesto que los conceptos son totalmente compatibles.

Con relación a la economía en el refuerzo, se puede suponer que la utilización del método de las franjas, que conduce siempre a diseños seguros, puede generar estructuras más costosas que la teoría de las líneas de fluencia. Sin embargo, las comparaciones indican que en la mayor parte de los casos esto no es cierto (ver las referencias 15.8 y 15.12). Con la utilización adecuada del método de las franjas, las barras de refuerzo se colocan de manera no uniforme en la losa (por ejemplo, en bandas fuertes alrededor de las aberturas) donde éstas se utilizan de manera más efectiva; por otro lado, los métodos que se basan en líneas de fluencia llevan a menudo a un espaciamiento uniforme de las barras, lo cual puede significar que algunas barras individuales se utilizan de maneras ineficientes.

Se han realizado muchos ensayos sobre losas diseñadas mediante el método de las franjas (ver la referencia 15.11; también el resumen en la referencia 15.12). Estos ensayos incluyen losas cuadradas, rectangulares, con bordes tanto empotrados como simplemente apoyados, apoyadas directamente en columnas y con aberturas grandes. Las conclusiones obtenidas establecen que el

método de las franjas ofrece diseños seguros con respecto a la carga última y que, para las cargas de servicio, el comportamiento con relación a las deflexiones y al agrietamiento es por lo general satisfactorio. El análisis se utiliza ampliamente y en forma exitosa en los países escandinavos desde 1960 y cada vez recibe mayor atención en otros países.

REFERENCIAS

15.1. A. Hillerborg, "Equilibrium Theory for Reinforced Concrete Slabs", (in Swedish), *Betong*, vol. 41, no. 4, 1956, pp. 171-182.

15.2. A. Hillerborg, *Strip Method for Slabs on Columns, L-Shaped Plates,* Etc., (in Swedish), Svenska Riksbyggen, Stockholm, 1959.

15.3. A. Hillerborg, "A Plastic Theory for the Design of Reinforced Concrete Slabs", *Proc. Sixth Congr.,* International Association for Bridge and Structural Engineering, Stockholm, 1960.

15.4. R. E. Crawford, *Limit Design of Reinforced Concrete Slabs*, thesis submitted to University of Illinois for the Degree of Ph.D., Urbana, IL, 1962.

15.5. F. A. Blakey, *Strip Method for Slabs on Columns, L-Shaped Plates, Etc.*, (translation of Ref. 15.2). Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Melbourne, 1964.

15.6. K. O. Kemp, "A Lower Bound Solution to the Collapse of an Orthotropically Reinforced Slab on Simple Supports", *Mag. Concr. Res.*, vol. 14, no. 41, 1962, pp. 79-84.

15.7. K. O. Kemp, "Continuity Condition in the Strip Method of Slab Design", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, vol.. 45, 1970, p. 283 (supplement paper 7268s).

15.8. R. H. Wood and G. S. T. Armer, "The Theory of the Strip Method for the Design of Slabs", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, vol. 41, 1968, pp. 285-311.

15.9. R. H. Wood, "The Reinforcement of Slabs in Accordance with a Predetermined Field of Moments", *Concrete*, vol. 2, no. 2, 1968, pp. 69-76.

15.10. G. S. T. Armer, "The Strip Method: A New Approach to the Design of Slabs", *Concrete* vol. 2, no. 9, 1968, pp. 358-363.

15.11. G. S. T. Armer, "Ultimate Load Tests of Slabs Designed by the Strip Method", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, vol. 41, 1968, pp. 313-331.

15.12. A. Hillerborg, *Strip Method of Design*, Viewpoint Publications, Cement and Concrete Association, Wexham Springs, Slough, England, 1975.

15.13. A. Hillerborg, "The Advanced Strip Method—a Simple Design Tool", *Mag. Concr. Res.*, vol. 34, no. 121, 1982, pp. 175-181.

15.13a. A. Hillerborg, *Strip Method Design Handbook*, E & FN Spon/Chapman & Hill, London, 1996.

15.14. R. Park and W. L. Gamble, *Reinforced Concrete Slabs* (Chapter 6), John Wiley, New York, 1980, pp. 205-273.

15.15. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2d ed., McGraw-Hill, New York, 1959.

PROBLEMAS

Nota: Para todos los problemas que siguen, utilice como resistencia de los materiales f_y = 60,000 lb/pulg^2 y f'_c = 4000 lb/pulg^2. Debe aplicar todos los requisitos del Código ACI referentes al acero mínimo, espaciamientos máximos, corte de barras y refuerzo especial de esquinas.

15.1. La losa cuadrada de la figura P15.1 está simplemente apoyada en muros de mampostería a lo largo de todos los lados. Debe soportar una carga viva de servicio de 100 lb/pie^2, además de su peso propio. Especifique una distribución de carga adecuada; determine los momentos en todas las secciones que controlan y seleccione el espesor de losa, las barras de refuerzo y el espaciamiento.

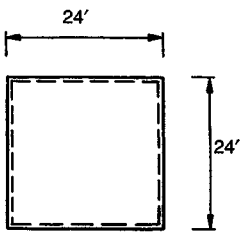


FIGURA P15.1

15.2. La losa rectangular expuesta en la figura P15.2 es un panel interior típico de un sistema de piso grande que tiene vigas en todos los ejes de columnas. Las columnas y las vigas son suficientemente rígidas para considerar la losa como totalmente restringida a lo largo de todos los lados. La losa debe soportar una carga viva de 100 lb/pie^2 y una carga muerta superpuesta de 30 lb/pie^2, además de su peso propio.

Determine el espesor requerido de losa y especifique todas las barras de refuerzo y su espaciamiento. Deben especificarse los puntos de corte para las barras negativas; todo el acero positivo puede llevarse hasta las vigas de apoyo. Tome los momentos en los apoyos como dos veces los de la luz de las franjas.

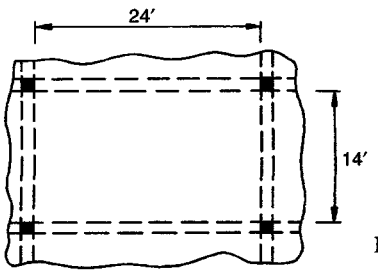


FIGURA P15.2

15.3. La losa de la figura P15.3 puede considerarse como totalmente empotrada a lo largo de tres bordes, pero sin apoyo en el cuarto lado en la dirección larga. Debe soportar una carga viva uniformemente distribuida de 80 lb/pie^2 más una carga muerta externa de 40 lb/pie^2. Especifique un espesor adecuado para la losa y determine el refuerzo y los puntos de corte.

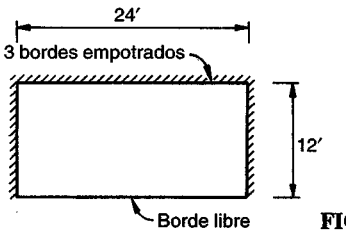


FIGURA P15.3

15.4. La figura P15.4 presenta un muro de contención con contrafuertes (ver la sección 19.1 del capítulo 19) que consta de una losa de base y un muro principal vertical de 16 pies de altura y un espesor constante que contiene la tierra. Los muros de contrafuerte, espaciados a 19 pies entre centros a lo largo del muro, suministran un apoyo adicional a la losa principal. Cada sección de la losa principal, con una altura de 16 pies y una longitud de 18 pies, puede considerarse como totalmente empotrada en su base y a lo largo de sus dos lados verticales (a causa de la continuidad completa y de la distribución de cargas idénticas sobre todos los paneles). La parte superior del muro principal no tiene apoyo. La presión de tierra horizontal varía de cero en la parte superior del muro a 587 lb/pie^2 en la parte superior de la losa base. Determine un espesor adecuado para el muro principal y seleccione las barras de refuerzo y el espaciamiento.

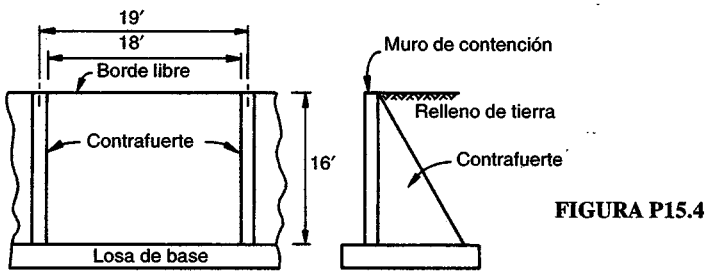


FIGURA P15.4

15.5. La losa triangular de la figura P15.5, que sirve de cubierta para un muelle de carga, está totalmente empotrada a lo largo de dos lados adyacentes y libre de apoyo a lo largo del borde diagonal. Se espera una carga de nieve uniforme de 60 lb/pie^2. Sobre la losa actuará una carga muerta de 10 lb/pie^2, además de su peso propio. Determine el espesor requerido de losa y especifique todo el refuerzo (sugerencia: el refuerzo inferior principal debe ser paralelo al borde libre, y el refuerzo negativo debe ser perpendicular a los bordes apoyados).

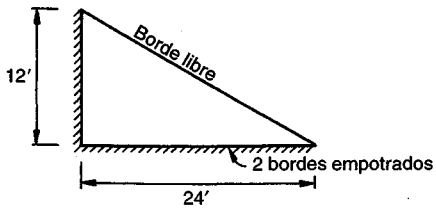


FIGURA P15.5

15.6. La figura P15.6 ilustra una losa rectangular con una abertura grande cerca de una de las esquinas. La losa está simplemente apoyada a lo largo de uno de los lados largos y del lado corto adyacente, y los dos bordes adyacentes a la abertura están totalmente empotrados. La losa debe soportar una carga mayorada de 250 lb/pie^2. Determine el espesor requerido de losa y especifique todo el refuerzo.

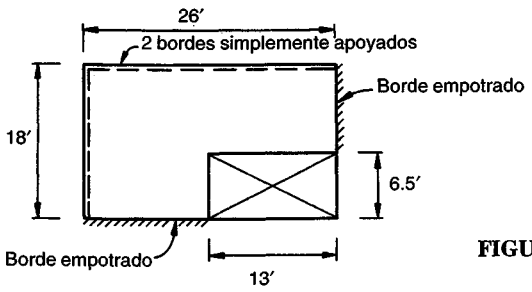


FIGURA P15.6

15.7. La losa tablero de cubierta de la figura P15.7 debe diseñarse para soportar una carga mayorada total, incluyendo el peso propio, de 165 lb/pie^2. Ésta tendrá apoyos empotrados a lo largo de los dos lados largos y de uno de los cortos, pero el cuarto borde estará libre de cualquier apoyo. Las dos columnas cuadradas de 16 pulg estarán localizadas como aparece.

(*a*) Determine un espesor aceptable para la losa.
(*b*) Seleccione las líneas apropiadas de dispersión de carga.
(*c*) Determine los momentos en todas las secciones críticas.
(*d*) Especifique los tamaños de las barras, los espaciamientos y los puntos de corte.
(*e*) Verifique las secciones que controlan la resistencia a cortante en la losa.

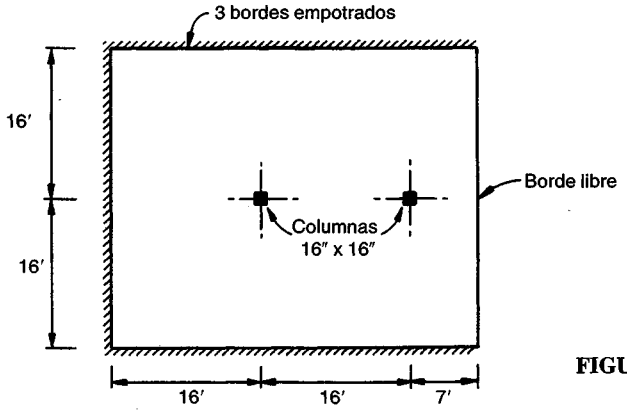


FIGURA P15.7

CAPÍTULO

16 ZAPATAS Y CIMENTACIONES

16.1 TIPOS Y FUNCIONES

La subestructura o cimentación es aquella parte de la estructura que se coloca generalmente por debajo de la superficie del terreno y que transmite las cargas al suelo o roca subyacentes. Todos los suelos se comprimen al someterlos a cargas y causan asentamientos en la estructura soportada. Los dos requisitos esenciales en el diseño de cimentaciones son: que el asentamiento total de la estructura esté limitado a una cantidad tolerablemente pequeña y que, en lo posible, el asentamiento diferencial de las distintas partes de la estructura se elimine. Con respecto al posible daño estructural, la eliminación de asentamientos distintos dentro de la misma estructura es incluso más importante que los límites impuestos sobre el asentamiento uniforme global.

Para limitar los asentamientos de la manera indicada, es necesario (1) transmitir la carga de la estructura hasta un estrato de suelo que tenga la resistencia suficiente, y (2) distribuir la carga sobre un área suficientemente grande de este estrato para minimizar las presiones de contacto. Si no se encuentran suelos adecuados justo debajo de la estructura, es necesario recurrir a cimentaciones profundas como pilotes o pilas para transmitir la carga hasta estratos más profundos y de mayor firmeza. Si existe un suelo satisfactorio inmediatamente debajo de la estructura, es suficiente distribuir la carga mediante zapatas u otros medios. Estas subestructuras se conocen como cimentaciones *superficiales* y es precisamente este tipo de cimentaciones el que se analizará en este capítulo. Un tratamiento más amplio referente a tipos más especiales de cimentaciones profundas puede encontrarse en textos sobre ingeniería de cimentaciones, por ejemplo en las referencias 16.1, 16.2 y 16.3.

16.2 ZAPATAS SUPERFICIALES

Las zapatas superficiales pueden clasificarse como zapatas para muros y zapatas para columnas. Los esquemas en planta de los tipos más comunes se presentan en la figura 16.1. Una zapata para muro consiste en una franja de concreto reforzado más ancha que el muro y que distribuye su presión. Las zapatas para columnas individuales son por lo general cuadradas, algunas veces rectangulares, y representan el tipo de cimentación más sencillo y económico. Su utilización para columnas exteriores tiene algunas dificultades si los derechos de propiedad impiden la utilización de zapatas que se extiendan

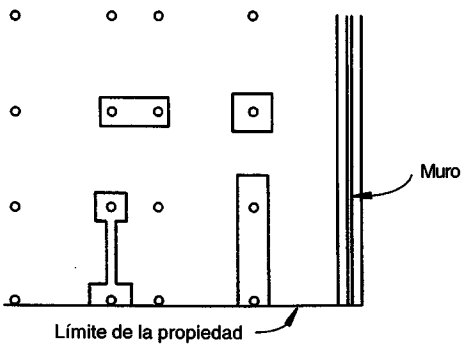


FIGURA 16.1
Tipos de zapatas superficiales.

más allá de los muros exteriores. En este caso, se utilizan zapatas combinadas o zapatas amarradas para permitir el diseño de una zapata que no se extienda más allá del muro o columna. Las zapatas combinadas para dos o más columnas se utilizan también para columnas interiores con cargas considerables y poco espaciadas entre sí, donde las zapatas individuales, si se hicieran, quedarían casi o totalmente traslapadas.

Las zapatas individuales y las zapatas combinadas para columnas son los tipos de cimentaciones superficiales más utilizados en suelos con capacidad razonable de carga. Si el suelo es blando o las cargas de las columnas son grandes, las áreas requeridas para las zapatas son tan grandes que se convierten en antieconómicas; en este caso, a menos que las condiciones del suelo exijan una cimentación profunda, se adopta una solución consistente en una losa de cimentación o en una cimentación flotante. Este tipo de cimentación consta de una losa maciza de concreto reforzado que se extiende bajo todo el edificio y que, en consecuencia, distribuye la carga de la estructura sobre la máxima área disponible. Esta cimentación, gracias a su propia rigidez, también minimiza los asentamientos diferenciales. En su forma más sencilla, consta de una losa de concreto reforzada en las dos direcciones. Una forma que proporciona mayor rigidez consiste en una losa de entrepiso invertida y conformada por vigas secundarias y principales. Las vigas principales se localizan en los ejes de columnas en cada una de las dos direcciones, y se proyecta una losa reforzada en las dos direcciones y apoyada en las vigas. También se utilizan losas planas invertidas con capiteles en la parte inferior de las columnas, como losas de cimentación.

16.3 FACTORES DE DISEÑO

En construcciones corrientes, la carga sobre un muro o columna se transmite verticalmente a la zapata, la cual a su vez la sostiene la presión hacia arriba del suelo sobre el cual descansa. Si la carga es simétrica con respecto al área de contacto, la presión de contacto se supone uniformemente distribuida (ver la figura 16.2*a*); se sabe que esto es apenas aproximadamente cierto. Para zapatas que descansan sobre suelos granulares gruesos, la presión es mayor en el centro de la zapata y disminuye hacia el perímetro (ver la figura 16.2*b*), a causa de que los granos individuales de este tipo de suelos están relativamente sueltos de manera que el suelo localizado en las cercanías del perímetro puede correrse ligeramente hacia afuera en la dirección de menores esfuerzos en el suelo. En contraste, en suelos arcillosos las presiones son mayores cerca del borde que en el centro de la zapata, puesto que en este

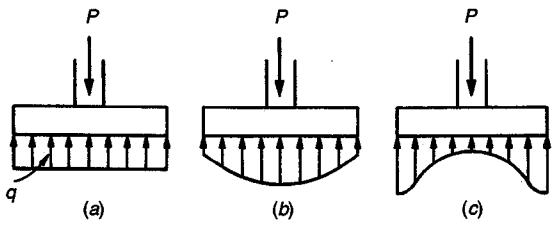


FIGURA 16.2
Distribución de presiones de contacto:
(*a*) supuesta; (*b*) real para suelos granulares;
(*c*) real para suelos cohesivos.

tipo de suelos la carga produce una resistencia a cortante alrededor del perímetro, la cual se adiciona a la presión hacia arriba (ver la figura 16.2*c*). Se acostumbra ignorar estas variaciones con respecto a la distribución uniforme: (1) porque su cuantificación numérica es incierta y altamente variable, dependiendo del tipo de suelo, y (2) porque su influencia en las magnitudes de los momentos flectores y de las fuerzas cortantes sobre la zapata es relativamente baja.

Las zapatas sobre suelos compresibles deben cargarse de modo concéntrico para evitar la inclinación que se presentará si las presiones de contacto en un lado de la zapata son sustancialmente mayores que en el lado opuesto. Eso significa que las zapatas individuales deben colocarse concéntricamente bajo las columnas, que las zapatas para muros deben estar en forma concéntrica bajo los muros y que, para las zapatas combinadas, el centroide del área de las zapatas debe coincidir con la resultante de las cargas de las columnas. Las zapatas cargadas excéntricamente se pueden utilizar en suelos muy compactados o en roca. Se concluye que puede contarse con restricción de rotación de la columna, suministrada por una zapata individual, sólo cuando existen tales condiciones favorables del suelo y cuando la zapata se diseña tanto para la carga de columna como para el momento de restricción. Inclusive en este caso, debe suponerse una condición más flexible que la de un empotramiento total, excepto para zapatas en roca.

La determinación precisa de esfuerzos en elementos de cimentación de cualquier tipo es difícil, no sólo por las incertidumbres en la determinación de la distribución real de presiones hacia arriba, sino también porque los elementos estructurales mismos son bloques relativamente masivos o losas de espesor considerable sometidos a cargas concentradas altas provenientes de la estructura superior. Los procedimientos para el diseño de zapatas aisladas para columnas individuales se basan casi por completo en los resultados de dos amplias investigaciones experimentales que se llevaron a cabo en la Universidad de Illinois (ver las referencias 16.4 y 16.5). Estos ensayos y las recomendaciones resultantes se han reevaluado a la luz de investigaciones recientes particularmente en lo que tiene que ver con el cortante y la tensión diagonal (ver las referencias 16.6 a 16.8). Las zapatas combinadas y las losas de fundación también pueden diseñarse mediante métodos simplificados, aunque cada vez se utilizan herramientas más refinadas, tales como análisis por elementos finitos.

16.4 CARGAS, PRESIONES DE CONTACTO Y DIMENSIONES DE LAS ZAPATAS

Las presiones de contacto admisibles se determinan a partir de los principios de la mecánica de suelos, con base en ensayos de carga y otras determinaciones experimentales (ver por ejemplo las referencias 16.1 a 16.3). Las presiones de contacto admisibles q_a para cargas de servicio se escogen de tal forma que se tenga un factor de seguridad entre 2.5 y 3.0 para que no se exceda la capacidad portante del suelo particular y que los asentamientos se mantengan dentro de unos límites tolerables. Muchos códigos de construcción locales incluyen presiones de contacto admisibles para los tipos y condiciones de suelos que se encuentran en esa localidad particular.

Para zapatas cargadas concéntricamente, el área requerida se determina a partir de

$$A_{\text{req}} = \frac{D + L}{q_a} \tag{16.1}$$

Además, la mayor parte de los códigos permiten un incremento del 33 por ciento en la presión admisible cuando se incluyen los efectos de viento W o de sismo E, en cuyo caso

$$A_{\text{req}} = \frac{D + L + W}{1.33q_a} \qquad \frac{D + L + E}{1.33q_a} \tag{16.2}$$

Se debe observar que los tamaños de las zapatas se determinan para cargas de servicio y presiones del suelo sin amplificar, en contraste con el diseño a la resistencia de elementos de concreto reforzado, en el cual se utilizan cargas mayoradas y resistencias nominales reducidas. Esto se debe a que, para el diseño de zapatas, la seguridad la proporcionan los factores de seguridad globales que se mencionaron

anteriormente, en contraste con los factores independientes de carga y coeficientes de reducción de resistencia que se utilizan para dimensionar los elementos.

El área de zapata requerida, A_{req}, es la mayor de las determinadas con las ecuaciones (16.1) y (16.2). Las cargas en los numeradores de las ecuaciones (16.1) y (16.2) deben calcularse a nivel de la base de la zapata, es decir, en el plano de contacto entre el suelo y la zapata. Esto significa que deben incluirse el peso de la zapata y la sobrecarga (es decir, el relleno y la posible presión de fluidos sobre la parte superior de la zapata). Las cargas de viento y otras cargas laterales producen una tendencia al volcamiento. Al verificar el volcamiento de una cimentación, sólo deben incluirse aquellas cargas vivas que contribuyen al sismo y las cargas muertas que lo estabilizan deben multiplicarse por 0.9. Debe mantenerse un factor de seguridad de por lo menos 1.5 contra volcamiento, a no ser que el código de construcción local especifique otro valor (ver la referencia 16.7).

Una zapata se considera cargada excéntricamente si la columna soportada no es concéntrica con el área de la zapata o si la columna transmite, en su unión con la zapata, no sólo una carga vertical sino también un momento flector. En cualquier caso, los efectos de la carga en la base de la zapata pueden representarse mediante una carga vertical P y un momento flector M. Las presiones de contacto resultantes se suponen de nuevo distribuidas en forma lineal. Siempre y cuando la excentricidad resultante $e = M/P$ no exceda un sexto del ancho de la zapata, representado por la distancia k, la fórmula usual de flexión

$$q_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I} \tag{16.3}$$

permite la determinación de las presiones de contacto en los dos bordes extremos, como se indica en la figura 16.3*a*. El área de la zapata se determina mediante tanteos, con base en la condición $q_{max} \leq q_a$. Si la excentricidad cae por fuera del tercio medio de la zapata, al evaluar la ecuación (16.3) se obtiene un valor negativo (tensión) para q a lo largo de uno de los bordes de la zapata. Puesto que en el área de contacto entre el suelo y la zapata no puede transmitirse tensión, la ecuación (16.3) deja de ser válida en este caso y las presiones de contacto se distribuyen como se ilustra en la figura 16.3*b*. Para zapatas rectangulares con dimensiones $l \times b$ la presión máxima puede determinarse a partir de

$$q_{max} = \frac{2P}{3bm} \tag{16.4}$$

la cual, de nuevo, no debe ser mayor que la presión admisible q_a. Para áreas de zapatas no rectangulares con diversas configuraciones, las referencias 16.1 y 16.7, y otras, presentan excentricidades límites y otras ayudas para el cálculo de las presiones de contacto.

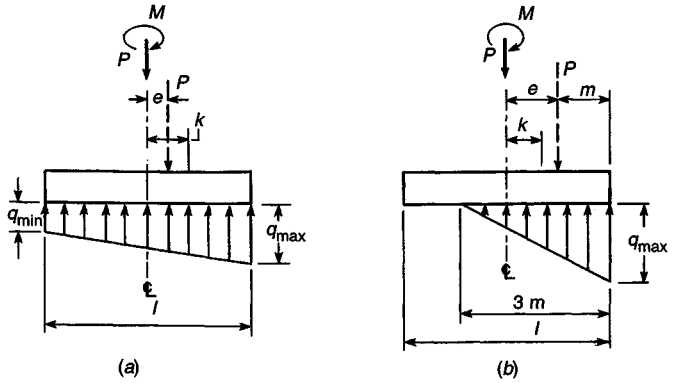


FIGURA 16.3
Presiones de contacto supuestas bajo zapatas excéntricas.

Una vez que se determina el área requerida de la zapata, ésta debe diseñarse para desarrollar la capacidad necesaria para resistir todos los momentos, cortantes y otras acciones internas que producen las cargas aplicadas. Con este propósito, se aplican los factores de carga del Código ACI 9.2 al caso de zapatas al igual que a todos los demás componentes estructurales. De acuerdo con esto, para diseño a la resistencia las zapatas deben dimensionarse para los efectos de las siguientes cargas externas (ver la tabla 1.2):

$$U = 1.4D + 1.7L$$

o si se van a incluir efectos del viento,

$$U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W)$$

En zonas sísmicas, deben considerarse las fuerzas de sismo E, en cuyo caso el valor de W se remplaza por $1.1E$. La combinación

$$U = 0.9D + 1.3W$$

rara vez controlará el diseño a la resistencia de una zapata. Sin embargo, la presión lateral de tierra H ocasionalmente puede afectar el diseño de la zapata, en cuyo caso,

$$U = 1.4D + 1.7L + 1.7H$$

Para presiones horizontales F de líquidos, como las generadas por aguas subterráneas, el valor de $1.4F$ en la última ecuación debe sustituir a $1.7H$. Las presiones verticales de líquidos deben adicionarse a las cargas muertas; es decir, se les aplica un coeficiente de carga de 1.4.

Estas cargas mayoradas deben contrarrestarse y equilibrarse mediante las correspondientes presiones de contacto en el suelo. En consecuencia, una vez que se determine el área de la zapata, las presiones de contacto se vuelven a calcular para las cargas mayoradas con el propósito de adelantar los cálculos de resistencia. Éstas son presiones ficticias que se necesitan solamente para producir la capacidad última que se exige en la zapata. Para diferenciar estas presiones de las presiones reales q bajo cargas de servicio, las presiones de diseño que equilibran las cargas mayoradas U se designarán mediante q_u.

16.5 ZAPATAS PARA MUROS

Los principios elementales del comportamiento de vigas se aplican a zapatas para muros con algunas modificaciones menores. La figura 16.4 ilustra las fuerzas que actúan sobre una zapata para muro; si los momentos flectores se calcularan a partir de estas fuerzas, el máximo momento se presentará en la mitad del ancho. En realidad, la muy alta rigidez del muro modifica esta situación y los ensayos citados en la sección 16.3 demuestran que, para zapatas bajo muros de concreto, es satisfactorio calcular el momento en la cara del muro (sección 1-1). En estos ensayos se formaron grietas de tensión en los sitios indicados en la figura 16.4, es decir, bajo la cara del muro, en vez de presentarse en la mitad del ancho.

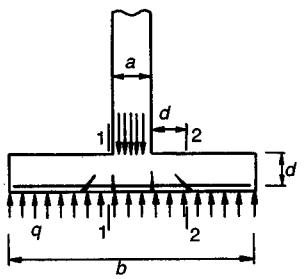


FIGURA 16.4
Zapata para muro.

Para zapatas que soportan muros de mampostería el momento máximo se calcula en la mitad de la distancia entre el centro y la cara del muro, puesto que la mampostería es en general menos rígida que el concreto. Por consiguiente, el momento flector máximo en zapatas bajo muros de concreto lo determina la ecuación

$$M_u = \frac{1}{8} q_u (b - a)^2 \tag{16.5}$$

Para determinar los esfuerzos cortantes se calcula la fuerza cortante vertical en la sección 2-2 que se localiza, al igual que para vigas, a una distancia d de la cara del muro. Así,

$$V_u = q_u \left(\frac{b - a}{2} - d \right) \tag{16.6}$$

El cálculo de la longitud del desarrollo se basa en la sección de máximo momento, es decir, en la sección 1-1.

Ejemplo 16.1. Diseño de una zapata para muro. Un muro de concreto de 16 pulg soporta una carga muerta $D = 14$ klb/pie y una carga viva $L = 10$ klb/pie. La presión de contacto admisible es $q_a = 4.5$ klb/pie^2 a nivel de la parte inferior de la zapata, que se ubica a 4 pies por debajo del nivel del terreno. Diseñe una zapata para este muro utilizando un concreto de 3000 lb/pulg^2 y acero grado 40.

Solución. Con una zapata de 12 pulg de altura, el peso de la zapata por pie cuadrado es 150 lb/pie^2 y el peso del relleno de 3 pies en la parte superior de la zapata es $3 \times 100 = 300$ lb/pie^2. En consecuencia, la porción de la presión de contacto admisible que está disponible o es efectiva para sostener la carga del muro es

$$q_e = 4500 - (150 + 300) = 4050 \text{ lb/pie}^2$$

El ancho requerido para la zapata es por tanto $b = 24{,}000/4050 = 5.93$ pies. Se supondrá una zapata de 6 pies de ancho.

La presión de contacto producida por las cargas mayoradas para el diseño a la resistencia de la zapata es

$$q_u = \frac{1.4 \times 14 + 1.7 \times 10}{6} \times 10^3 = 6100 \text{ lb/pie}^2$$

A partir de este valor, el momento requerido para diseño a la resistencia es

$$M_u = \frac{1}{8} \times 6100(6 - 1.33)^2 \times 12 = 199{,}500 \text{ lb-pulg/pie}$$

y suponiendo un valor de $d = 9$ pulg el cortante en la sección 2-2 es

$$V_u = 6100\left[\frac{1}{2}(6 - 1.33) - \frac{9}{12}\right] = 9700 \text{ lb/pie}$$

La altura de las zapatas está controlada generalmente por cortante, en particular porque es común evitar la utilización de refuerzo a cortante en zapatas por ser poco económico. La resistencia a cortante de diseño por pie (ver la ecuación [4.12*b*]) es

$$\phi V_c = \phi(2\sqrt{f'_c}bd) = 0.85(2\sqrt{3000} \times 12d) = 1117d \text{ lb/pie}$$

a partir de la cual

$$d = \frac{9700}{1117} = 8.7 \text{ pulg}$$

Puesto que el Código ACI 7.7.1 exige un recubrimiento libre de las barras de 3 pulg, se selecciona una altura de zapata de 12 pulg, obteniéndose un valor de $d = 8.5$ pulg. Este valor es suficientemente cercano a los valores supuestos y no es necesario revisar los cálculos.

Para determinar el área requerida de acero se utiliza el valor de $M_u/\phi bd^2 = 199{,}500/(0.9 \times 12 \times 8.5^2) = 256$ para entrar al gráfico A.I. del apéndice A. Para este valor, la curva 40/3 da una cuantía de acero $\rho = 0.0067$. El área requerida de acero es entonces $A_s = 0.0067 \times 8.5 \times 12 = 0.68$ pulg^2/pie. Barras No. 6, espaciadas a $7\frac{1}{2}$ pulg entre centros, suministran un $A_s = 0.71$ pulg^2/pie. La longitud de desarrollo requerida de acuerdo con la tabla 5.1 es 22 pulg. Esta longitud debe proveerse a partir de la sección 1-1 hacia afuera. La longitud de cada barra, si el recubrimiento en el extremo es de 3 pulg, es $72 - 2 = 66$ pulg y la longitud real de desarrollo desde la sección 1-1 hasta el extremo más cercano es $\frac{1}{2}(66 - 16) = 25$ pulg que es mayor que la longitud requerida de desarrollo.

De acuerdo con el Código ACI 7.12, el refuerzo longitudinal por retracción de fraguado y temperatura debe ser al menos $0.002 \times 12 \times 12 = 0.29$ pulg^2/pie. Barras No. 4 espaciadas a 8 pulg entre centros, proporcionarán un área de 0.29 pulg^2/pie.

16.6 ZAPATAS PARA COLUMNAS

En planta, las zapatas para columnas individuales son en general cuadradas. Se utilizan zapatas rectangulares cuando las restricciones de espacio obligan a esta selección o si la columna apoyada tiene una sección transversal rectangular bastante alargada. En su forma más simple, constan de una losa sencilla (ver la figura 16.5*a*). Otro tipo es el que aparece en la figura 16.5*b*, donde se interpone un pedestal o dado entre la columna y la losa de la zapata; el pedestal proporciona una transferencia de carga más favorable y en muchos casos se requiere con el fin de suministrar la longitud de desarrollo necesaria para los bastones. Esta forma se conoce también como una zapata *escalonada*. Todas las partes de una zapata escalonada deben vaciarse en la misma colada, con el fin de proveer una acción monolítica. Algunas veces se utilizan zapatas acarteladas como las de la figura 16.5*c*. Éstas consumen menos concreto que las zapatas escalonadas, pero la mano de obra adicional necesaria para producir las superficies acarteladas (formaletas, etc.) hace que las zapatas escalonadas sean casi siempre más económicas. En general, las zapatas de losa sencilla (ver la figura 16.5*a*) son las más económicas para alturas de hasta 3 pies.

Las zapatas para columnas individuales representan voladizos que se proyectan hacia afuera desde la columna en las dos direcciones y cargados hacia arriba con la presión del suelo. En la superficie inferior se producen los correspondientes esfuerzos de tensión en estas dos direcciones. En consecuencia, estas zapatas se refuerzan mediante dos capas de acero perpendiculares entre sí y paralelas a los bordes.

El área requerida de contacto se obtiene dividiendo la carga total, que incluye el peso propio de la zapata, por la presión de contacto seleccionada. En esta etapa debe estimarse el peso de las zapatas que generalmente está entre un cuatro por ciento y un ocho por ciento de la carga de la columna, intervalo en el que el primer valor es aplicable a los tipos de suelo más fuertes.

Al calcular los momentos flectores y los cortantes, únicamente se considera la presión hacia arriba q_u generada por las cargas mayoradas de la columna. El peso mismo de la zapata no produce momentos ni cortantes, al igual que no existen, obviamente, momentos ni cortantes en un libro que descansa sobre la superficie de una mesa.

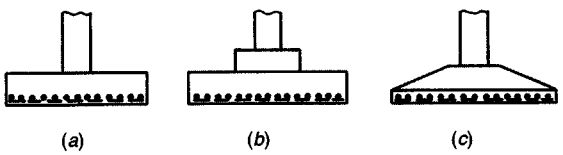


FIGURA 16.5
Tipos de zapatas para columnas individuales.

a. Cortante

Una vez determinada el área requerida de la zapata, A_{req} a partir de la presión de contacto admisible q_a y de la combinación más desfavorable de cargas de servicio, incluyendo el peso de la zapata y el relleno por encima de ésta (y todas las sobrecargas que puedan presentarse), debe determinarse la altura h de la zapata. En zapatas aisladas, la altura efectiva d es regulada principalmente por cortante. Puesto que estas zapatas se someten a una acción en dos direcciones, es decir, se flexionan en las dos direcciones principales, su comportamiento a cortante se parece al de las losas planas en inmediaciones de las columnas (ver la sección 13.6). Sin embargo, en contraste con losas de piso y de cubierta en dos direcciones, por lo general no es económico utilizar refuerzo a cortante en zapatas. Por esta razón, únicamente se analizará aquí el diseño de zapatas donde todo el cortante lo toma el concreto. Para los casos poco usuales en que la altura se restringe, de manera que es necesario utilizar refuerzo a cortante, la información relacionada con losas de la sección 13.6 es aplicable también a zapatas.

En zapatas se distinguen dos tipos diferentes de resistencia a cortante: cortante en dos direcciones o por punzonamiento y cortante en una dirección o por acción de viga.

Una columna sostenida por la losa de la figura 16.6 tiende a punzonar la losa a causa de los esfuerzos cortantes que actúan en la zapata alrededor del perímetro de la columna. Al mismo tiempo, los esfuerzos de compresión concentrados que provienen de la columna se distribuyen en la zapata de modo que el concreto adyacente a la columna queda sometido a una compresión vertical o ligeramente inclinada, adicional al cortante. En consecuencia, si la falla ocurre, la fractura adopta la forma de la pirámide truncada que aparece en la figura 16.6 (o de un cono truncado si la columna es circular), con lados que se extienden hacia afuera a un ángulo que se aproxima a los 45°. El esfuerzo cortante promedio en el concreto que falla de esta manera puede tomarse equivalente al que actúa en planos verticales a través de la zapata y alrededor de la columna sobre un perímetro a una distancia $d/2$ desde las caras de la columna (sección vertical a través de *abcd* en la figura 16.7). El concreto sometido a este esfuerzo cortante v_{u1} también está sometido a la compresión vertical que generan los esfuerzos que se distribuyen desde la columna, y a la compresión horizontal en las dos direcciones principales producida por los momentos de flexión biaxial en la zapata; la presencia de estos esfuerzos triaxiales aumenta la resistencia a cortante del concreto. Ensayos realizados en zapatas y losas planas demuestran en correspondencia con esto que, para fallas por punzonamiento, el esfuerzo cortante calculado en el área del perímetro crítico es mayor que en la acción en una dirección (es decir, por acción de viga).

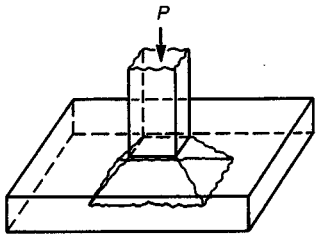


FIGURA 16.6
Falla a cortante por punzonamiento en una zapata aislada.

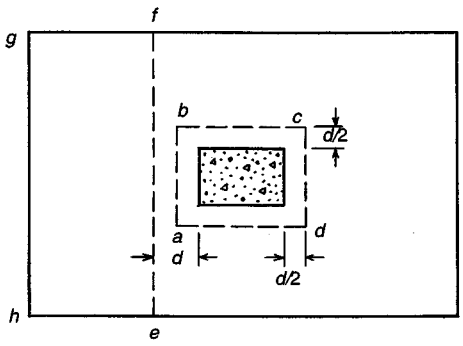


FIGURA 16.7
Secciones críticas para cortante.

Como se analizó en la sección 13.6, las ecuaciones del Código ACI (13.11*a*, *b*, *c*) dan la resistencia a cortante por punzonamiento nominal en este perímetro:

$$V_c = 4\sqrt{f_c'}b_o d \tag{16.7a}$$

excepto para columnas con secciones transversales muy alargadas, para las cuales

$$V_c = \left(2 + \frac{4}{\beta_c}\right)\sqrt{f_c'}b_o d \tag{16.7b}$$

Para los casos en los cuales la relación entre el perímetro crítico y el espesor de la losa, b_o/d, es muy grande,

$$V_c = \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2\right)\sqrt{f_c'}b_o d \tag{16.7c}$$

donde b_o es el perímetro *abcd* en la figura 16.7; $\beta_c = a/b$ es la relación entre los lados largo y corto de la sección transversal de la columna y α_s es 40 para cargas aplicadas hacia el centro, 30 para cargas aplicadas en los bordes y 20 para cargas aplicadas en las esquinas de una zapata. La resistencia a cortante por punzonamiento de la zapata debe tomarse como el menor de los valores determinados mediante las ecuaciones (16.7*a*, *b* y *c*) y la resistencia de diseño es ϕV_c, como de costumbre, donde $\phi = 0.85$ para cortante.

En la figura 13.16 se presenta la aplicación de las ecuaciones (16.7) al cortante por punzonamiento en zapatas para columnas con secciones transversales no rectangulares. En estas situaciones, el Código ACI 11.12.1 indica que el perímetro b_o debe ser de longitud mínima, pero no necesita aproximarse a menos de $d/2$ del perímetro del área real cargada. La manera de definir a y b para estas áreas cargadas irregularmente se ilustra también en la figura 13.16.

Las fallas a cortante también pueden ocurrir, como en vigas y losas en una dirección, en una sección ubicada a una distancia d desde la cara de la columna, como en la sección *ef* de la figura 16.7. Al igual que para vigas y losas en una dirección, la resistencia a cortante nominal está dada por la ecuación (4.12*a*), es decir,

$$V_c = \left(1.9\sqrt{f_c'} + 2500\rho\frac{V_u d}{M_u}\right)bd \leq 3.5\sqrt{f_c'}bd \tag{16.8a}$$

donde b = ancho de la zapata a una distancia d de la cara de la columna
= *ef* en la figura 16.7
V_u = fuerza cortante mayorada total en esa sección
= q_u multiplicada por el área de la zapata por fuera de esa sección (área *efgh* en la figura 16.7)
M_u = momento de V_u con respecto a *ef*

En el diseño de zapatas se utiliza generalmente la ecuación (4.12*b*) más sencilla y un poco más conservadora, es decir,

$$V_c = 2\sqrt{f_c'}bd \tag{16.8b}$$

La altura requerida para la zapata d se calcula entonces a partir de la ecuación acostumbrada

$$V_u \leq \phi V_c \tag{16.9}$$

aplicada por separado con relación a las ecuaciones (16.7) y (16.8). Para la ecuación (16.7), $V_u = V_{u1}$ es la presión total hacia arriba que produce q_u sobre el área por fuera del perímetro *abcd* en la figura

16.7. Para la ecuación (16.8) $V_u = V_{u2}$ es la presión total hacia arriba sobre el área *efgh* por fuera de la sección *ef* de la figura 16.7. La altura requerida es entonces la mayor de las calculadas, bien sea a partir de la ecuación (16.7) o (16.8). Para cortante, como es usual, $\phi = 0.85$.

b. Contacto: transferencia de fuerzas en la base de la columna

Cuando una columna descansa sobre una zapata o pedestal, transfiere su carga sólo a una parte del área total del elemento de soporte. El concreto adyacente de la zapata suministra apoyo lateral a la parte de concreto directamente cargada; esto produce esfuerzos triaxiales de compresión que aumentan la resistencia del concreto sometido a carga en forma directa bajo la columna. Con base en ensayos, el Código ACI 10.17.1 establece que, cuando el área de apoyo es más ancha que el área cargada en todos los lados, la resistencia de diseño por contacto es

$$\phi P_n = 0.85\phi f'_c A_1 \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \leq 0.85\phi f'_c A_1 \times 2 \qquad (16.10)$$

Para esfuerzos de contacto sobre el concreto $\phi = 0.70$, f'_c es la resistencia determinada a partir del ensayo de cilindros para el concreto de la zapata, que con frecuencia es menor que la de la columna, y A_1 es el área cargada. A_2 es el área de la base inferior del mayor tronco de pirámide, cono o cuña contenida completamente dentro del apoyo, que tiene como base superior el área cargada y pendientes de los lados iguales a 1 medida vertical por 2 horizontales. El significado de esta definición de A_2 puede clarificarse mediante la figura 16.8. Observe que, para el caso poco usual que se presenta, en el cual la parte superior del apoyo está escalonada, un escalón de mayor altura o más cercano al área cargada que el que se ilustra puede generar una reducción del valor de A_2. Una zapata para la que la superficie superior tiene una inclinación por fuera del área cargada más pendiente que 1 a 2, producirá un valor de A_2 igual a A_1. Para los casos más usuales, en los cuales la parte superior de la zapata es plana y los lados son verticales, A_2 es simplemente el área máxima de la porción de la superficie de apoyo que es geométricamente similar y concéntrica con el área cargada.

Todas las fuerzas axiales y los momentos flectores que actúan en la sección inferior de una columna deben transferirse a la zapata en la superficie de contacto, por compresión en el concreto y por el refuerzo. Con respecto al refuerzo, esto puede lograrse bien sea extendiendo las barras de la columna dentro de la zapata o proporcionando bastones embebidos en la zapata y que se prolonguen por encima de ella. En este último caso, las barras de columna descansan simplemente sobre la zapata y, en muchos casos, están unidas a los bastones. Esto genera un procedimiento constructivo más sencillo que el de

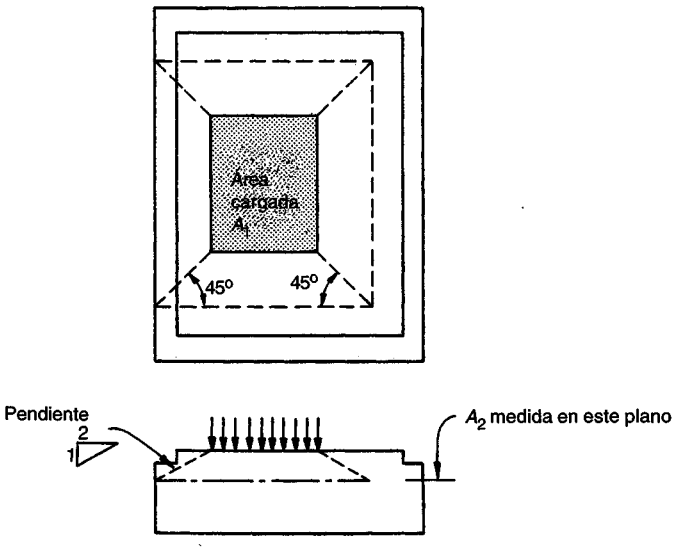


FIGURA 16.8
Definición de las áreas A_1 y A_2.

prolongar las barras de las columnas hasta la parte interna de las zapatas. Para asegurar la integridad de la unión entre la columna y la zapata, el Código ACI 15.8.2 exige que el área mínima de refuerzo que atraviesa la superficie de contacto (bastones o barras de columna) debe ser igual a 0.005 veces el área bruta de la columna sostenida. La longitud de los bastones o barras de diámetro d_b debe ser suficiente para suministrar la longitud de desarrollo requerida para barras a compresión a ambos lados de la superficie de contacto (ver la sección 5.7), es decir, $l_d = 0.02 f_y d_b / \sqrt{f'_c}$ y $\geq 0.0003 f_y d_b$. Asimismo, si se utilizan bastones, la longitud de traslapo debe ser al menos la que exige un empalme por traslapo a compresión (ver la sección 5.11*b*), es decir, la longitud de traslapo no debe ser menor que la longitud de desarrollo usual en compresión y tampoco menor que $0.0005 f_y d_b$. Cuando se empalmen barras de diferentes tamaños por traslapo, la longitud de traslapo debe ser la mayor entre la longitud de desarrollo de la barra más grande y la longitud de empalme de la más pequeña, según el Código ACI.

Los dos tamaños más grandes de barras, las Nos. 14 y 18, se utilizan a menudo en columnas con cargas axiales grandes. En circunstancias normales, el Código ACI prohíbe en forma específica los empalmes por traslapo de estas barras, puesto que los ensayos realizados demuestran que se necesitan empalmes soldados u otras conexiones efectivas para lograr el desarrollo completo de estas barras pesadas. Sin embargo, se hace una excepción para los bastones con barras de columna Nos. 14 y 18. Confiando en su utilización exitosa durante mucho tiempo, el Código ACI 12.16.2 ahora permite empalmar estas barras pesadas con bastones de diámetros menores (es decir No. 11 o menores) siempre y cuando los bastones tengan una longitud de desarrollo dentro de la columna que corresponda a la de la barra de columna (la barra No. 14 o la 18, según sea el caso) y dentro de la zapata de acuerdo como se especifique para el tamaño del bastón particular (No. 11 o menores, según sea el caso).

c. Momentos flectores, refuerzo y adherencia

Si se considera una sección vertical a través de la zapata, el momento flector producido en esta sección por la presión neta del suelo hacia arriba (es decir, la carga mayorada de la columna dividida por el área de contacto) se obtiene por simple estática. La figura 16.9 ilustra una de estas secciones *cd* localizada a lo largo de la cara de la columna. El momento flector con respecto a *cd* es el que genera la presión q_u actuando hacia arriba sobre el área a un lado de la sección, es decir, el área *abcd*. El refuerzo perpendicular a esta sección, es decir, las barras que van en la dirección larga, se calcula a partir de este momento flector. En forma similar, el momento con respecto a la sección *ef* lo causa la presión q_u que actúa sobre el área *befg* y el refuerzo en la dirección corta, es decir, el perpendicular a *ef*, se calcula para este momento flector. Para zapatas que soportan columnas de concreto reforzado, estas secciones críticas a flexión se localizan en las caras de las áreas cargadas, como se indica.

Para el caso de zapatas que sostienen columnas de acero, las secciones *ab* y *ef* se localizan no en el borde de la platina base de acero, sino en la mitad entre el borde de la columna y el borde de la platina base de acero, de acuerdo con el Código ACI 15.4.2.

Para el caso de zapatas con *pedestales*, el ancho del pedestal es el que resiste la compresión en las secciones *cd* y *ef*, la altura correspondiente es la suma de las alturas del pedestal y de la zapata. Para verificar la resistencia en sitios donde la altura es apenas igual a la de la zapata, se toman secciones

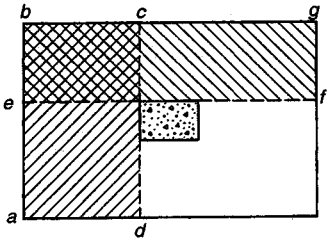


FIGURA 16.9
Secciones críticas para flexión y adherencia.

adicionales paralelas a *cd* y *ef* en el borde del pedestal y se determinan los momentos de igual manera que la anterior.

En zapatas con pedestales relativamente pequeños, a menudo éstos últimos se ignoran al calcular los momentos y los cortantes, y los efectos de la flexión se verifican en la cara de la columna, tomando un ancho y una altura iguales a los de la zapata misma.

En el caso de *zapatas cuadradas*, el refuerzo se distribuye uniformemente a lo ancho de la zapata en cada una de las dos capas, es decir, el espaciamiento de las barras es constante. Los momentos para los cuales se diseñan las dos capas son los mismos; sin embargo, la altura efectiva d para la capa superior es menor en un diámetro de barra que la de la capa inferior. En consecuencia, el área requerida A_s es mayor para la capa superior. En vez de utilizar espaciamientos o diámetros de barra diferentes en cada una de las dos capas, se acostumbra determinar el valor de A_s con base en la altura promedio y utilizar la misma distribución del refuerzo para las dos capas.

En el caso de *zapatas rectangulares*, el refuerzo en la *dirección larga* también se distribuye de modo uniforme sobre el ancho pertinente (el más corto). Para localizar las barras en la dirección corta, es necesario tener en cuenta que el soporte suministrado por la columna a la zapata se concentra cerca de la mitad; en consecuencia, la curvatura de la zapata es más pronunciada, es decir, el momento por pie es mayor inmediatamente bajo la columna y disminuye en la dirección larga a medida que se aumenta la distancia desde la columna. Por esta razón, se necesita un área de acero por pie de longitud mayor en la porción central que cerca de los extremos lejanos de la zapata. El Código ACI 15.4.4 establece, por tanto, lo siguiente:

> Para el refuerzo en la dirección corta, una porción del refuerzo total [determinado por la ecuación (16.11)] debe distribuirse uniformemente sobre un ancho de banda (centrado en el eje de la columna o pedestal) igual a la longitud del lado corto de la zapata. El resto del refuerzo que se requiere en la dirección corta debe distribuirse de manera uniforme por fuera del ancho de la banda central de la zapata

$$\frac{\text{Refuerzo en el ancho de la banda}}{\text{Refuerzo total en la dirección corta}} = \frac{2}{\beta + 1} \qquad (16.11)$$

En la ecuación (16.11), β es la relación del lado largo al lado corto de la zapata.

De acuerdo con el Código ACI 10.5.4 de 1995, las cuantías mínimas de refuerzo de la sección 3.4*d* no se aplican a losas o a zapatas. En lugar de esto, deben imponerse los requisitos de acero mínimos para control de agrietamiento por retracción de fraguado y temperatura para losas estructurales, según lo establecido en la tabla 12.2. El espaciamiento máximo de barras en la dirección de la luz se reduce al menor entre 3 veces el espesor de la losa h y 18 pulg, en lugar de $5h$ como es usual para el acero de retracción y temperatura. Estos requisitos de acero mínimo y espaciamientos máximos deben aplicarse a losas de cimentación al igual que a zapatas aisladas.

Las ediciones anteriores del Código ACI, incluyendo la más reciente de 1989, eran algo ambiguas sobre si los requisitos de acero mínimos para elementos a flexión debían aplicarse a losas y zapatas. Para el caso de losas estructurales, el argumento que se presentaba era que una sobrecarga se redistribuiría lateralmente y, por tanto, es menos probable una falla súbita que para el caso de vigas; así, el requisito usual podría liberarse. Aunque este razonamiento puede aplicarse a entrepisos de edificios bastante indeterminados, la posibilidad de redistribución en una zapata es mucho más limitada. Como consecuencia y ante la importancia de las zapatas en la seguridad de la estructura, muchos ingenieros aplican la cuantía mínima de acero a flexión de la ecuación (3.40*a*) para zapatas al igual que para vigas. Esto parece razonable de manera que en los ejemplos de diseño que siguen se utilizan los requisitos más conservadores de acero a flexión mínimo de la ecuación (3.40*a*).

Las secciones críticas para las longitudes de desarrollo de las barras de la zapata son las mismas que para flexión. La longitud de desarrollo también se debe cumplir en todos los planos verticales donde ocurren cambios de sección o de refuerzo, como en los bordes de los pedestales o donde se interrumpa parte del refuerzo.

Ejemplo 16.2. Diseño de una zapata cuadrada. Una columna cuadrada de 18 pulg con $f'_c = 4$ klb/pulg^2 y reforzada con 8 barras No. 8 con $f_y = 50$ klb/pulg^2 soporta una carga muerta de 225 klb y una carga viva de 175 klb. La presión de suelo admisible q_a es 5 klb/pie^2. Diseñe una zapata cuadrada cuya base está a 5 pies por debajo del nivel del terreno, utilizando $f'_c = 4$ klb/pulg^2 y $f_y = 50$ klb/pulg^2.

Solución. Puesto que el espacio entre la parte inferior de la zapata y la superficie del terreno está ocupado parcialmente por concreto y en parte por suelo (relleno), se supone un peso unitario promedio de 125 lb/pie^3. La presión de este material a la profundidad de 5 pies es de $5 \times 125 = 625$ lb/pie^2, que deja disponible una presión de contacto de $q_e = 5000 - 625 = 4375$ lb/pie^2 para sostener la carga de servicio de la columna. De ahí que el área requerida de zapata es $A_{req} = (225 + 175)/4.375 = 91.5$ pie^2. Se selecciona una base cuadrada de 9 pies 6 pulg, que proporciona un área de zapata de 90.3 pie^2, la cual difiere del área requerida en aproximadamente el uno por ciento.

Para diseño a la resistencia, la presión hacia arriba producida por las cargas mayoradas de la columna es $q_u = (1.4 \times 225 + 1.7 \times 175)/9.5^2 = 6.80$ klb/pie^2.

La altura de zapata para las zapatas cuadradas se determina por lo general a partir del cortante en dos direcciones o el cortante por punzonamiento sobre el perímetro crítico *abcd* de la figura 16.10. Cálculos tentativos sugieren un valor de $d = 19$ pulg. De ahí que la longitud del perímetro crítico es

$$b_o = 4(18 + d) = 148 \text{ pulg}$$

La fuerza cortante que actúa sobre este perímetro es igual a la presión total hacia arriba menos la presión que hay dentro del perímetro *abcd*, o sea:

$$V_{u1} = 6.8\left[9.5^2 - \left(\frac{37}{12}\right)^2\right] = 550 \text{ klb}$$

La resistencia nominal a cortante correspondiente [ecuación (13.11*a*)] es

$$V_c = 4\sqrt{4000} \times 148 \times \frac{19}{1000} = 711 \text{ klb}$$

y

$$\phi V_c = 0.85 \times 711 = 604 \text{ klb}$$

Puesto que la existencia de diseño excede la resistencia requerida V_{u1}, la altura de $d = 19$ pulg es adecuada para el cortante por punzonamiento. El valor seleccionado de $d = 19$ pulg se verifica ahora para el cortante en una dirección o cortante por acción de viga sobre la sección *ef*. La fuerza cortante mayorada que actúa sobre esta sección es

$$V_{u2} = 6.8 \times 2.42 \times 9.5 = 156 \text{ klb}$$

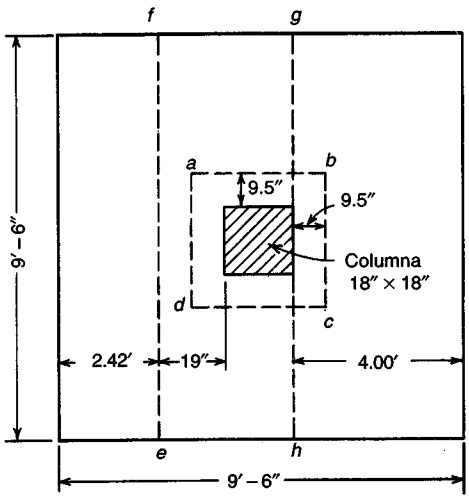


FIGURA 16.10
Secciones críticas para el ejemplo 16.2.

y la resistencia a cortante nominal es

$$V_c = 2\sqrt{4000} \times 9.5 \times 12 \times \frac{19}{1000} = 274 \text{ klb}$$

La resistencia a cortante de diseño 0.85 × 274 = 233 klb es mayor que la resistencia a cortante requerida V_{u2} de manera que d = 19 pulg también es apropiada para el cortante en una dirección.

El momento flector en la sección *gh* de la figura 16.10 es

$$M_u = 6.8 \times 9.5 \frac{4.0^2}{2} 12 = 6200 \text{ klb-pulg}$$

Puesto que la altura requerida por cortante está muy por encima de la que exige la flexión, la cuantía de acero será baja y la altura correspondiente del bloque rectangular de esfuerzos será pequeña. Si a = 2 pulg, el área requerida de acero es

$$A_s = \frac{6200}{0.9 \times 50(19 - 1)} = 7.65 \text{ pulg}^2$$

Al revisar la cuantía de acero mínima mediante la ecuación (3.40*a*), se encuentra que

$$A_{s,\,\min} = \frac{3\sqrt{4000}}{50{,}000} \times 114 \times 19 = 8.22 \text{ pulg}^2$$

pero no menor que

$$A_{s,\,\min} = \frac{200}{50{,}000} \times 114 \times 19 = 8.66 \text{ pulg}^2$$

El valor que controla de 8.66 pulg^2 es mayor que el valor de 7.65 pulg^2 calculado para flexión. Se utilizarán 11 barras No. 8 en cada dirección, las cuales suministran 8.64 pulg^2. La longitud de desarrollo que se requiere más allá de la sección *gh* se encuentra a partir de la tabla A.11 y es igual a 40 pulg, la cual se cumple más que adecuadamente con la longitud real de las barras que se prolongan más allá, una distancia de 48 – 3 = 45 pulg.

Si se verifica la transferencia de fuerzas en la base de la columna, se encuentra que el concreto de la zapata, que tiene el mismo valor de f'_c que la columna de concreto y para el cual la resistencia se mejora de acuerdo con la ecuación (16.10), claramente es capaz de soportar la parte de la carga de la columna que transmite el concreto de ésta. La fuerza en la columna tomada por el acero se transmitirá a la zapata utilizando bastones que coincidan con las barras de la columna. Éstos deben extenderse dentro de la zapata la longitud de desarrollo completa a compresión que se determina a partir de la tabla A.12 del apéndice A y es igual a 16 pulg para las barras No. 8. Esto se acomoda fácilmente en la zapata con un valor de d = 19 pulg. Por encima de la superficie superior de la zapata,

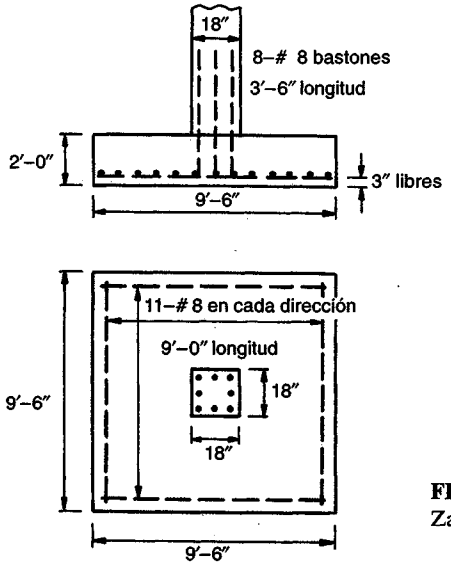


FIGURA 16.11
Zapata del ejemplo 16.2.

los bastones No. 8 deben extenderse dentro de la columna esa misma longitud de desarrollo, pero no menos que el requisito para empalmes por traslapo a compresión (ver la sección 5.11*b*). La longitud de empalme por traslapo mínima para las barras No. 8 es $0.0005 \times 1.0 \times 50{,}000 = 25$ pulg que, como se observa, controla en este caso. Así, las barras se llevarán 25 pulg dentro de la columna, requiriéndose una longitud total del bastón de 41 pulg; este valor se redondeará hacia arriba, por razones prácticas, hasta un valor de 3.5 pies, como se ilustra en la figura 16.11. Finalmente, se confirma que en este caso no controla la mínima cantidad de acero exigida para los bastones $0.005 \times 18 \times 18 = 1.62$ pulg^2.

Para concreto en contacto con la tierra, se requiere un recubrimiento mínimo de 3 pulg para protección contra la corrosión. Con un valor de $d = 19$ pulg, medido desde la parte superior de la zapata hasta el centro de la capa superior de barras, la altura total de la zapata que se necesita para garantizar el recubrimiento libre de 3 pulg para la capa de acero inferior es

$$h = 19 + 1.5 \times 1 + 3 = 23.5 \text{ pulg}$$

La zapata, con una altura de 24 pulg, se presenta en la figura 16.11.

16.7 ZAPATAS COMBINADAS

Las zapatas superficiales que sostienen más de una columna o muro se conocen como *zapatas combinadas*. Éstas pueden dividirse en dos categorías: aquellas que soportan dos columnas y las que sostienen más de dos columnas (en general una cantidad grande).

Ejemplos del primer tipo, es decir, zapatas para dos columnas, se ilustran en la figura 16.1. En edificios donde la presión del suelo admisible es suficientemente grande para que puedan proyectarse zapatas individuales en la mayor parte de las columnas, las zapatas para dos columnas se hacen necesarias en dos situaciones: (1) cuando las columnas están tan cerca del límite de la propiedad que no se pueden construir zapatas individuales sin sobrepasar este límite, y (2) cuando algunas columnas adyacentes están tan cerca entre sí que sus zapatas se traslapan. Ambas situaciones se presentan en la figura 16.1.

Cuando la capacidad de carga del subsuelo es baja de modo que se hacen necesarias grandes áreas de contacto, las zapatas individuales se remplazan por *zapatas en franjas continuas* que sostienen más de dos columnas y por lo general todas las columnas en una fila. Algunas veces estas franjas se disponen en las dos direcciones, en cuyo caso se obtiene una *cimentación reticular*, como se indica en la figura 16.12. Las cimentaciones por franjas pueden proyectarse para que desarrollen un área de contacto mucho mayor, lo cual resulta más económico que proyectar zapatas individuales, puesto que las franjas individuales representan vigas continuas cuyos momentos son mucho menores que los momentos en los voladizos de las grandes zapatas individuales que se extienden distancias considerables desde la columna en las cuatro direcciones.

En muchos casos, las franjas se traslapan entre sí para obtener una losa de cimentación, como se indica en la figura 16.13. Es decir, la cimentación consta de una losa maciza de concreto reforzado ubicada en la planta inferior de todo el edificio. El comportamiento estructural de este tipo de losas es muy similar al de una losa plana o una placa plana, pero volteada, es decir, cargada hacia arriba por la

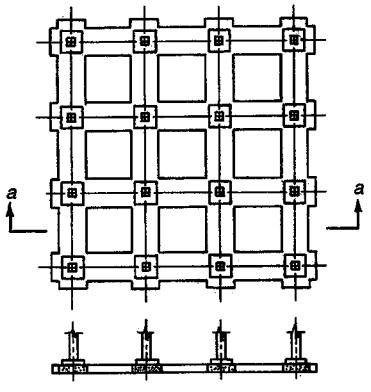


FIGURA 16.12
Cimentación reticular.

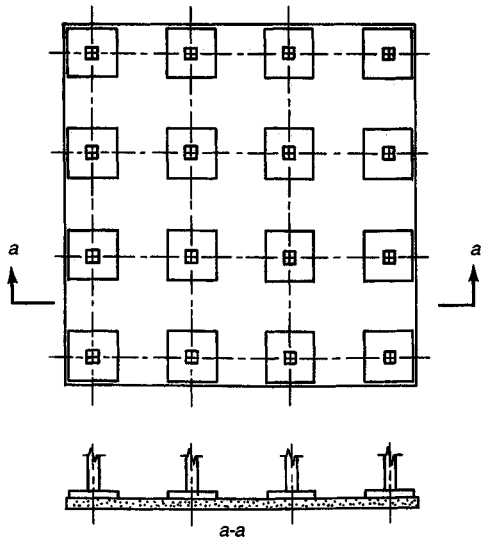


FIGURA 16.13
Losa de cimentación.

presión de contacto y hacia abajo por las reacciones concentradas en las columnas. La losa de cimentación desarrolla evidentemente la máxima área de contacto disponible bajo el edificio. Si la capacidad del suelo es tan baja que aún esta gran área de contacto es insuficiente, debe utilizarse algún tipo de cimentación profunda, como pilotes o pilas. Éstos se analizan en textos de diseño de cimentaciones y están por fuera del alcance de este libro.

Las losas de cimentación pueden diseñarse con pedestales en las columnas, como se ilustra en las figuras 16.12 y 16.13, o sin ellos, dependiendo de si éstos son necesarios o no para la resistencia a cortante y para la longitud de desarrollo de los bastones.

Además de desarrollar grandes áreas de contacto, otra ventaja de las cimentaciones continuas, reticulares o de las losas de cimentación, consiste en que su continuidad y rigidez ayudan a reducir los asentamientos diferenciales de las columnas individuales con respecto a las adyacentes, que de otra manera pueden presentarse por variaciones locales en la calidad del subsuelo u otras causas. Con este propósito, las cimentaciones superficiales continuas se utilizan a menudo en situaciones donde la superestructura o el tipo de ocupación son especialmente sensibles a los asentamientos diferenciales.

Las referencias 16.9 y 16.10 presentan una información de diseño abundante y de mucha importancia en relación con zapatas combinadas y losas de cimentación.

16.8 ZAPATAS PARA DOS COLUMNAS

Es aconsejable diseñar las zapatas combinadas de modo que el centroide del área de la zapata coincida con la resultante de las cargas de las dos columnas. Esto produce una presión de contacto uniforme sobre la totalidad del área y evita la tendencia a la inclinación de la zapata. Vistas en planta, estas zapatas son rectangulares, trapezoidales o en forma de T, y los detalles de su forma se acomodan para que coincidan su centroide y el de la resultante. Las relaciones sencillas de la figura 16.14 facilitan la determinación de la forma del área de contacto (tomadas de la referencia 16.7). En general, las distancias m y n están dadas, siendo la primera la distancia desde el centro de la columna exterior hasta el límite de la propiedad y la segunda la distancia desde esta columna hasta la resultante de las cargas de las dos columnas.

Otro recurso que se utiliza cuando una zapata sencilla no puede centrarse bajo una columna exterior, consiste en colocar la zapata para la columna exterior en forma excéntrica y conectarla con la zapata de la columna interior más cercana mediante una viga o una banda de amarre. Esta viga de amarre, al estar balanceada por la carga de la columna interior, resiste la tendencia a la inclinación de la zapata exterior

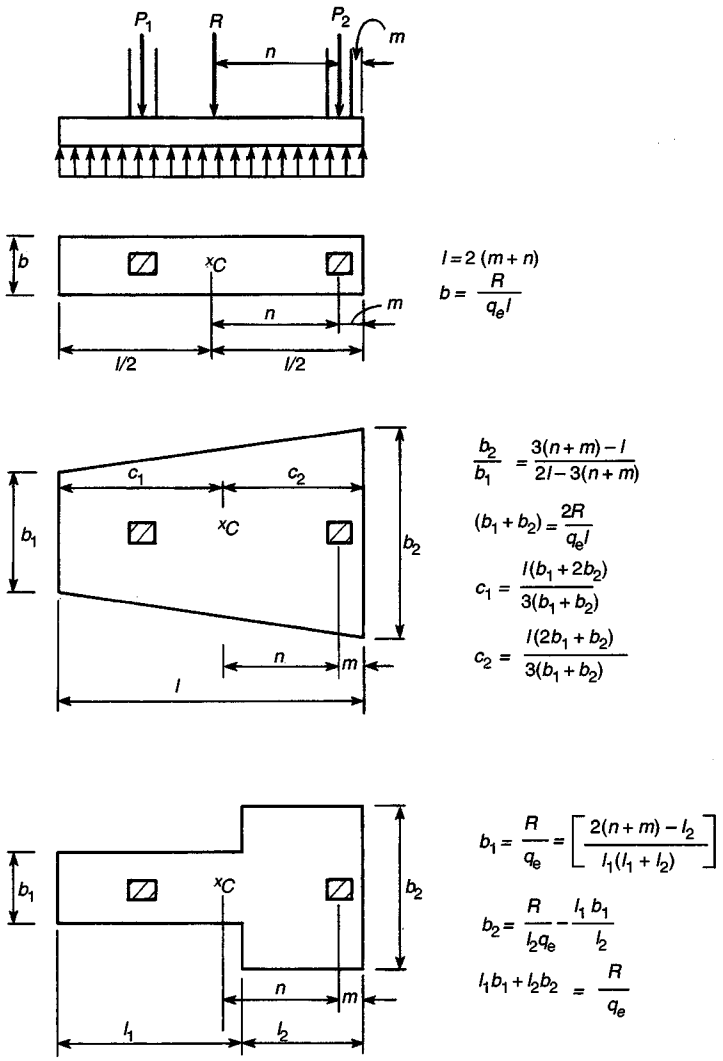


FIGURA 16.14
Zapatas para dos columnas (*adaptada de la referencia 16.7*).

excéntrica e iguala las presiones bajo ésta. Este tipo de cimentaciones se conoce como zapatas con vigas de amarre, en voladizo o conectadas.

Los dos ejemplos que siguen demuestran algunas de las particularidades del diseño de las zapatas para dos columnas.

Ejemplo 16.3. Diseño de una zapata combinada que soporta una columna exterior y una columna interior. Una columna exterior de 24 × 18 pulg, con D = 170 klb, L = 130 klb y otra interior de 24 × 24 pulg, con D = 250 klb y L = 200 klb, van a cimentarse mediante una zapata rectangular combinada cuyo extremo exterior no puede sobresalir más allá de la cara externa de la columna exterior (ver la figura 16.1). La distancia centro a centro entre columnas es 18 pies 0 pulg y la presión de contacto admisible del suelo es de 6000 lb/pie^2. La parte inferior de la zapata se encuentra a 6 pies por debajo del nivel del terreno y se especifica una sobrecarga de 100 lb/pie^2 sobre la superficie. Diseñe la zapata para f'_c = 3000 lb/pulg^2 y f_y = 60,000 lb/pulg^2.

Solución. El espacio entre la parte inferior de la zapata y la superficie estará ocupado en parte por concreto (zapata, piso de concreto) y parcialmente por relleno. Se puede suponer un peso unitario promedio de 125 lb/pie^3. De ahí que la porción efectiva de la presión admisible de contacto que está disponible para soportar las cargas de las columnas es $q_e = q_a$ – (peso del relleno y del concreto + sobrecarga) = 6000 – (6 × 125 + 100) = 5150 lb/pie^2. Entonces, el área requerida A_{req} = suma de las

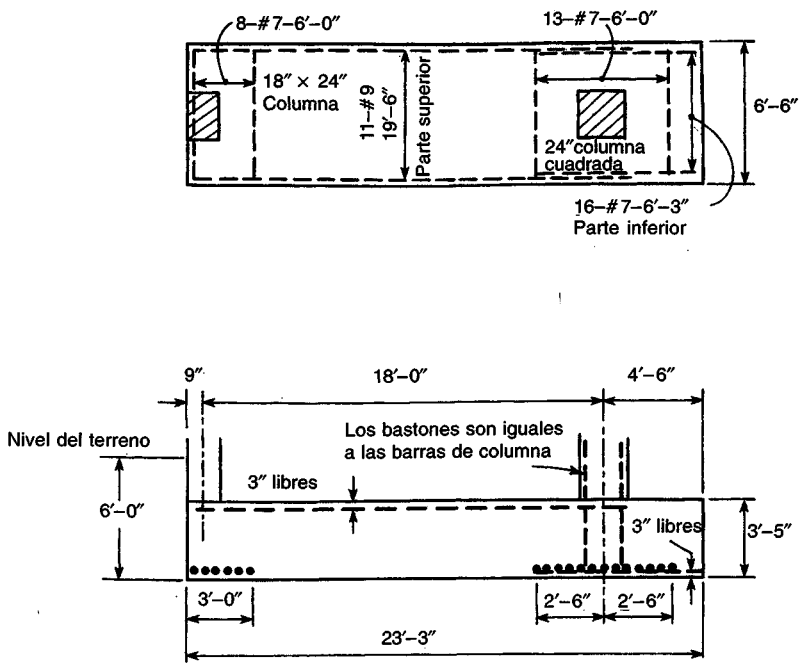


FIGURA 16.15
Zapata combinada del ejemplo 16.3.

cargas de columnas/q_e = 750/5.15 = 145.5 pie^2. La resultante de las cargas de las columnas se localiza a una distancia medida desde el centro de la columna exterior igual a 450 × 18/750 = 10.8 pies. Entonces, la longitud de la zapata debe ser 2(10.8 + 0.75) = 23.1 pies. Se selecciona una longitud de 23 pies 3 pulg. El ancho requerido es entonces 145.5/23.25 = 6.3 pies. Se selecciona un ancho de 6 pies 6 pulg (ver la figura 16.15).

Longitudinalmente, la zapata representa una viga cargada hacia arriba, que se extiende entre columnas y que está en voladizo más allá de la columna interior. Puesto que esta viga es considerablemente más ancha que las columnas, las cargas de éstas se distribuyen en dirección transversal mediante vigas transversales, una bajo cada columna. Para esta zapata relativamente delgada y larga, se encuentra que la altura mínima requerida para las vigas transversales es menor que la exigida para la zapata en la dirección longitudinal. Estas "vigas" no son, por tanto, elementos realmente diferentes, sino que representan simplemente franjas transversales en el cuerpo principal de la zapata, reforzadas de manera que sean capaces de resistir los momentos flectores transversales y los cortantes correspondientes. Entonces se hace necesario decidir qué tan grande se puede suponer el ancho efectivo de estas vigas transversales. Por supuesto, la franja directamente bajo la columna no se deflecta de modo independiente y se fortalece con las partes adyacentes de la zapata. El ancho efectivo de las vigas transversales es, por consiguiente, mayor que el de la columna. Ante la carencia de reglas definidas para este caso o de resultados de investigaciones en los cuales se puedan basar tales reglas, los autores recomiendan, en forma conservadora, que se asuma que la carga se distribuye hacia afuera desde la columna y dentro de la zapata con una pendiente de 2 medidas verticales a 1 horizontal. Esto significa que el ancho efectivo de la viga transversal se supone igual al ancho de la columna más $d/2$ a cada lado de la columna, donde d es la altura efectiva de la zapata.

Diseño a la resistencia en la dirección longitudinal
La presión neta que producen las cargas mayoradas de columna es

$$q_u = \frac{1.4(170 + 250) + 1.7(130 + 200)}{23.25 \times 6.5} = 7.60 \text{ klb/pie}^2$$

Entonces la presión neta hacia arriba por pie lineal en la dirección longitudinal es 7.60 × 6.5 = 49.4 klb/pie. El momento máximo negativo entre las columnas se presenta en la sección de cortante cero.

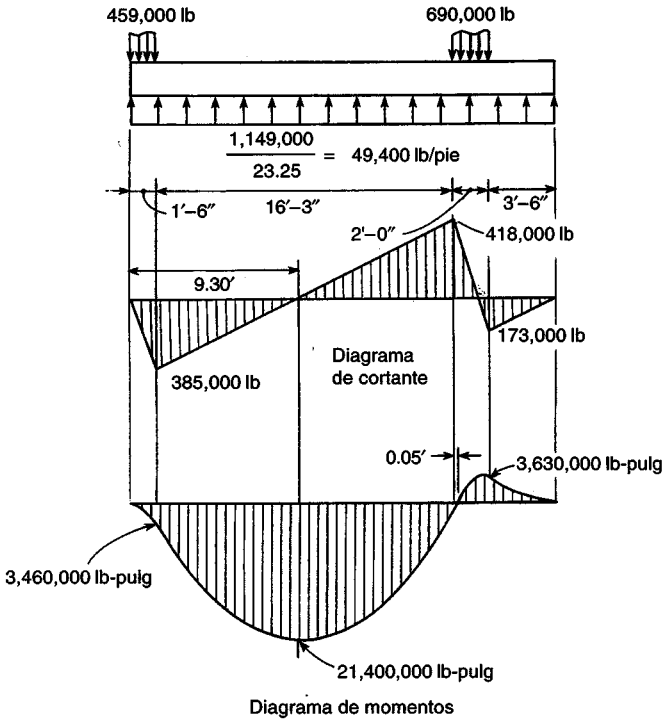


FIGURA 16.16
Diagramas de momento y de cortante para la zapata del ejemplo 16.3.

Sea x la distancia desde el borde externo de la columna exterior hasta esta sección, entonces (ver la figura 16.16)

$$V_u = 49{,}400x - 459{,}000 = 0$$

resulta en un valor de $x = 9.3$ pies. El momento en esta sección es:

$$M_u = \left[49{,}400\frac{9.3^2}{2} - 459{,}000(9.30 - 0.75)\right]12 = -21{,}400{,}000 \text{ lb-pulg}$$

El momento en el borde derecho de la columna inferior es:

$$M_u = 49{,}400\frac{3.5^2}{2}12 = 3{,}630{,}000 \text{ lb-pulg}$$

y los detalles del diagrama de momentos se ilustran en la figura 16.16. Se ensaya un valor de $d = 37.5$ pulg.

A partir del diagrama de cortante de la figura 16.16, se observa que la sección crítica a cortante por flexión se ubica a una distancia d a la izquierda de la cara izquierda de la columna interior. En este punto la resistencia requerida a cortante es

$$V_u = 418{,}000 - \frac{37.5}{12}49{,}400 = 264{,}000 \text{ lb-pulg}$$

y la resistencia a cortante de diseño es

$$\phi V_c = 0.85 \times 2\sqrt{3000} \times 78 \times 37.5 = 272{,}000 \text{ lb} > V_u$$

lo cual indica que un valor de $d = 37.5$ pulg es adecuado.

Además, al igual que para zapatas individuales, debe verificarse el cortante por punzonamiento sobre una sección perimetral a una distancia de $d/2$ alrededor de la columna, donde el esfuerzo

cortante nominal es $v_c = 4\sqrt{3000} = 220$ lb/pulg^2. De las dos columnas, la exterior con un perímetro de tres lados, a una distancia $d/2$ desde la columna, es más crítica con respecto a este cortante por punzonamiento. El perímetro es

$$b_o = 2\left(1.5 + \frac{37.5/12}{2}\right) + \left(2.0 + \frac{37.5}{12}\right) = 11.24 \text{ pies}$$

y la fuerza cortante, calculada como la carga en la columna menos la presión del suelo dentro del perímetro resulta:

$$V_u = 459{,}000 - 3.06 \times 5.12(7600) = 340{,}000 \text{ lb}$$

Por otra parte, la resistencia de diseño a cortante en la sección perimetral es

$$\phi V_c = 0.85 \times 220 \times 11.24 \times 12 \times 37.5 = 946{,}000 \text{ lb}$$

que es considerablemente mayor que la resistencia requerida V_u.

Con un valor de $d = 37.5$ pulg y con un aislamiento desde el centro de las barras hasta la superficie superior de la zapata de 3.5 pulg, la altura total es de 41 pulg.

Para determinar el área requerida de acero, $M_u/\phi bd^2 = 21{,}400{,}000/(0.9 \times 78 \times 37.5^2) = 217$ se utiliza para entrar en el gráfico A.1*b* del apéndice A. Para este valor, la curva 60/3 da una cuantía de acero $\rho = 0.0037$. El área requerida de acero es $A_s = 0.0037 \times 37.5 \times 78 = 10.8$ pulg^2. Once barras No. 9 suministran un área de 11.00 pulg^2. La longitud de desarrollo que se requiere es de 6.7 pies. A partir de la figura 16.16, la distancia desde el punto de momento máximo hasta el extremo izquierdo más cercano de las barras se observa que es $9.30 - \frac{3}{12} = 9.05$ pies, mucho mayor que la mínima longitud de desarrollo exigida. Por tanto, el refuerzo seleccionado es adecuado tanto para flexión como para adherencia.

Para la porción de la viga longitudinal que está en voladizo más allá de la columna interior, controla el área mínima de acero que se requiere. En este caso

$$A_{s,\min} = \frac{3\sqrt{3000}}{60{,}000} \times 78 \times 37.5 = 8.01 \text{ pulg}^2$$

pero no menos que

$$A_{s,\min} = \frac{200}{60{,}000} \times 78 \times 37.5 = 9.75 \text{ pulg}^2$$

Se seleccionan 16 barras No. 7 con un $A_s = 9.62$ pulg^2; su longitud de desarrollo se calcula en forma similar, pero teniendo en cuenta que son barras inferiores, se encuentra que es adecuada.

Diseño de la viga transversal bajo la columna interior

Ahora, el ancho de la viga transversal bajo la columna interior se puede determinar como se sugirió anteriormente y es igual a $24 + 2(d/2) = 24 + 2 \times 18.75 = 61.5$ pulg. La carga neta hacia arriba por pie lineal de viga transversal es 690,000/6.5 = 106,000 lb/pie. El momento en el borde de la columna interior es

$$M_u = 106{,}000\frac{2.25^2}{2}12 = 3{,}220{,}000 \text{ lb-pulg}$$

Puesto que las barras transversales se colocan por encima de las barras longitudinales (ver la figura 16.15), el valor real de d que se suministra es $37.5 - 1.0 = 36.5$ pulg. En este caso controla el área mínima de acero requerida, es decir,

$$A_s = \frac{200}{60{,}000}61.5 \times 36.5 = 7.48 \text{ pulg}^2$$

Se seleccionan trece barras No.7 que se colocan dentro del ancho efectivo de 61.5 pulg de la viga transversal.

El cortante por punzonamiento en el perímetro, a una distancia $d/2$ de la columna se revisó anteriormente. La sección crítica para el cortante por flexión regular, a una distancia d de la cara de la columna, cae por fuera del borde de la zapata y por consiguiente no se necesitan verificaciones adicionales con respecto al cortante.

El diseño de la viga transversal bajo la columna exterior es igual al de la viga bajo la columna interior, excepto que el ancho efectivo es 36.75 pulg; los detalles del cálculo no se presentan. Fácilmente se verifica que ocho barras No. 7, colocadas dentro del ancho efectivo de 36.75 pulg, satisfacen todos los requisitos. Los detalles de diseño se ilustran en la figura 16.15.

Ejemplo 16.4. Diseño de zapatas con viga de amarre. En el caso de zapatas con viga de amarre o zapatas conectadas, la zapata exterior se coloca en forma excéntrica bajo su columna, de manera que no sobresalga más allá del límite de la propiedad. Esta posición excéntrica generaría una distribución muy dispareja de la presión de contacto, que podría llevar a la inclinación o incluso al volcamiento de la zapata. Para contrarrestar esta excentricidad, la zapata se conecta mediante una viga o franja de amarre a la zapata interior más cercana.

Las dos zapatas se dimensionan de manera que, bajo la carga de servicio, las presiones en cada una de ellas sean uniformes e iguales entre sí. Para lograr esto es necesario, al igual que en otras zapatas combinadas, que el centroide del área combinada para las dos zapatas coincida con la resultante de las cargas de las columnas. Las fuerzas resultantes se presentan en forma esquemática en la figura 16.17; éstas constan de las cargas P_e y P_i de las columnas exterior e interior respectivamente, y de la presión neta hacia arriba q, que es uniforme e igual bajo ambas zapatas. Las resultantes R_e y R_i de estas presiones hacia arriba también se indican en la figura. Puesto que la zapata interior es concéntrica con la columna interior, R_i y P_i son colineales. Esto no ocurre para las fuerzas exteriores R_e y P_e para las cuales el par resultante balancea justamente el efecto de la excentricidad de la columna con respecto al centro de la zapata. La viga de amarre se construye por lo general de modo que no se apoye sobre el suelo. Esto puede lograrse colocando formaleta no sólo a los lados sino también en la cara inferior y retirándola antes de rellenar.

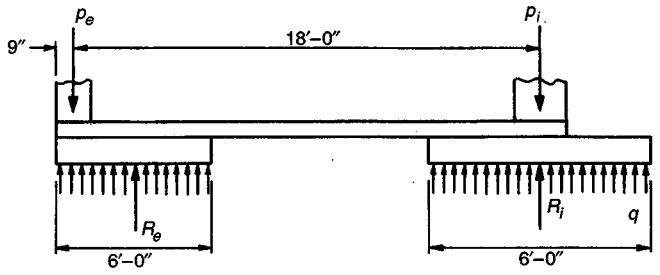


FIGURA 16.17
Fuerzas y reacciones en las zapatas con viga de amarre del ejemplo 16.4.

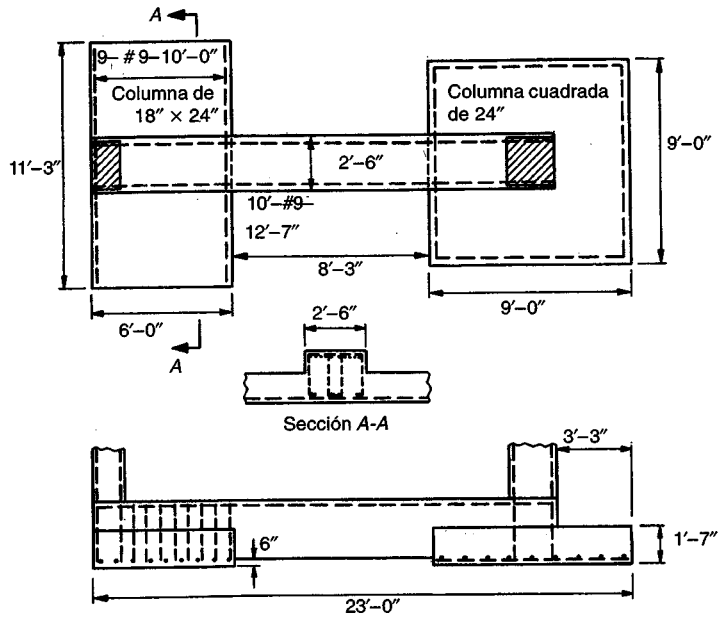


FIGURA 16.18
Zapatas con viga de amarre del ejemplo 16.4.

Para ilustrar este diseño, las columnas del ejemplo 16.3 se apoyarán ahora sobre zapatas con viga de amarre. En la figura 16.18 se ilustra su forma general y sus dimensiones, las cuales sólo se determinarán posteriormente mediante cálculos. Considerando una presión admisible de contacto de $q_a = 6.0$ klb/pie^2 y una profundidad de 6 pies hasta la parte inferior de la zapata como antes, la presión de contacto disponible para soportar las cargas externas aplicadas a la zapata es $q_e = 5.15$ klb/pie^2, al igual que en el ejemplo 16.3. Para zapatas con vigas de amarre, estas cargas externas incluyen las cargas de las columnas y el peso de la viga más el relleno y la sobrecarga de aquella parte de la viga de amarre localizada entre las zapatas (la porción de la viga de amarre localizada directamente en la parte superior de la zapata remplaza una cantidad correspondiente de relleno y, por tanto, ya se tiene en cuenta en la determinación de la presión admisible de contacto q. Si la parte inferior de la viga de amarre se encuentra 6 pulg por encima de la parte inferior de las zapatas para evitar el contacto con el suelo, la profundidad total desde el nivel del terreno es 5.5 pies. Si se estima el ancho de la viga de amarre en 2.5 pies, su peso estimado más el relleno y la sobrecarga es $2.5 \times 5.5 \times 0.125 + 0.100 \times 2.5 = 2$ klb/pie. Si la distancia libre entre zapatas se estima en 8 pies, el peso total de la viga de amarre es 16 klb. Por tanto, con el propósito de determinar el área requerida de zapatas, se adicionarán 8 klb a la carga muerta de cada columna. El área total que se requiere para las dos zapatas es entonces $(750 + 16)/5.15 = 149$ pie^2. La distancia desde la resultante de las dos cargas de columna más la carga de la viga de amarre hasta el eje de la columna exterior, en forma suficientemente precisa, es igual a $458 \times 18/766 = 10.75$ pies, o sea, 11.50 pies desde el borde de afuera, casi idéntica al valor calculado para el ejemplo 16.3. Cálculos tentativos demuestran que una zapata rectangular de 6 pies 0 pulg × 11 pies 3 pulg bajo la columna exterior y una zapata cuadrada de 9 × 9 pies bajo la columna interior tienen un área combinada de 149 pie^2 y una distancia desde el borde de afuera hasta el centroide del área combinada de $(6 \times 11.25 \times 3 + 9 \times 9 \times 18.75)/149 = 11.55$ pies, que es casi exactamente igual a la distancia hasta la resultante de las fuerzas externas, calculada previamente.

Para *cálculos de resistencia*, la presión de contacto producida por las cargas externas mayoradas, que incluyen la de la viga de amarre con su relleno y sobrecarga, es

$$q_u = \frac{1.4(170 + 250 + 16) + 1.7(130 + 200)}{149} = 7.8 \text{ klb/pie}^2$$

Diseño de zapatas

La zapata exterior se comporta exactamente igual a una zapata para un muro de 6 pies de longitud. Aunque la columna se localiza en su borde, la acción de balanceo de la viga de amarre se dispuso de manera que se obtuviera una presión de contacto uniforme, donde la carga hacia abajo se transmite de manera uniforme a la zapata a través de la viga de amarre. Por consiguiente, el diseño se hace exactamente igual al de una zapata para muro (ver la sección 16.5).

La zapata interior, aunque se traslapa en parte con la viga de amarre, puede diseñarse en forma segura como una zapata cuadrada independiente para una columna sencilla (ver la sección 16.6). La principal diferencia consiste en que, por la presencia de la viga de amarre, no puede presentarse el cortante por punzonamiento a lo largo de la superficie en forma de trono de pirámide de la figura 16.6. Por esta razón, de acuerdo con la ecuación (16.7), el cortante por punzonamiento o cortante en dos direcciones debe verificarse a lo largo de una sección perimetral localizada a una distancia $d/2$ hacia afuera de los bordes longitudinales de la viga de amarre y de la cara libre de la columna, donde d es la altura efectiva de la zapata. El cortante por flexión o cortante en una dirección, como es usual, se verifica en una sección a una distancia d desde la cara de la columna.

Diseño de la viga de amarre

Aunque la viga de amarre es monolítica con la zapata interior, el efecto de la presión del suelo sobre dicha viga bajo esta zapata puede ignorarse en forma segura, puesto que la zapata se diseñó para soportar la totalidad de la presión hacia arriba como si la viga de amarre no existiera. En contraste, si se hubiera diseñado la zapata exterior como una zapata para muro que recibe su carga a través de la viga de amarre, la presión hacia arriba causada por la zapata se convertiría en una carga que

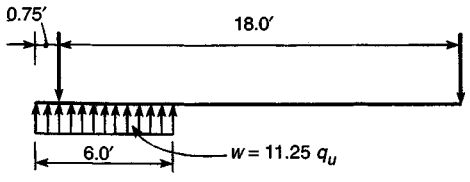


FIGURA 16.19
Fuerzas actuantes en la viga de amarre del ejemplo 16.4.

debería ser resistida por la viga de amarre. Con esta simplificación de la situación real, un poco más compleja, la viga de amarre representa una viga de una sola luz cargada hacia arriba por la presión de contacto bajo la zapata exterior y sostenida por reacciones hacia abajo en los ejes de las dos columnas (ver la figura 16.19). Se selecciona un ancho de 30 pulg para una ancho de columna de 24 pulg, lo que permite colocar las barras de las vigas y de las columnas sin interferencia en los sitios donde los dos elementos se intersectan, y permite además apoyar las formaletas de las columnas en la parte superior de la viga de amarre. El momento máximo, determinado al igualar la fuerza cortante a cero, se presenta muy cerca del borde interior de la zapata exterior. Las fuerzas cortantes son grandes en la vecindad de la columna exterior. En la figura 16.18, la zapata se dibuja aproximadamente a escala y se ilustra en forma simultánea la distribución general del refuerzo en las zapatas y en la viga de amarre.

16.9 CIMENTACIONES CONTINUAS, RETICULARES Y LOSAS DE CIMENTACIÓN

Como se mencionó en la sección 16.7, en el caso de columnas sometidas a cargas considerables, en particular si están soportadas por suelos relativamente blandos o poco uniformes, se recurre a la utilización de cimentaciones continuas. Éstas pueden ser *zapatas continuas*, que soportan todas las columnas en determinada fila, o dos conjuntos de estas zapatas en franjas que se intersectan formando ángulos rectos, de modo que conformen una *cimentación reticular* continua (ver la figura 16.12). Para cargas aun mayores o suelos más blandos, las franjas se traslapan obteniéndose una *losa de cimentación* (ver la figura 16.13).

Para el diseño de estas cimentaciones es necesario hacer suposiciones razonablemente realistas con respecto a la distribución de las presiones de contacto que actúan como cargas hacia arriba sobre la cimentación. Para suelos compresibles, es posible suponer como una primera aproximación que la deformación o asentamiento del suelo en determinado sitio y la presión de contacto en el mismo son proporcionales entre sí. Si las columnas se encuentran espaciadas a distancias moderadas y si la cimentación continua o reticular o la losa de cimentación es muy rígida, los asentamientos en todos los puntos de la cimentación serán esencialmente los mismos. Esto significa que la presión de contacto, también conocida como *reacción de la subrasante*, será la misma siempre y cuando el centroide de la cimentación coincida con la resultante de las cargas. Si esto no sucede, entonces en estas cimentaciones rígidas la reacción de la subrasante puede suponerse que varía linealmente y se determina mediante estática, de la misma manera que para zapatas individuales (ver la figura 16.3). En este caso se conocen todas las cargas, tanto las de columna hacia abajo como las presiones de contacto hacia arriba. En consecuencia, los momentos y las fuerzas cortantes en la cimentación pueden determinarse mediante estática. Una vez que se determinan estos valores, el diseño de la cimentación continua o reticular es similar al de las vigas continuas invertidas y el de la losa de cimentación equivale al de losas o placas planas invertidas.

De otra parte, si la cimentación es relativamente flexible y el espaciamiento entre columnas es considerable, los asentamientos no podrán considerarse uniformes o lineales. De un lado, las columnas sometidas a mayores cargas producirán asentamientos mayores y, por consiguiente, mayores reacciones de la subrasante que las columna con poca carga. Asimismo, puesto que la franja o losa continua se deflecta hacia arriba a medio camino entre columnas con respecto a las columnas más cercanas, esto significa que el asentamiento del suelo y, por tanto, la reacción de la subrasante, serán menores en la zona central entre columnas que directamente bajo éstas. Esto se presenta en forma esquemática en la figura 16.20. En este caso, la reacción de la subrasante ya no es uniforme. De manera similar, las losas de cimentación requieren métodos alternos de análisis, dependiendo de si pueden o no considerarse como rígidas para el cálculo de la reacción del suelo.

Se han establecido criterios para cuantificar la rigidez relativa de la estructura en comparación con la rigidez del suelo (ver las referencias 16.9 y 16.10). Si la rigidez relativa es baja, la cimentación debe diseñarse como un elemento flexible con una reacción no lineal hacia arriba del suelo. Para zapatas corridas, puede realizarse un análisis razonablemente preciso pero algo complejo, mediante la teoría de vigas sobre fundaciones elásticas (ver la referencia 16.11). Kramrisch (ver la referencia 16.7)

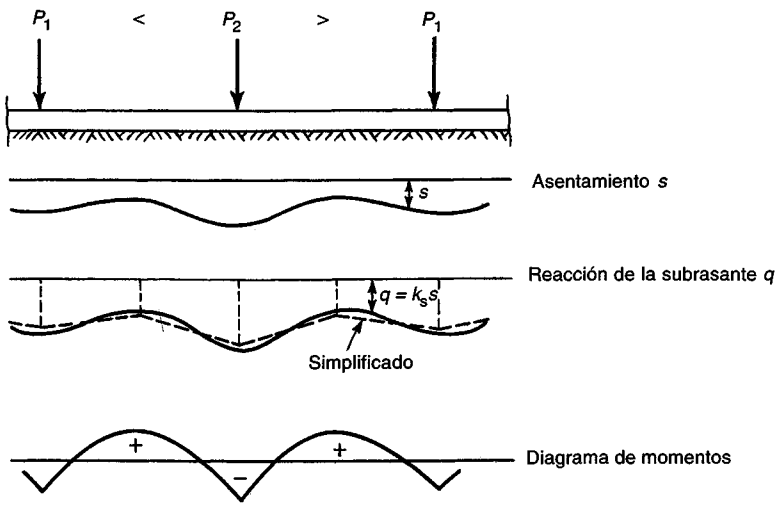


FIGURA 16.20
Zapata continua (*adaptada de la referencia 16.7*).

ha sugerido procedimientos simplificados, con base en la suposición de que las presiones de contacto varían linealmente entre puntos de carga, tal como se indica en la figura 16.20.

Para losas de cimentación no rígidas, se han realizado avances importantes en el análisis utilizando el método de los elementos finitos, el cual puede considerar de manera específica la rigidez de la estructura y del suelo. Existe una gran cantidad de programas de computador disponibles (por ejemplo, PCA-MATS, Portland Cement Association, Skokie, Illinois) basados en el método de los elementos finitos, los cuales permiten la realización rápida de modelos y el análisis para zapatas combinadas, franjas de zapatas y losas de cimentación.

16.10 DADOS DE PILOTES

Si la capacidad portante de los estratos superiores del suelo es insuficiente para una cimentación superficial, pero existen estratos más firmes a profundidades mayores, se utilizan pilotes para transferir las cargas a estos estratos más profundos; los pilotes se distribuyen en general en grupos o paquetes, uno bajo cada columna. El grupo se corona con una zapata de distribución, o dado, el cual distribuye la carga de la columna a todos los pilotes del grupo. Estos dados de pilotes son, en muchos aspectos, similares a las zapatas sobre suelo, excepto por dos características: la primera, que las reacciones en el dado actúan como cargas concentradas sobre los pilotes individuales, en vez de hacerlo como presiones distribuidas; la segunda, si el total de todas las reacciones de los pilotes de un grupo se divide por el área de la zapata para obtener una presión uniforme equivalente (sólo con propósitos de comparación), se encuentra que esta presión equivalente es sustancialmente mayor en los dados de los pilotes que en las zapatas superficiales. Esto significa que los momentos, y en particular los cortantes, también son mayores en forma recíproca, lo cual exige mayores alturas de zapata que para aquéllas superficiales con dimensiones horizontales similares. Con el fin de distribuir la carga a todos los pilotes de manera uniforme, es aconsejable en todo caso suministrar una rigidez considerable, es decir, una buena altura al dado de los pilotes.

Las capacidades admisibles de carga de los pilotes R_a se obtienen a partir de la exploración del suelo, de la energía de hincado de los pilotes y de pruebas de carga, y su determinación no está dentro del alcance de este libro (ver las referencias 16.1 a 16.3). Al igual que para zapatas superficiales, la porción efectiva de R_a disponible para resistir las cargas no mayoradas de las columnas es igual a la reacción admisible del pilote menos el peso de la zapata, del relleno y la sobrecarga por pilote. Es decir,

$$R_e = R_a - W_f \tag{16.12}$$

donde W_f es el peso total de la zapata, relleno y sobrecarga dividido por el número de pilotes.

Una vez determinada la reacción efectiva o disponible por pilote, R_e, el número de pilotes en un grupo cargado en forma concéntrica es igual al entero siguiente mayor que

$$n = \frac{D + L}{R_e}$$

Las consideraciones de diseño con respecto a los efectos del viento, a los momentos producidos por sismo en la base de las columnas y a la seguridad contra el volcamiento son las mismas que se hicieron en la sección 16.4 para zapatas superficiales. Estos efectos producen por lo general un grupo de pilotes cargado excéntricamente en el cual los distintos pilotes soportan cargas diferentes. La cantidad y ubicación de los pilotes en dicho grupo se determina mediante aproximaciones sucesivas, partiendo de la condición de que la carga en el pilote sometido a mayor carga no debe exceder la reacción admisible del pilote R_a. Con una distribución lineal de cargas en los pilotes a causa de la flexión, la máxima reacción de un pilote es

$$R_{\max} = \frac{P}{n} + \frac{M}{I_{pg}/c} \tag{16.13}$$

donde P es la carga máxima (incluye peso del dado, relleno, etc.) y M es el momento que debe resistir el grupo de pilotes, ambos referidos a la parte inferior del dado; I_{pg} es el momento de inercia del grupo completo de pilotes con respecto al eje centroidal alrededor del cual se produce la flexión; y c es la distancia desde ese eje hasta el pilote más alejado. Por ejemplo, $I_{pg} = \sum_1^n (1 \times y_n^2)$ es el momento de inercia de n pilotes, cada uno considerado como una unidad y localizado a una distancia y_n del eje centroidal descrito.

Los pilotes se distribuyen por lo regular en patrones ajustados, que minimizan el costo de los dados, pero no pueden colocarse a espaciamientos menores que los permitidos por las condiciones de hincamiento y que los que producirán alteración de la capacidad de carga. Se acostumbra utilizar un espaciamiento aproximado de tres veces el diámetro de la cabeza (parte superior) del pilote, pero no menor que 2 pies 6 pulg. Comúnmente, pilotes con reacciones admisibles entre 30 y 70 toneladas están espaciados a 3 pies 0 pulg (ver la referencia 16.7).

El *diseño* de zapatas sobre pilotes es similar al de zapatas para columnas individuales. Un método consiste en diseñar el dado para las reacciones de los pilotes calculadas con las cargas de columna

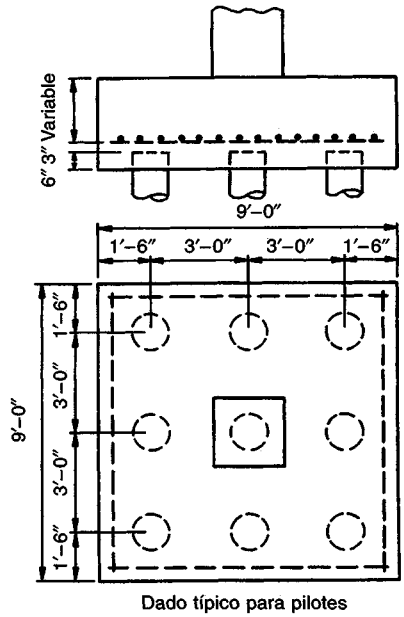


FIGURA 16.21
Zapata típica para columna individual sobre pilotes (dado de pilotes).

mayoradas. Para un grupo de pilotes cargado en forma concéntrica esto produciría $R_u = (1.4D + 1.7L)/n$. Sin embargo, debido a que la cantidad de pilotes se tomó igual al siguiente número entero mayor de acuerdo con la ecuación (16.13), la determinación de R_u de esta manera puede llevar a un diseño donde la resistencia del dado es menor que la capacidad del grupo de pilotes. En consecuencia, se recomienda tomar una reacción del pilote para el diseño a la resistencia igual a

$$R_u = R_e \times \text{factor de carga ponderado} \tag{16.14}$$

donde el factor de carga ponderado = $(1.4D + 1.7L)/(D + L)$. De este modo, el dado se diseña para que sea capaz de desarrollar la capacidad admisible total del grupo de pilotes. Los detalles de un dado común de pilotes se ilustran en la figura 16.21.

Así como en el caso de zapatas superficiales para columnas individuales, la altura del dado de pilotes es controlada por lo regular por cortante. Con respecto a esto debe tenerse en cuenta tanto el cortante por punzonamiento o en dos direcciones, como el cortante por flexión o en una dirección. Las secciones críticas son las mismas que las dadas en la sección 16.6*a*. La diferencia consiste en que el cortante se produce por las reacciones concentradas de los pilotes en lugar de las presiones distribuidas de contacto. De aquí surge el interrogante de cómo calcular el cortante si la sección crítica intersecta la circunferencia de uno o más pilotes. Para este caso, el Código ACI 15.5.3 tiene en cuenta el hecho de que la reacción del pilote no es en verdad una carga puntual, sino que se distribuye sobre el área de contacto del pilote. De acuerdo con esto, el Código establece lo siguiente para pilotes con diámetro d_p:

> El cálculo del cortante en cualquier sección a través de una zapata sobre pilotes se debe realizar de acuerdo con lo siguiente:
> (*a*) La reacción total de cualquier pilote cuyo centro se localice a una distancia $d_p/2$ o mayor por fuera de esta sección debe considerarse que produce cortante en esta sección.
> (*b*) La reacción de cualquier pilote cuyo centro se localice a una distancia de $d_p/2$ o mayor por dentro de la sección debe considerarse que no produce cortante en esta sección.
> (*c*) Para posiciones intermedias del centro del pilote, la porción de reacción del pilote que se considera que produce cortante en la sección debe basarse en una interpolación lineal entre el valor total a $d_p/2$ por fuera de la sección y cero a $d_p/2$ dentro de la sección.

Además de verificar el cortante en dos direcciones y en una dirección, como se describió anteriormente, también debe investigarse el cortante por punzonamiento para el pilote individual. Particularmente en el caso de dados sobre una pequeña cantidad de pilotes sometidos a cargas considerables, la altura requerida puede quedar controlada por la posibilidad de punzonamiento del pilote hacia arriba a través del dado. El perímetro crítico para esta acción se localiza de nuevo a una distancia $d/2$ por fuera del borde superior del pilote. Sin embargo, para dados con alturas relativamente grandes y con pilotes muy cercanos entre sí, los perímetros críticos alrededor de los pilotes adyacentes pueden traslaparse. En este caso, el fracturamiento, si se presenta, ocurrirá indudablemente a lo largo de una superficie inclinada hacia afuera alrededor de los dos pilotes adyacentes. Para estas situaciones, el perímetro crítico se localiza de modo que su longitud sea mínima, como aparece en la figura 16.22 para dos pilotes adyacentes.

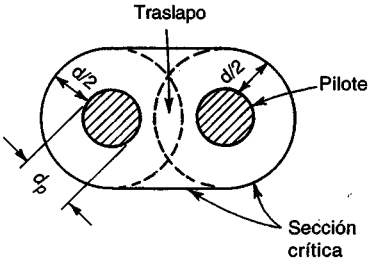


FIGURA 16.22
Sección crítica para cortante por punzonamiento en el caso de pilotes muy cercanos entre sí.

REFERENCIAS

16.1. R. B. Peck, W. E. Hanson, and T. H. Thornburn, *Foundation Engineering*, 2d ed., John Wiley and Sons, New York, 1974.

16.2. K. Terzaghi and R. B. Peck, *Soil Mechanics in Engineering Practice*, 2d ed., John Wiley and Sons, New York, 1967.

16.3. J. E. Bowles, *Foundation Analysis and Design*, 3d ed., McGraw-Hill, New York, 1982.

16.4. A. N. Talbot, "Reinforced Concrete Wall Footings and Column Footings", *Univ. Ill. Eng. Exp. Stn. Bull*, 67, 1913.

16.5. F. E. Richart, "Reinforced Concrete Wall and Column Footings", *J. ACI*, vol. 45, 1948, pp. 97 and 237.

16.6. E. Hognestad, "Shearing Strength of Reinforced Column Footings", *J. ACI*, vol. 50, 1953, p. 189.

16.7. F. Kramrisch, "Footings", chap. 5 in M. Fintel (ed.), *Handbook of Concrete Engineering*, 2d. Ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1985.

16.8. "The Shear Strength of Reinforced Concrete Members—Slabs", ASCE–ACI Task Committee 426, *J. Struct. Div.* ASCE, vol. 100, no. ST 8, 1974, pp. 1543-1591.

16.9. "Suggested Analysis and Design Procedures for Combined Footings and Mats", *ACI Struct. J.*, vol. 85, no. 3, 1988, pp. 304-324.

16.10. "Design and Performance of Mat Foundations—State of the Art Review", *Special Publication No. SP-152*, American Concrete Institute, Detroit, 1995.

16.11. M. Hetenyi, *Beams on Elastic Foundations*, Univ. Of Michigan Press, Ann Arbor, 1946.

16.12. P. Adebar, D. Kuchma, and M. P. Collins, "Strut-and-Tie Models for the Design of Pile Caps—An Experimental Study", *ACI Struct, J.*, vol. 87, no. 1, 1990, pp. 81-92.

PROBLEMAS

16.1. Una zapata continua se va a localizar concéntricamente bajo un muro de 12 pulg que entrega cargas de servicio $D = 25{,}000$ lb/pie y $L = 15{,}000$ lb/pie en la parte superior de la zapata. La parte inferior está 4 pies por debajo de la superficie final del terreno. El suelo tiene una densidad de 120 lb/pie^3 y una capacidad portante admisible de 8000 lb/pie^2. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 3000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. Determine: (*a*) el ancho requerido para la zapata; (*b*) las alturas efectiva y total que se requieren; con base en cortante, (*c*) el área requerida de acero a flexión.

16.2. Una columna interior de una estructura de concreto soporta cargas totales de servicio $D = 500$ klb y $L = 514$ klb. La sección transversal de la columna tiene 22 × 22 pulg y está reforzada con doce barras No. 11 centradas a 3 pulg de las caras de la columna (igual cantidad de barras en cada cara). Para la columna, $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. La columna se apoyará sobre una zapata cuadrada cuya parte inferior estará a 6 pies por debajo del nivel del terreno. Diseñe la zapata determinando todas las dimensiones del concreto, cantidad y ubicación de todo el refuerzo, incluyendo la longitud y ubicación de los bastones de acero. No se permite refuerzo a cortante. La presión admisible de contacto del suelo es 8000 lb/pie^2. Las resistencias de los materiales para la zapata son $f'_c = 3000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

16.3. Dos columnas interiores para una estructura de concreto alta están espaciadas a 15 pies entre sí y cada una soporta cargas de servicio $D = 500$ klb y $L = 514$ klb. Las columnas tendrán una sección transversal cuadrada de 22 pulg de lado y cada una se reforzará con doce barras No. 11 centradas a 3 pulg desde las caras de la columna, con una cantidad igual de barras en cada cara. Para la columna, $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 60{,}000$ lb/pulg^2. Las columnas se apoyarán en una zapata rectangular combinada, cuya dimensión del lado largo será el doble de la dimensión del lado corto. La presión de contacto admisible del suelo es 8000 lb/pie^2. La parte inferior de la zapata estará 6 pies por debajo del nivel del terreno. Diseñe la zapata para estas columnas utilizando $f'_c = 3000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. Especifique todo el refuerzo incluyendo la longitud y ubicación de la zapata, de las barras de refuerzo y del acero de los bastones.

16.4. Un dado de pilotes se va a diseñar para distribuir una fuerza concéntrica que transmite una columna individual a un grupo de nueve pilotes, con la geometría que aparece en la figura 16.21. El dado sostendrá una carga muerta calculada y una carga viva de servicio de 280 klb y 570 klb respectivamente, provenientes de la columna de concreto de sección transversal cuadrada de 19 pulg de lado y reforzada con seis barras No. 14. La carga admisible por pilote para cargas de servicio es 100 klb y el diámetro de los pilotes es 16 pulg. Determine las alturas efectiva y total, así como el refuerzo requeridos para el dado de pilotes. Revise todos los aspectos relevantes del diseño, incluyendo las longitudes de desarrollo para el refuerzo y la transferencia de fuerzas en la base de la columna. Las resistencias de los materiales para la columna son $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2, y para el dado de pilotes son $f'_c = 3000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

16.5. Complete el diseño del ejemplo 16.4 y determine todas las dimensiones y el refuerzo para las zapatas con viga de amarre. Compare el volumen total de concreto de las zapatas con viga de amarre del ejemplo 16.4 con el de la zapata combinada rectangular del ejemplo 16.3. Encontrará que el diseño de las zapatas con viga de amarre es significativamente más económico con respecto al material (aunque el proceso constructivo será más costoso). Esta economía de materiales se incrementará con el aumento de la distancia entre columnas.

CAPÍTULO

17 MUROS DE CONTENCIÓN

17.1 FUNCIÓN Y TIPOS DE MUROS DE CONTENCIÓN

Los muros de contención se utilizan para detener masas de tierra u otros materiales sueltos cuando las condiciones no permiten que estas masas asuman sus pendientes naturales. Estas condiciones se presentan cuando el ancho de una excavación, corte o terraplén está restringido por condiciones de propiedad, utilización de la estructura o economía. Por ejemplo, en la construcción de vías férreas o de carreteras, el ancho de servidumbre de la vía es fijo y el corte o terraplén debe estar contenido dentro de este ancho. De manera similar, los muros de los sótanos de edificios deben ubicarse dentro de los límites de la propiedad y contener el suelo alrededor del sótano.

A diferencia de aquellos que forman parte de estructuras como los muros de sótanos, los muros de contención autoportantes son de varios tipos y los más comunes se ilustran en la figura 17.1. El muro de gravedad (ver la figura 17.1*a*) contiene la tierra trabajando únicamente con su peso propio. El muro de concreto reforzado en voladizo (ver la figura 17.1*b*) consta de un cuerpo vertical que contiene la tierra y se mantiene en posición gracias a la zapata o losa base. En este caso, el peso del relleno por encima del talón, además del peso propio del muro, contribuye a la estabilidad de la estructura. Puesto que el cuerpo trabaja como un voladizo vertical, su espesor requerido aumenta rápidamente con el incremento de la altura del muro. Para reducir los momentos flectores en muros verticales de gran altura, se utilizan contrafuertes espaciados entre sí a distancias iguales o ligeramente mayores que la mitad de la altura del muro (ver la figura 17.1*c*). En algunos casos, los límites de la propiedad u otras restricciones obligan a colocar el muro en el borde delantero de la losa base, es decir, a omitir el puntal. Siempre que sea posible, una extensión en el puntal con una dimensión entre un tercio y un cuarto del ancho de la base suministra una solución más económica.

Cuál de los tres tipos de muros es el más apropiado en determinado caso depende de una variedad de condiciones como la disponibilidad local, el precio de los materiales de construcción y los derechos de propiedad. En general, los muros de gravedad son económicos sólo para muros relativamente bajos, probablemente hasta unos 10 pies. Los muros en voladizo son económicos para alturas entre 10 y 20 pies, mientras que los muros con contrafuertes se utilizan para alturas mayores.

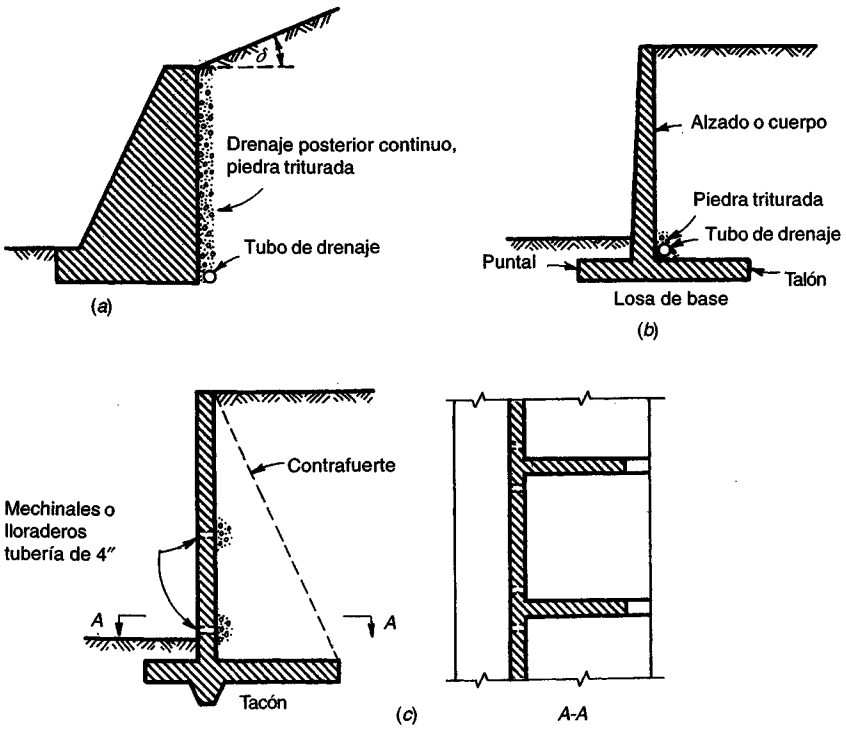


FIGURA 17.1
Tipos de muros de contención y drenajes posteriores: (*a*) muro de gravedad; (*b*) muro en voladizo; (*c*) muro con contrafuertes.

17.2 PRESIÓN DE TIERRA

Con respecto a su comportamiento físico, los suelos y otras masas granulares ocupan una posición intermedia entre los líquidos y los sólidos. Si se descarga arena desde una volqueta, ésta fluye pero, a diferencia de un líquido sin fricción, no asumirá una superficie horizontal; se mantiene por sí misma en una pila estable cuyos lados conforman un *ángulo de reposo* con la horizontal cuya tangente es casi igual al coeficiente de fricción intergranular. Si se excava un hueco en suelo arcilloso, sus lados pueden mantenerse verticales hasta profundidades considerables sin necesidad de soporte lateral; es decir, la arcilla se comportará como un sólido y mantendrá la forma que se le dé. Sin embargo, si el hueco se inunda, los lados cederán y en muchos casos la arcilla saturada se convertirá prácticamente en un líquido. La arcilla es capaz de mantener su forma mediante su cohesión interna, pero la inundación reduce esa cohesión en forma sustancial, a menudo hasta cero.

Si se construye un muro en contacto con un sólido, por ejemplo, un corte en roca, no se ejercerá presión sobre ésta. Por otro lado, si un muro contiene líquido como en el caso de un embalse, estará sometido a la presión hidrostática $w_w h$, donde w_w es el peso unitario del agua y h es la distancia desde la superficie. Asimismo, si un muro vertical contiene suelo, la presión de tierra aumenta en forma proporcional a la profundidad, pero su magnitud es

$$P_h = C_o w h \tag{17.1}$$

donde w es el peso unitario del suelo y C_o es una constante conocida como el *coeficiente de presión de tierra en reposo*. El valor de C_o depende no solamente de la naturaleza del relleno, sino también del método de colocación y compactación del mismo. Se ha determinado experimentalmente que para suelos no cohesivos sin compactar, como arenas y gravas, C_o varía entre 0.4 y 0.5, mientras que para los mismos suelos en estados de alta compactación puede llegar a ser tan alto como 0.8 (ver las referencias 17.1 hasta 17.3). Para suelos cohesivos, C_o puede estar en el orden de 0.7 a 1.0. Las arenas y las gravas limpias se consideran superiores a todos los demás suelos porque son altamente permeables, no son

susceptibles a la acción del congelamiento y no pierden estabilidad con el paso del tiempo. Por esta razón, los rellenos se especifican por lo general en material no cohesivo.

En general, los muros se mueven ligeramente bajo la acción de la presión de tierra. Puesto que se construyen en material elástico, se deflectan bajo la acción de la presión, y ya que usualmente descansan sobre suelos compresibles, se inclinan y se alejan del relleno (por esta razón, el muro se construye a menudo con una ligera inclinación hacia el relleno en la cara expuesta, de manera que cuando ocurra esta inclinación, no sea evidente para el observador). Aun si el movimiento en la parte superior del muro es apenas del orden de una fracción de la altura del muro ($\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{10}$ por ciento según la referencia 17.2), la presión de tierra en reposo disminuye de modo efectivo por este motivo.

Si el muro se aleja del relleno, se forma un plano de deslizamiento *ab* (ver la figura 17.2) en la masa de suelo, y la cuña *abc* que se desliza a lo largo de este plano ejerce una presión contra el muro. En este caso, el ángulo ϕ se conoce como *ángulo de fricción interna*, es decir, su tangente es igual al coeficiente de fricción intergranular, que puede determinarse mediante ensayos de laboratorio apropiados. La presión correspondiente se conoce como *presión de tierra activa*. Por otro lado, si el muro se empuja contra el relleno, se forma un plano de deslizamiento *ad* y la cuña *acd* es empujada hacia arriba por el muro, a lo largo de ese plano. La presión que esta cuña mayor ejerce contra el muro se conoce como *presión de tierra pasiva* (este último caso se presenta también en la cara izquierda del muro de gravedad de la figura 17.1, cuando el muro cede ligeramente hacia la izquierda ante la presión del relleno).

La magnitud de estas presiones fue analizada por Rankine, Coulomb y otros. Si la superficie de suelo conforma un ángulo δ con la horizontal (ver la figura 17.1*a*), entonces, de acuerdo con Rankine, el *coeficiente de presión activa de tierra* es

$$C_a = \cos\delta \frac{\cos\delta - \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\phi}}{\cos\delta + \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\phi}} \tag{17.2}$$

y el *coeficiente de presión pasiva* es

$$C_p = \cos\delta \frac{\cos\delta + \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\phi}}{\cos\delta - \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\phi}} \tag{17.3}$$

Para el caso frecuente de una superficie horizontal, es decir, $\delta = 0$ (ver la figura 17.2), para la presión activa,

$$C_{ah} = \frac{1-\text{sen}\,\phi}{1+\text{sen}\,\phi} \tag{17.4}$$

y para la presión pasiva

$$C_{ph} = \frac{1+\text{sen}\,\phi}{1-\text{sen}\,\phi} \tag{17.5}$$

La teoría de Rankine es válida sólo para suelos no cohesivos como arenas y gravas, pero con los correspondientes ajustes se puede utilizar también en forma apropiada para suelos arcillosos cohesivos.

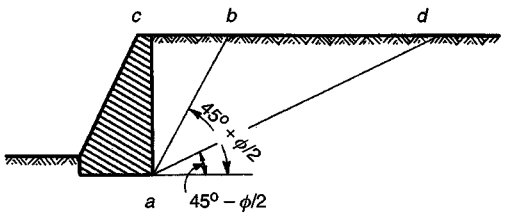


FIGURA 17.2
Bases para la determinación de las presiones de tierra activa y pasiva

A partir de las ecuaciones (17. 1) a (17.5) se observa que la presión de tierra a determinada profundidad h depende de la inclinación de la superficie δ, del peso unitario w, y del ángulo de fricción ϕ. Los primeros dos parámetros mencionados pueden determinarse fácilmente, mientras que hasta ahora se ha logrado acuerdo con respecto a los valores adecuados de ϕ. Para el caso ideal de un relleno seco no cohesivo, el valor de ϕ podría determinarse mediante ensayos de laboratorio y luego utilizarse en las fórmulas. Esto es imposible para las arcillas, porque apenas una parte de su resistencia la suministra la fricción intergranular, mientras que el resto es debido a la cohesión interna. Por esta razón, los valores reales de ϕ se incrementan a menudo en una cantidad arbitraria para tener en cuenta implícitamente la cohesión adicional. Sin embargo, esto resulta a menudo en contra de la seguridad pues, como se demostró con el ejemplo del hueco inundado, la cohesión puede desaparecer casi completamente por saturación e inundación.

Adicionalmente, los rellenos en la parte posterior de los muros de contención rara vez son uniformes y, lo que es más importante, en pocos casos se encuentran secos. Un drenaje adecuado del relleno es de vital importancia para reducir las presiones (ver la sección 17.6), pero aun en un relleno bien drenado, la presión aumentará temporalmente durante tormentas fuertes o deshielos súbitos. Esto es consecuencia de que, aunque el drenaje puede evacuar con éxito el agua a medida que aparece, su movimiento a través del relleno hacia los drenajes produce presión adicional (presión de filtración). Además, la acción de la escarcha y otros efectos pueden aumentar temporalmente su valor por encima de la presión activa teórica. Muchos muros que se diseñaron sin tener en cuenta estos factores fallaron o presentaron desplazamientos o fisuración.

Por tanto, es buena práctica seleccionar valores conservadores de ϕ, considerablemente menores que los valores reales determinados mediante ensayos, en todos los casos, excepto cuando se tomen precauciones extraordinarias y por lo general costosas para mantener el relleno seco ante cualquier condición. En la referencia 17.2 se presentan ejemplos de valores recomendados de presión de tierra, bastante conservadores aunque están basados en una amplia investigación y en experiencia práctica. En diseños prácticos se utilizan a menudo valores menos conservadores, pero éstos deben emplearse con precaución puesto que se han presentado problemas ocasionales en muros diseñados de esta manera.

La tabla 17.1 da valores representativos de w y ϕ utilizados a menudo en la práctica de la ingeniería (observe que los valores de ϕ no toman en cuenta probables presiones adicionales generadas por agua superficial, filtración, escarcha, etc.). La tabla también presenta valores del coeficiente de fricción f entre el concreto y varios tipos de suelos. Los valores de ϕ para los suelos 3 a 5 pueden ser muy poco conservadores; bajo condiciones saturadas, las arcillas y los limos pueden convertirse en líquidos (es decir, $\phi = 0$). Siempre que sea posible. En los muros de contención deben utilizarse los suelos tipo 1 ó 2 como relleno.

TABLA 17.1
Pesos unitarios, ángulos efectivos de fricción interna f y coeficientes de fricción con el concreto *f*

Suelo	Peso unitario, lb/pie^3	ϕ, grados	f
1. Arena o grava sin partículas finas, altamente permeable	110-120	33-40	0.5-0.6
2. Arena o grava con mezcla de limo, baja permeabilidad	120-130	25-35	0.4-0-5
3. Arena limosa, arena y grava con alto contenido de arcilla	110-120	23-30	0.3-0.4
4. Arcilla media o rígida	100-120	25-35[a]	0.2-0.4
5. Arcilla blanda, limo	90-110	20-25[a]	0.2-0.3

[a] Para condiciones saturadas, el valor de ϕ para arcillas y limos puede ser cercano a cero.

17.3 PRESIÓN DE TIERRA PARA CONDICIONES USUALES DE CARGA

En el cálculo de las presiones de tierra sobre muros, con frecuencia se encuentran tres condiciones usuales de carga: (1) relleno con superficie horizontal en la parte superior del muro, (2) relleno con superficie inclinada con pendiente hacia arriba y hacia atrás desde la parte superior del muro, y (3) relleno con superficie horizontal que soporta una carga adicional uniformemente distribuida (sobrecarga) como la que generan mercancías en patios de almacenamiento o por tráfico en una carretera.

El aumento de la presión producido por una sobrecarga uniforme s (caso 3) se calcula convirtiendo esta carga en una altura de tierra equivalente imaginaria h' por encima de la parte superior del muro, de manera que

$$h' = \frac{s}{w} \tag{17.6}$$

y midiendo la profundidad hasta determinado punto sobre el muro a partir de esta superficie imaginaria. Esto equivale a remplazar h por $(h + h')$ en la ecuación (17.1).

La distribución de presiones para los casos 1 a 3 se presenta en la figura 17.3. El empuje total de tierra P por pie lineal de muro es evidentemente igual al área bajo la curva de distribución de presiones y su línea de acción pasa por el centroide de la presión. La figura 17.3 da información, calculada de esta manera, referente a magnitudes, puntos de aplicación y dirección de P para estos tres casos.

En ocasiones, los muros de contención deben construirse para condiciones en las cuales el nivel freático está por encima de la base del muro, en forma permanente o de acuerdo con la estación. En este caso, la presión del suelo *por encima* del nivel freático se determina de la manera usual. La parte del muro por *debajo* del nivel freático se somete a la suma de las presiones de agua y de tierra. La primera es igual a la presión hidrostática total $p_w = w_w h_w$, donde w_w y h_w son respectivamente el peso unitario del agua y la distancia desde el nivel freático hasta el punto sobre el muro. La presión adicional del suelo por debajo del nivel freático se calcula a partir de la ecuación (17.1), donde, sin embargo, para la porción de suelo por debajo del agua, w se remplaza por $w - w_w$, mientras que h se mide de la manera usual desde la superficie del suelo. Es decir que, para suelo sumergido, la flotación reduce el peso efectivo de la manera indicada. Las presiones de esta magnitud, sustancialmente mayores que las de suelos drenados, se presentarán también en forma temporal después de tormentas de lluvias fuertes o deshielos en muros sin drenajes o cuando los drenajes se obstruyen.

La aparente simplificación en la determinación de la presión de tierra indicada anteriormente no debe generar un sentimiento falso de seguridad y confianza en el diseñador. Ninguna teoría es más precisa que los supuestos en que se basa. Las presiones reales de suelo se ven afectadas por irregularidades en las propiedades del suelo, por el agua superficial, por las condiciones de drenaje, por factores

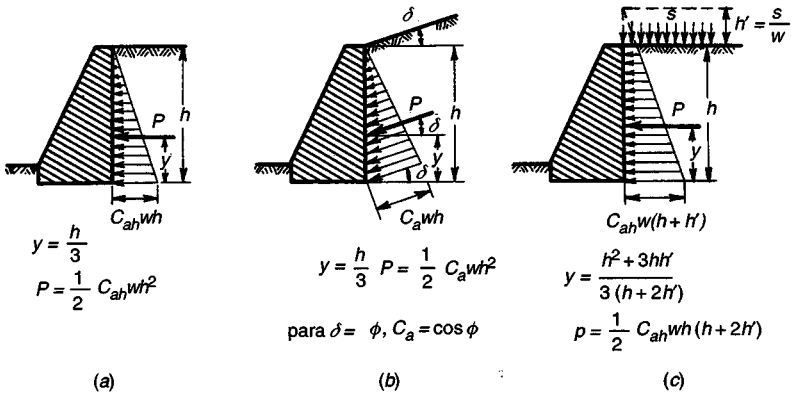


FIGURA 17.3
Presiones de tierra para (*a*) superficie horizontal; (*b*) superficie con pendiente; (*c*) superficie horizontal con sobrecarga s.

climáticos y otros que no pueden expresarse en las fórmulas. Por una parte, esta situación indica que los refinamientos implícitos en las determinaciones teóricas de las presiones de tierra como se intentan hacer algunas veces, son de muy poco valor práctico. Por otro lado, el diseño de un muro de contención es raramente un procedimiento de rutina, porque las condiciones locales que afectan las presiones y la seguridad varían de un sitio a otro.

17.4 ESTABILIDAD EXTERNA

Un muro puede fallar de dos maneras diferentes: (1) las partes individuales pueden no ser suficientemente fuertes para resistir las fuerzas que actúan, como cuando un muro en voladizo vertical se agrieta por la acción de la presión de tierra que actúa sobre él, y (2) el muro como un todo puede desplazarse por la presión de tierra, sin que se presente una rotura interna. Para diseñar contra la primera posibilidad se requiere la determinación de las dimensiones, espesores y refuerzos necesarios para resistir los momentos y los cortantes; este procedimiento no es en ningún momento diferente del utilizado para calcular las dimensiones y el refuerzo que se requieren en otros tipos de estructuras de concreto. Pueden aplicarse los factores de carga y los coeficientes de reducción de resistencia usuales estipulados por el Código ACI (ver la sección 17.5).

Para salvaguardar el muro contra desplazamientos globales, es decir, para garantizar su estabilidad externa, se requieren unas consideraciones especiales. En forma consistente con la práctica actual en la ingeniería geotécnica, la investigación de estabilidad se basa en las presiones reales de tierra (tan precisas como puedan determinarse) y en las cargas muertas y vivas de servicio calculadas o estimadas, todas sin factores de carga. Las presiones de contacto calculadas se comparan con los valores admisibles y los factores globales de seguridad se evalúan comparando las fuerzas resistentes con las máximas fuerzas que actúan en condiciones de servicio.

Un muro como el de la figura 17.4, conjuntamente con la masa de suelo *ijkl* que descansa sobre la losa base, puede desplazarse globalmente por el empuje de tierra P que actúa sobre el plano *ak* mediante un *deslizamiento* a lo largo del plano *ab*. Este deslizamiento es resistido por fricción entre el suelo y la zapata a lo largo del mismo plano. Para que no se produzca movimiento, las fuerzas que

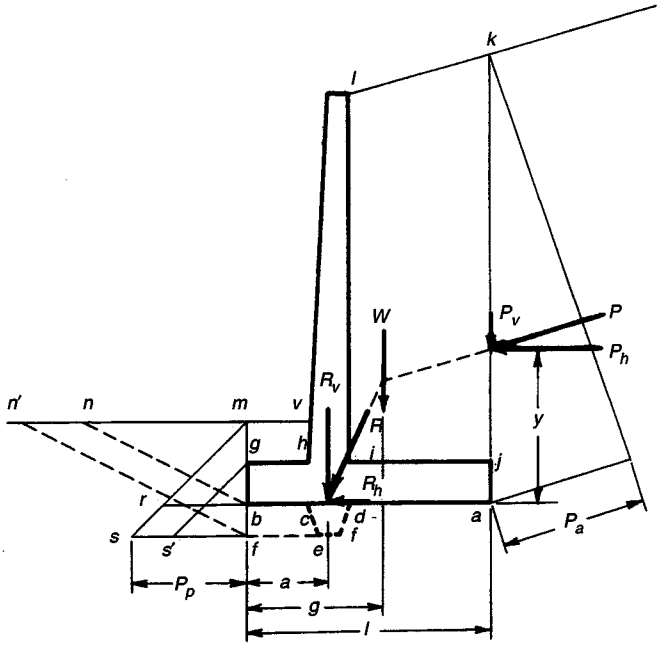


FIGURA 17.4
Estabilidad externa de un muro en voladizo.

resisten al deslizamiento deben exceder a aquellas que tienden a generarlo; por lo general, se supone que un factor de seguridad del orden de 1.5 es satisfactorio en este aspecto.

En la figura 17.4, la fuerza que tiende a producir el deslizamiento es la componente horizontal P_h del empuje total de tierra P. La fuerza de fricción resistente es fR_v, donde f es el coeficiente de fricción entre el concreto y el suelo (ver la tabla 17.1) y R_v es el componente vertical de la resultante total R; es decir, $R_v = W + P_v$ (W = peso del muro más el suelo que descansa sobre la zapata, P_v = componente vertical de P). Entonces, para suministrar una seguridad suficiente,

$$F(W + P_v) \geq 1.5P_h \tag{17.7}$$

En efecto, para que el muro se deslice hacia la izquierda debe empujar con él la cuña de tierra *nmb*, que da lugar a la presión pasiva de tierra indicada por el triángulo *rmb*. Esta presión pasiva representa una fuerza resistente adicional, que podría sumarse al lado izquierdo de la ecuación (17.7). Sin embargo, esto debería hacerse sólo si se asegura el funcionamiento adecuado de esta resistencia adicional; para este propósito, el relleno *ghmv* debe colocarse antes de que el relleno posterior *ijkl* se ubique en su sitio y tiene que asegurarse contra su posterior remoción por escorrentía o cualquier otra causa durante la vida del muro. Si estas condiciones no se cumplen, es mejor no confiar en la resistencia adicional de la presión pasiva.

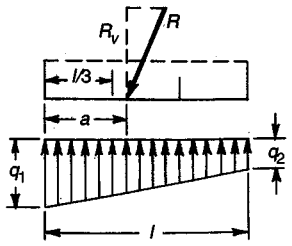
Si la resistencia al deslizamiento que se exige no puede desarrollarse de esta manera, se puede utilizar una cuña o tacón *cdef* para aumentar la resistencia horizontal. En este caso, si ocurre el deslizamiento, éste se presentará a lo largo de los planos *ad* y *tf*. Mientras que a lo largo de *ad* y *ef* se aplica el coeficiente de fricción *f*, el deslizamiento a lo largo de *te* ocurre dentro de la masa del suelo. El coeficiente de fricción que se debe usar en esta porción es, en consecuencia, igual a $\tan\phi$, donde el valor de ϕ puede tomarse de la penúltima columna de la tabla 17.1. En esta situación, el deslizamiento del suelo del frente ocurre hacia arriba a lo largo de *tn'* de modo que, si el relleno del frente es seguro, la correspondiente resistencia generada por la presión pasiva de suelo la representa el triángulo de presión *stm*. Si hay dudas con respecto a la confiabilidad del relleno por encima del puntal, debe suponerse más conservadoramente que la superficie libre del terreno se ubica en el nivel superior de la zapata, en cuyo caso el triángulo *s'tg* representa la presión pasiva.

Enseguida, es necesario garantizar que la presión bajo la zapata no exceda la *presión de contacto admisible* para el suelo particular. Llámese a (ver la figura 17.4) la distancia desde el borde delantero b hasta la intersección de la fuerza resultante con el plano base y sea R_v la componente vertical de R (no siempre esta intersección se localizará por debajo del brazo vertical, como se indica, aunque si esto ocurre, se obtiene por lo general un muro más económico). Entonces, el plano base *ab*, de un pie de ancho en dirección longitudinal, está sometido a una fuerza normal R_v y a un momento con respecto al centroide igual a $(l/2 - a)R_v$. Cuando estos valores se sustituyen en la fórmula usual para flexión más fuerza axial,

$$q_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{Mc}{I} \tag{17.8}$$

se encontrará que si la resultante se localiza dentro del tercio medio ($a > l/3$), esfuerzos de compresión actuarán a través de toda la sección y las presiones máximas y mínimas pueden calcularse a partir de las ecuaciones de la figura 17.5*a*. Si la resultante se localiza justo en el borde del tercio medio ($a = l/3$), la distribución de presiones es como aparece en la figura 17.5*b* y la ecuación (17.8) se convierte en las fórmulas dadas allí.

Si la resultante se localizara por fuera del tercio medio ($a < l/3$), la ecuación (17.8) indicaría tensión en o cerca del punto a. Como es obvio, no puede desarrollarse tensión entre el suelo y una zapata de concreto que simplemente descansa sobre él. De ahí que, en este caso, se desarrollaría la distribución de presiones que se ilustra en la figura 17.5*c*, que implica un ligero levantamiento de la parte posterior de la zapata con respecto al suelo. El equilibrio exige que R_v pase por el centroide de la distribución triangular de presiones, condición que permite deducir fácilmente la fórmula para q correspondiente en este caso.

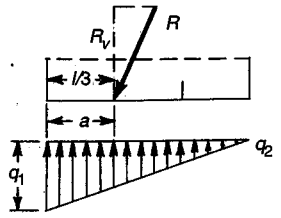


(*a*) Resultante en el tercio medio

$$q_1 = (4l - 6a)\frac{R_v}{l^2}$$

$$q_2 = (6a - 2l)\frac{R_v}{l^2}$$

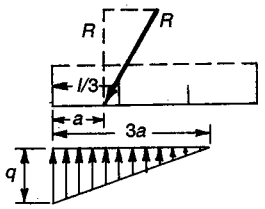
cuando $a = \frac{l}{2}$, $q_1 = q_2 = \frac{R_v}{l}$



(*b*) Resultante en el borde del tercio medio

$$q_1 = \frac{2R_v}{l}$$

$$q_2 = 0$$



(*c*) Resultante por fuera del tercio medio

$$q = \frac{2R_v}{3a}$$

FIGURA 17.5
Presiones de contacto para diferentes ubicaciones de la resultante.

Es buena práctica lograr que la resultante se localice dentro del tercio medio; esto no sólo reducirá la magnitud de la presión de contacto máxima, sino que también impedirá disparidades demasiado grandes en las presiones. Si el muro se encuentra cimentado en un suelo bastante compresible, como algunas arcillas, una distribución de presiones como la que se indica en la figura 17.5*b* producirá un asentamiento mucho mayor en el puntal que en el talón, con la correspondiente inclinación del muro. Por consiguiente, en una cimentación en este tipo de suelo, la resultante debe caer en o muy cerca del centro de la zapata. Si la cimentación está sobre un suelo altamente incompresible, como una grava bien compactada o una roca, puede permitirse que la resultante caiga por fuera del tercio medio (ver la figura 17.5*c*).

Un tercer modo de falla consiste en la posibilidad de *volcamiento* de todo el muro alrededor del borde delantero *b*. Para que esto ocurra, el momento de volcamiento yP_h con respecto al punto *b* tendría que ser mayor que el momento estabilizante ($Wg + P_v l$) en la figura 17.4, que es lo mismo que afirmar que la resultante debería caer por fuera del borde *b*. Si, como en la mayor parte de los casos, la resultante cae dentro del tercio medio, existe un factor de seguridad adecuado contra el volcamiento y no es necesario realizar una verificación especial. Si la resultante se localiza por fuera del tercio medio, debe mantenerse un factor de seguridad contra volcamiento al menos igual a 1.5, es decir, el momento estabilizante debe ser al menos 1.5 veces mayor que el momento de volcamiento.

17.5 BASES DEL DISEÑO ESTRUCTURAL

En la investigación de un muro de contención con respecto a la estabilidad externa descrita en la sección 17.4, la práctica actual consiste en utilizar en los cálculos las presiones reales de tierra y las cargas muertas y vivas de servicio calculadas o estimadas con factores de carga iguales a 1.0 (es decir, sin incrementar la carga para tener en cuenta una condición hipotética de sobrecarga). Las presiones de contacto en el suelo,

calculadas para condiciones de cargas de servicio, se comparan con las presiones admisibles de contacto, cuyos valores se establecieron por debajo de los valores de capacidad última de carga, para mantener una adecuada seguridad. Los factores de seguridad contra volcamiento y deslizamiento se establecen con base en las condiciones para cargas de servicio.

Por otra parte, el diseño estructural de un muro de contención debe ser consistente con los métodos utilizados para todos los demás tipos de elementos y debe basarse, por tanto, en cargas mayoradas que reconozcan la posibilidad de un incremento con respecto a las cargas de servicio. A continuación se resumen los factores de carga del Código ACI relacionados con el diseño estructural de muros de contención:

1. Si la resistencia a la presión lateral de tierra H se incluye en el diseño, junto con las cargas muerta D y viva L, la resistencia requerida U debe ser al menos igual a

$$U = 1.4D + 1.7L + 1.7H$$

2. Cuando D o L reduzcan el efecto de H, la resistencia exigida U debe ser por lo menos igual a

$$U = 0.9D + 1.7H$$

3. Para cualquier combinación de D, L y H, la resistencia requerida no debe ser menor que

$$U = 1.4D + 1.7L$$

Mientras que el método de diseño con factores de carga del Código ACI es lógico y relativamente fácil de aplicar en elementos de edificios, su aplicación en estructuras que deben resistir presiones de tierra no es tan fácil. Son posibles muchas combinaciones alternas de cargas muertas y vivas mayoradas y de presiones laterales. Cargas muertas como el peso del concreto deben multiplicarse por 0.9 cuando reduzcan los momentos de diseño como para la losa del puntal de un muro de contención en voladizo, pero deben multiplicarse por 1.4 cuando aumenten los momentos, como para la losa del talón. La carga muerta de la tierra sobre el talón debe multiplicarse por 1.4 según el Código ACI, pero hacer esto no es coherente con la especificación de presión lateral de $1.7H$ que depende, al menos en parte, del empuje lateral de la tierra sobre la losa de talón. Obviamente, no pueden obtenerse en forma concurrente dos estados mayorados de carga; para cada combinación de cargas mayoradas se producirán diferentes presiones de reacción en el suelo bajo la estructura, requiriéndose una nueva determinación de estas presiones para cada alternativa de combinación. Además, no hay razón para creer que la presión del suelo seguirá siendo una distribución lineal para el estado de sobrecarga o que aumentará en proporción directa al incremento de carga; la información con relación a la distribución de presiones del suelo para un estado de falla incipiente es incompleta.

En el diseño de muros de contención utilizando factores de carga debe adoptarse un enfoque algo más simplificado. El procedimiento que se describe a continuación parece ser consistente con la intención del Código ACI. Cuando se presenten errores e inconsistencias, los resultados estarán del lado de la seguridad.

Las presiones laterales de tierra se considerarán cargas vivas y se les aplicará un factor de 1.7. En general, la presión de reacción del suelo bajo la estructura para el estado de cargas mayoradas se tomará igual a 1.7 veces la presión del suelo determinada para las condiciones de cargas de servicio en el análisis de estabilidad†. Para muros de contención en voladizo, la carga muerta calculada de la losa del puntal, que causa momentos que actúan en el sentido opuesto a los producidos por la reacción del suelo hacia arriba, se multiplicará por un coeficiente de 0.9. Para la losa de talón, la capacidad requerida a momento se basará en la carga muerta de la misma losa de talón, más la tierra directamente encima de ella, ambas multiplicadas por 1.4. La sobrecarga, cuando esté presente, se tratará como una carga viva

†Estas reacciones se producen bajo la condición supuesta de cargas mayoradas y no tienen relación directa con los valores de capacidad última de carga del suelo o con la distribución de las presiones.

con un coeficiente de carga de 1.7. La presión hacia arriba del suelo bajo la losa de talón se tomará igual a cero, reconociendo que para un estado de sobrecarga severo se obtendrá probablemente una distribución de presiones no lineal, con la mayor parte de la reacción concentrada muy cerca del puntal. Supuestos similares parecen razonables para el diseño de muros con contrafuertes.

17.6 DRENAJE Y OTROS DETALLES

Las fallas o daños que ocurren ocasionalmente en muros de contención se deben, en la mayor parte de los casos, a una de dos causas: sobrecarga del suelo bajo el muro con la consecuente inclinación hacia delante, o drenaje insuficiente del relleno posterior. En este último caso, la presión hidrostática que genera el agua superficial acumulada durante o después de lluvias torrenciales aumenta sustancialmente el empuje sobre el muro; asimismo, en climas con posibilidades de congelamiento pueden desarrollarse presiones de hielo de magnitud considerable en suelos pobremente drenados. Las dos causas están a menudo interconectadas puesto que los grandes empujes incrementan en forma correspondiente las presiones de contacto bajo la zapata.

Las *presiones admisibles de contacto* se deben seleccionar con bastante cuidado. Para esto es necesario investigar no sólo el tipo de suelo inmediatamente debajo de la zapata, sino también el suelo de los estratos profundos. A menos que se tenga información confiable sobre el sitio, deben realizarse sondeos hasta una profundidad al menos igual a la altura del muro. La cimentación debe ubicarse por debajo del *nivel de congelamiento*, el cual está entre 4 y 5 pies y más para los estados del norte de los Estados Unidos, con el fin de evitar el levantamiento por congelamiento de los suelos que contienen humedad.

El *drenaje* puede suministrarse de varias maneras. Los *lloraderos*, conformados por tubos de 6 u 8 pulg embebidos en el muro, como aparece en la figura 17.1*c*, se colocan por lo general con espaciamientos horizontales entre 5 y 10 pies. Además de la fila inferior, deben proporcionarse filas adicionales en muros con alturas sustanciales. Para facilitar el drenaje y evitar el taponamiento, se coloca un pie cúbico o más de piedra triturada en el extremo posterior de cada lloradero. Deben tomarse las precauciones necesarias para que el flujo que generan los lloraderos se evacue en forma segura, de manera que no se filtre y se ablande el suelo por debajo del muro. Para evitar esto, en vez de lloraderos pueden proveerse *drenajes longitudinales* embebidos en piedra triturada o gravas a lo largo de la cara posterior del muro (ver la figura 17.1*b*) en uno o más niveles; los drenajes descargan en los extremos del muro o en algunos puntos intermedios. El drenaje más eficaz se proporciona mediante un *dren continuo posterior* que consta de una capa de grava o piedra triturada que cubre toda la cara posterior del muro (ver la figura 17.1*a*), con descarga en los extremos. Sin embargo, este drenaje es costoso, a menos que el material apropiado esté disponible a bajo costo en el sitio. Siempre que sea posible, la superficie del relleno debe cubrirse con una capa de suelo de baja permeabilidad y, en caso de una superficie horizontal, ésta debe colocarse con una ligera pendiente para conducir el agua lejos del muro hacia una cuneta u otro drenaje.

En muros largos deben tomarse precauciones contra los daños producidos por la *expansión* o por la *contracción* que generan los cambios de temperatura y la retracción de fraguado. La especificación AASHTO exige que, para muros de gravedad al igual que para muros de concreto reforzado, se incluyan juntas de expansión a intervalos de 90 pies o menos y juntas de contracción a no más de 30 pies (ver la referencia 17.4). Las mismas especificaciones establecen que para muros de concreto reforzado debe suministrarse un refuerzo horizontal por temperatura no menor que $\frac{1}{8}$ de pulg^2 por pie de profundidad, adyacente a la superficie expuesta. Disposiciones similares se incluyen en la referencia 17.5.

17.7 EJEMPLO: DISEÑO DE UN MURO DE CONTENCIÓN DE GRAVEDAD

Un muro de gravedad debe contener un terraplén de 11 pies 6 pulg de alto cuya superficie horizontal se somete a una sobrecarga producida por una carga viva de 400 lb/pie^2. El suelo es una mezcla de arena

y grava con una cantidad relativamente moderada de partículas finas de limos. Por consiguiente, puede suponerse que es de la clase 2 de la tabla 17.1, con las siguientes características: peso unitario $w = 120$ lb/pie^3, $\phi = 30^o$ (siempre y cuando se proporcione un drenaje adecuado) y un coeficiente de fricción en la base $f = 0.5$. Con sen $30^o = 0.5$, a partir de las ecuaciones (17.4) y (17.5), los coeficientes de presión de suelo son $C_{ah} = 0.333$ y $C_{ph} = 3.0$. La presión de contacto admisible se supone igual a 8000 lb/pie^2. Este suelo de grano grueso tiene poca compresibilidad, de modo que puede permitirse que la resultante caiga cerca del punto externo del tercio medio (ver la sección 17.4). El peso del concreto es $w_c = 150$ lb/pie^3.

El diseño óptimo de cualquier muro de contención es materia de aproximaciones sucesivas. De acuerdo con la experiencia se suponen dimensiones razonables y luego se verifican las diferentes condiciones de estabilidad para estas medidas. Con base en un primer ensayo, los cálculos se reajustan y uno o dos ensayos más conducen por lo general a un diseño aceptable. En el análisis que sigue se expone sólo el diseño final en detalle. Las dimensiones finales se indican en la figura 17.6.

La altura equivalente de la sobrecarga es $h' = 400/120 = 3.33$ pies. A partir de la figura 17.3*c*, el empuje total de tierra es

$$P = 1/2 \times 0.333 \times 120 \times 15 \times 21.67 = 6500 \text{ lb}$$

y su distancia desde la base es $y = (225 + 150)/(3 \times 21.67) = 5.77$ pies. Por tanto, el momento de volcamiento es $M_o = 6500 \times 5.77 = 37{,}500$ lb-pie. Para calcular el peso W y su momento estabilizante M_r con respecto al borde del puntal, se calculan los pesos individuales como se indican en la figura 17.6. Si x representa la distancia de la línea de acción de cada peso desde el borde delantero, se obtienen los siguientes resultados:

Pesos componentes	W, lb	x, pies	$M_r = xW$, lb-pie
$W_1 = 10 \times 2 \times 150$	3,000	5.0	15,000
$W_2 = 1.5 \times 13 \times 150$	2,930	1.5	4,400
$W_3 = 7/2 \times 13 \times 150$	6,830	4.58	31,300
$W_4 = 7/2 \times 13 \times 120$	5,460	6.92	37,800
$W_5 = 0.75 \times 13 \times 120$	1,170	9.63	11,270
Total	19,390		99,770

La distancia de la resultante desde el borde delantero es

$$a = \frac{99{,}770 - 37{,}500}{19{,}390} = 3.21 \text{ pies}$$

que está justo por fuera del tercio medio. El factor de seguridad contra volcamiento, $99{,}770 \div 37{,}500 = 2.66$, es bastante amplio. A partir de la figura 17.5*c*, la máxima presión de suelo es $q = (2 \times 19{,}390) \div (3 \times 3.21) = 4030$ lb/pie^2.

Los cálculos anteriores se realizaron para el caso en que la sobrecarga se extiende sólo hasta el borde posterior del muro, o sea, el punto *a* de la figura 17.6. Si la sobrecarga se extiende hacia adelante hasta el punto *b*, se obtienen las siguientes modificaciones:

$$W = 19{,}390 + 400 \times 7.75 = 22{,}490 \text{ lb}$$

$$M_r = 99{,}770 + 400 \times 7.75 \times 6.13 = 118{,}770 \text{ lb-pie}$$

$$a = \frac{118{,}770 - 37{,}500}{22{,}490} = 3.61 \text{ pies}$$

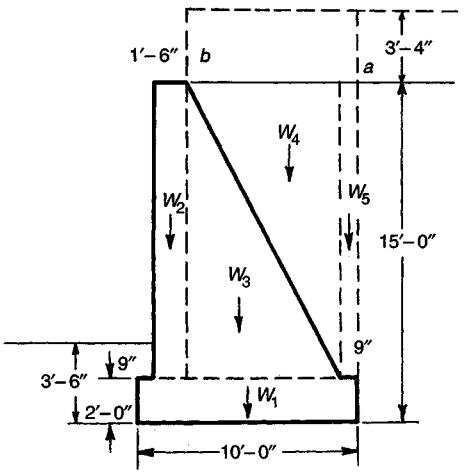


FIGURA 17.6
Muro de contención de gravedad.

Esta fuerza está dentro del tercio medio y, a partir de la figura 17.5*a*, la máxima presión de contacto es

$$q_1 = \frac{(40.0 - 21.7)\,22{,}490}{100} = 4120 \text{ lb/pie}^2$$

La situación más desfavorable para el deslizamiento se obtiene cuando la sobrecarga se extiende solamente hasta el punto *a*, puesto que sobrecargas adicionales entre *a* y *b* producirán un aumento del peso total y de la correspondiente resistencia por fricción. La fuerza de fricción es

$$F = 0.5 \times 19{,}390 = 9695 \text{ lb}$$

Adicionalmente, el deslizamiento es resistido por la presión pasiva de tierra sobre la parte frontal del muro. Aunque el plano de base está a 3.5 pies por debajo del nivel del terreno, no puede confiarse en la capa superior de suelo para suministrar la presión pasiva, puesto que ésta se afloja a menudo por raíces y similares o puede lavarse por fuertes lluvias. Por esta razón, se descontarán los 1.5 pies superiores para el cálculo de la presión pasiva, que entonces produce

$$P_p = 1/2wh^2C_{ph} = 1/2 \times 120 \times 4 \times 3.0 = 720 \text{ lb}$$

El factor de seguridad contra deslizamiento, (9695 + 720)/6500 = 1.6, es apenas ligeramente mayor que el valor requerido de 1.5 que indica un diseño aceptable.

17.8 EJEMPLO: DISEÑO DE UN MURO DE CONTENCIÓN EN VOLADIZO

Debe diseñarse un muro de contención en voladizo para la misma situación del muro de gravedad de la sección 17.7. Se utilizará concreto con $f'_c = 3000$ lb/pulg^2 y acero con $f'_c = 60{,}000$ lb/pulg^2.

a. Diseño preliminar

Con el fin de facilitar los cálculos de los pesos para verificar la estabilidad del muro, resulta ventajoso inicialmente estimar el espesor del cuerpo y la altura de la zapata†. Para este propósito, se calcula la

† Los diseños tabulados como los que se presentan en la referencia 17.6 y los ejemplos de cálculo de la referencia 17.7 son una guía muy valiosa para el diseñador no experimentado.

altura aproximada de la zapata y luego se determina el espesor del cuerpo requerido en su sección inferior. Con la parte inferior de la zapata localizada a 3.5 pies por debajo del nivel del terreno, y con una altura de zapata estimada en 1.5 pies, la altura libre del cuerpo es 13.5 pies. De ahí que, con respecto a la parte inferior del cuerpo (ver la figura 17.3),

$$P = 1/2 \times 0.333 \times 120 \times 13.5 \times 20.16 = 5440 \text{ lb}$$

$$y = \frac{183 + 135}{3 \times 20.16} = 5.25 \text{ pies}$$

$$M_u = 1.7 \times 5440 \times 5.25 = 48{,}600 \text{ lb-pie}$$

Para las características del concreto y del acero, la cuantía de acero máxima permitida es $\rho_{max} = 0.0160$. Por economía y facilidad en la colocación de las barras, se utilizará una cuantía de acero aproximadamente igual a la mitad del valor máximo, o sea, 0.008. Entonces, a partir del gráfico A.1*b* del apéndice A,

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = 430$$

Para una longitud unitaria del muro ($b = 12$ pulg), con $\phi = 0.90$ como es usual para flexión, la altura efectiva que se requiere es

$$d = \sqrt{\frac{48{,}600 \times 12}{0.90 \times 12 \times 430}} = 11.2 \text{ pulg}$$

Se requiere un recubrimiento de protección de 2 pulg para concreto en contacto con la tierra. Así que, estimando el diámetro de las barras en 1 pulg, el espesor mínimo exigido del cuerpo en la base es de 13.7 pulg. Este valor se aumentará a 16 pulg porque el costo del concreto adicional en estas estructuras, por lo general, se compensa de sobra con el ahorro simultáneo en acero. Enseguida, se verifica el cortante en el cuerpo a una distancia *d* por encima de la base, o sea, a 12.5 pies por debajo de la parte superior del muro:

$$P = 1/2 \times 0.333 \times 120 \times 12.5 \times 19.16 = 4900 \text{ lb}$$

$$V_u = 1.7 \times 4900 = 8330 \text{ lb}$$

$$\phi V_c = 2\phi\sqrt{f'_c}bd$$
$$= 2 \times 0.85\sqrt{3000} \times 12 \times 13.5$$
$$= 15{,}100 \text{ lb}$$

lo cual confirma que el cuerpo es más que adecuado para resistir la fuerza cortante mayorada.

La altura de la base es igual o un poco mayor que el espesor de la parte inferior del cuerpo. Por consiguiente, no es necesario modificar el valor estimado de 1.5 pies. Puesto que el momento en el cuerpo disminuye al incrementarse la distancia desde la base, y es cero en la parte superior, se tomará un espesor del cuerpo en la parte superior igual a 8 pulg. Ahora, es necesario suponer las longitudes de la losa o zarpa de puntal y de la losa o zarpa de talón y verificar la estabilidad para estas dimensiones supuestas. En este ejemplo se omiten los ensayos intermedios y sólo se tienen en cuenta las medidas finales que aparecen en la figura 17.7*a*. Los cálculos tentativos demuestran que puede alcanzarse una seguridad apropiada contra el deslizamiento sólo con la utilización de una zarpa de talón excesivamente grande o con un tacón. En este caso, se adopta esta última alternativa ya que requiere un menor volumen de concreto.

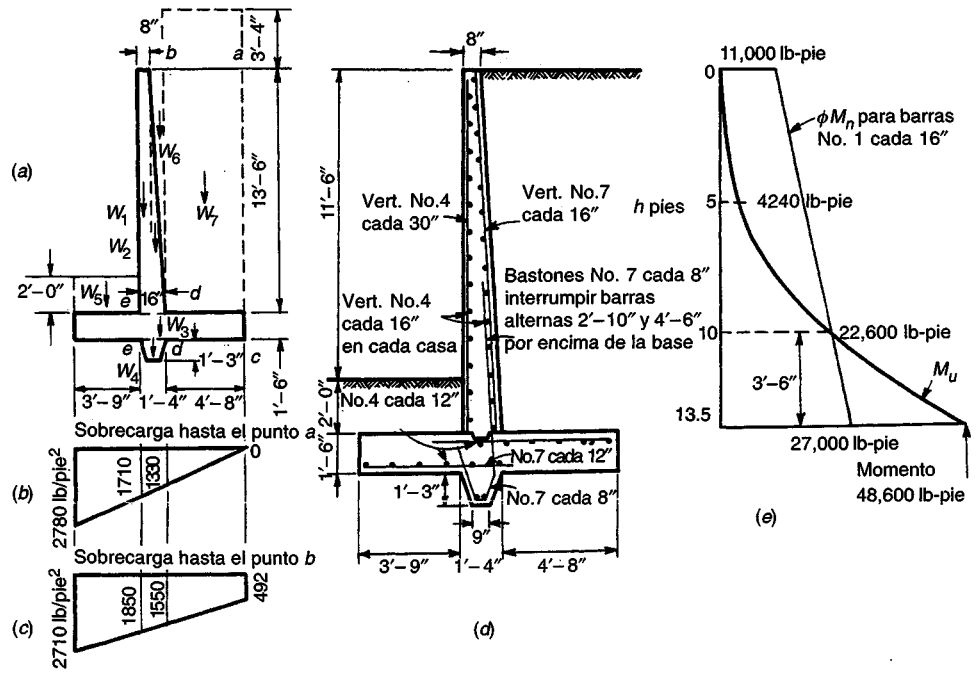


FIGURA 17.7
Muro de contención en voladizo: (*a*) sección transversal; (*b*) presión de contacto con sobrecarga hasta *a*; (*c*) presión de contacto con sobrecarga hasta *b*; (*d*) refuerzo; (*e*) variación del momento con la altura.

b. Investigación de la estabilidad

Los pesos y momentos con respecto al borde delantero son los siguientes:

Pesos componentes	W, lb	x, pies	M_r, lb-pie
W_1 : 0.67 × 13.5 × 150	1,360	4.08	5,550
W_2 : 0.67 × 0.5 × 13.5 × 150	680	4.67	3,180
W_3 : 9.75 × 1.5 × 150	2,190	4.88	10,700
W_4 : 1.33 × 1.25 × 150	250	4.42	1,100
W_5 : 3.75 × 2 × 120	900	1.88	1,690
W_6 : 0.67 × 0.5 × 13.5 × 120	540	4.86	2,620
W_7 : 4.67 × 13.5 × 120	7,570	7.42	56,200
Total	13,490		81,040

La presión total de suelo sobre el plano *ac* es la misma que para el muro de gravedad de la sección 17.7, es decir, $P = 6500$ lb, y el momento de volcamiento es

$$M_o = 37{,}500 \text{ lb-pie}$$

La distancia de la resultante desde el borde delantero es

$$a = \frac{81{,}040 - 37{,}500}{13{,}490} = 3.23 \text{ pies}$$

lo que ubica la resultante justo por fuera del tercio medio. La correspondiente presión máxima de suelo en el puntal, a partir de la figura 17.5, es

$$q = 2 \times \frac{13{,}490}{3 \times 3.23} = 2780 \text{ lb/pie}^2$$

El factor de seguridad contra volcamiento, 81,040/37,500 = 2.16, es amplio.

Para verificar la seguridad contra deslizamiento, recuerde que (ecuación 17.4) si el deslizamiento se presenta, éste sucede entre la superficie de concreto y el suelo a lo largo del talón y del tacón (es decir, a lo largo de la longitud *ae* de la figura 17.4), pero ocurre dentro del suelo al frente del tacón (es decir, a lo largo de la longitud *te* de la figura 17.4). En consecuencia, el coeficiente de fricción aplicable para la primera longitud es $f = 0.5$, mientras que el aplicable para la segunda es igual a la fricción interna del suelo, es decir, tan $30^o = 0.577$.

La distribución de presiones de contacto se ilustra en la figura 17.7*b*. Puesto que la resultante se ubica a una distancia $a = 3.23$ pies desde el frente, es decir, casi en el tercio medio, se supone que la presión de contacto es igual a cero en el borde del talón, como se indica en la figura 17.7*b*.

La fuerza resistente se calcula entonces como la suma de las fuerzas de fricción de la porción posterior y frontal, más la presión pasiva del suelo en el frente del muro. Para ésta última, al igual que en la sección 17.7, se considera que la capa de suelo superior de 1.5 pies es poco confiable y no se tiene en cuenta en los cálculos. En consecuencia,

Fricción en el puntal:	$(2780 + 1710) \times 0.5 \times 3.75 \times 0.577 = 4860$ lb
Fricción en el talón y en el tacón:	$1710 \times 0.5 \times 6 \times 0.5 = 2570$ lb
Presión de tierra pasiva:	$0.5 \times 120 \times 3.25^2 \times 3.0 = 1910$ lb
Resistencia total al deslizamiento:	$= 9340$ lb

El factor de seguridad contra el deslizamiento, 9340/6500 = 1.44, es apenas un cuatro por ciento inferior al valor recomendado de 1.5 y puede considerarse adecuado.

Los cálculos son válidos para el caso en que la sobrecarga se extiende desde el punto *a* hacia la derecha, por encima del borde del talón. El otro caso de distribución de cargas, cuando la sobrecarga se coloca sobre toda la superficie del relleno hasta el punto *b*, no cambia evidentemente la presión de tierra sobre el plano *ac*. Sin embargo, esta sobrecarga adicional sí afecta la suma de las fuerzas verticales y aumenta tanto el momento estabilizante M_r como la fricción a lo largo de la base. En consecuencia, el peligro de deslizamiento o volcamiento es mayor cuando la sobrecarga se extiende únicamente hasta *a*, situación para la cual estas dos condiciones se han revisado y resultan satisfactorias. Pero, al tener en cuenta la carga vertical adicional, la presión de contacto es mayor cuando la superficie se sobrecarga hasta *b*. Para este caso,

$$W = 13{,}490 + 400 \times 5.33 = 15{,}600 \text{ lb}$$

$$M_r = 81{,}040 + 400 \times 5.33 \times 7.09 = 96{,}200 \text{ lb-pie}$$

$$a = \frac{96{,}200 - 37{,}500}{15{,}600} = 3.76 \text{ pies}$$

lo cual ubica la resultante dentro del tercio medio. Por tanto, a partir de la figura 17.5,

$$q_1 = (39.0 - 22.5)\frac{15{,}600}{9.75^2} = 2710 \text{ lb/pie}^2$$

$$q_2 = (22.5 - 19.5)\frac{15{,}600}{9.75^2} = 492 \text{ lb/pie}^2$$

que está muy lejos de la presión admisible de 8000 lb/pie^2. La correspondiente distribución de presiones de contacto se presenta en la figura 17.7*c*.

Hasta este punto se ha investigado la estabilidad externa del muro y queda por determinar el refuerzo requerido y verificar las resistencias internas.

c. Cuerpo y tacón

El momento en la sección inferior del cuerpo se determinó anteriormente como $M_u = 48{,}600$ lb-pie y se seleccionó un espesor de muro de 16 pulg en la parte inferior y de 8 pulg en la parte superior, con un recubrimiento libre de concreto de 2 pulg, $d = 16.0 - 2.0 - 0.5 = 13.5$ pulg. Entonces,

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{48{,}600 \times 12}{0.9 \times 12 \times 183} = 295$$

A partir del gráfico A.1*b* del apéndice A, con $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2 y $f'_c = 3000$ lb/pulg^2, la cuantía requerida de acero es $\rho = 0.0052$ y $A_s = 0.0052 \times 12 \times 13.5 = 0.84$ pulg^2/pie. El área requerida se proporciona mediante barras No. 7 espaciadas a 8 pulg centro a centro.

El momento flector en el cuerpo disminuye rápidamente al aumentar la distancia desde la parte inferior. Por esta razón, en los niveles superiores se necesita sólo parte del refuerzo principal, y se descontinuarán barras alternas donde ya no sean necesarias. Para determinar el punto de corte, se dibuja el diagrama de momentos para el cuerpo, calculando los momentos flectores en dos niveles intermedios, a 10 pies y a 5 pies de la parte superior. Estos dos momentos, determinados de la misma manera que el de la base del cuerpo, son iguales a 22,600 lb-pie y 4240 lb-pie, respectivamente. El momento resistente que suministran las barras alternas, es decir, barras No. 7 espaciadas a 16 pulg centro a centro, en la parte inferior del cuerpo es

$$\phi M_n = \frac{0.90 \times 0.46 \times 60{,}000}{12}(13.50 - 0.45) = 27{,}000 \text{ lb-pie}$$

En la parte superior, $d = 8.0 - 2.5 = 5.5$ pulg y el momento resistente de las mismas barras es apenas $\phi M_n = 27{,}000(5.5/13.5) = 11{,}000$ lb-pie. Por consiguiente, la línea recta dibujada en la figura 17.7*e* indica el momento resistente proporcionado en cualquier elevación por la mitad de las barras principales. La intersección de esta línea con el diagrama de momentos a una distancia de 3 pies 6 pulg desde la parte inferior representa el punto por encima del cual ya no se requieren las barras alternas. El Código ACI 12.10.3 especifica que cualquier barra debe extenderse, más allá del punto donde ya no se necesita para resistir esfuerzos de flexión, a lo largo de una distancia igual a d o 12 diámetros de barra, la que sea mayor. En el cuerpo, a una distancia de 3 pies 6 pulg de la parte inferior, $d = 11.4$ pulg, mientras que 12 diámetros de barra No. 7 son iguales a 10.5 pulg. En consecuencia, la mitad de las barras pueden interrumpirse a 12 pulg por encima del punto donde ya no se requieren, o sea, a una distancia de 4 pies 6 pulg por encima de la base. Este valor excede la mínima longitud de desarrollo requerida de 26 pulg por encima de la base.

Con el fin de facilitar la construcción, la zapata se vacía primero y se deja una junta de construcción en la base del cuerpo, como se indica en la figura 17.7*d*. Por consiguiente, las barras principales del cuerpo se terminan en la parte superior de la losa base y se colocan bastones en esta última para hacer los empalmes con las barras. Debe reconocerse que la integridad del cuerpo depende totalmente de la integridad del empalme de estas barras a tensión. El empalme en todas las barras a tensión en una sola sección mediante empalmes simples de contacto puede llevar a un resquebrajamiento del concreto, a causa de la concentración de esfuerzos en los extremos de las barras empalmadas. Una manera de evitar esta dificultad consiste en soldar todos los empalmes; sin embargo, esto producirá un costo extra considerable.

Para este muro específico, existe otra manera de colocar el refuerzo que ofrece una solución más económica. Puesto que las barras alternas en el cuerpo pueden interrumpirse a una distancia de 4 pies 6 pulg por encima de la base, se llevarán bastones alternos desde la punta superior de la base hasta esta distancia. Éstos no necesitan empalmarse, pues por encima de este nivel únicamente son necesarios barras alternas No. 7, espaciadas a 16 pulg entre centros. Estas últimas barras se colocan cubriendo la altura total del cuerpo y se empalman en la parte inferior con bastones alternos más cortos. Con este método, sólo el 50 por ciento de las barras necesarias en la parte inferior del cuerpo se empalman; esto no es objetable.

Para empalmes de barras corrugadas a tensión en secciones donde la relación entre el acero suministrado y el acero requerido es menor que 2, y donde no se empalma más del 50 por ciento del acero, el Código ACI exige la utilización de empalmes clase B, con longitud igual a 1.3 veces la de desarrollo de la barra (ver la sección 5.11*a*). La longitud de desarrollo de las barras No. 7 para las resistencias dadas de los materiales es 26 pulg y la longitud requerida de empalme es, por consiguiente, igual a $1.3 \times 26 = 33.8$ pulg. Los bastones alternos se llevarán hasta 2 pies 10 pulg por encima de la base para empalmarlos con las barras correspondientes en el cuerpo, mientras que los bastones interpuestos se llevan hasta 4 pies 6 pulg por encima de la base y se interrumpen sin empalme, puesto que no se requieren más para soportar momentos.

De acuerdo con el Código ACI, el refuerzo de flexión principal no debe interrumpirse en una zona de tensión, a menos que se satisfaga una de las siguientes condiciones: (1) que el cortante en el punto de corte no exceda dos tercios del permitido, (2) que se suministre algún refuerzo a cortante en exceso, o (3) que el refuerzo continuo proporcione el doble del área requerida para flexión en el punto de corte. Se puede confirmar que el cortante a 4 pies 6 pulg por encima de la base está muy por debajo de los dos tercios del valor que puede resistir el concreto; por tanto, es posible interrumpir las barras principales según lo proyectado. La cuantía mínima de acero a tensión especificada por el Código ACI no es aplicable estrictamente a muros de contención, los cuales pueden considerarse como losas. Sin embargo, puesto que la integridad del muro de contención depende totalmente de las barras verticales, parece prudente utilizar este límite en tales casos. La cuantía real de acero que suministran las barras No. 7 espaciadas a 16 pulg, con un valor de $d = 10.8$ pulg justo por encima del punto de corte, es 0.0035, apenas superior al valor mínimo de 200/60,000 = 0.0033. Un requisito final del Código ACI es que el máximo espaciamiento del refuerzo a flexión primario no debe exceder tres veces el espesor del muro ni 18 pulg; estas restricciones se satisfacen igualmente en este caso.

Puesto que los bastones tuvieron que extenderse, al menos parcialmente, dentro del tacón para producir la longitud de empotramiento necesaria, se doblaron como se muestra para proporcionar el refuerzo mismo del tacón. La fuerza exacta que debe resistir el tacón es difícil de determinar, pues probablemente la mayor parte de la fuerza que actúa en la porción del suelo al frente del tacón se transmite a éste por fricción a lo largo de la base de la zapata. El refuerzo relativamente fuerte del tacón, proporcionado por la extensión de los bastones, se considera suficiente para impedir su separación de la zapata.

Los lados inclinados del tacón se suministraron con el fin de facilitar la excavación sin aflojar el suelo adyacente. Esto es necesario para garantizar un funcionamiento adecuado del tacón.

Además del acero principal en el cuerpo del muro, se requiere refuerzo para controlar el agrietamiento por retracción de fraguado y temperatura. Los cálculos se basarán en un espesor promedio de muro de 12 pulg. En la dirección vertical, debe proporcionarse un valor no menor que 0.0012 veces el área bruta de concreto, con no menos de la mitad de esta cantidad adyacente a la cara expuesta; este requisito se cumple utilizando barras No. 4 espaciadas a 30 pulg entre centros. En la dirección horizontal, el área requerida de acero es 0.0020 veces el área bruta de concreto, de nuevo con no menos de la mitad en la cara externa. Se utilizarán barras No. 4 espaciadas a 16 pulg entre centros en cada cara, como se indica en la figura 17.7*d*.

d. Losa del puntal

La losa del puntal actúa como un voladizo que se proyecta hacia afuera desde la cara del cuerpo principal del muro. Debe resistir las presiones hacia arriba de las figuras 17.7*b* o *c* y la carga hacia abajo de la losa del puntal mismo, cada una multiplicada por los coeficientes apropiados de carga. No se tendrá en cuenta la carga hacia abajo del relleno de tierra sobre el puntal puesto que está sometido a posible erosión o remoción. Se aplicará un coeficiente de carga de 1.7 a las presiones de contacto para cargas de servicio. La comparación de las presiones de las figuras 17.7*b* y *c* indica que, para la losa del puntal, la condición de carga más severa resulta cuando se aplica la sobrecarga hasta el punto *b*. Puesto

que el peso propio de la losa del puntal tiende a reducir los momentos y los cortantes de diseño, se multiplicará por un coeficiente de carga de 0.9. Así, el momento para cargas mayoradas en la cara externa del cuerpo del muro es

$$M_u = 1.7\left(\frac{2710}{2} \times 3.75^2 \times \frac{2}{3} + \frac{1850}{2} \times 3.75^2 \times \frac{1}{3}\right) - 0.9\left(225 \times 3.75^2 \times \frac{1}{2}\right)$$
$$= 27{,}600 \text{ lb-pie}$$

En concreto vaciado contra la tierra y expuesto de manera permanente a ella, se requiere un recubrimiento mínimo de protección para el acero de 3 pulg; si el diámetro de las barras es aproximadamente 1 pulg, la altura efectiva será de 18.0 – 3.0 – 0.5 = 14.5 pulg. Así, para una franja de losa del puntal de 12 pulg,

$$\frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{27{,}600 \times 12}{0.9 \times 12 \times 210} = 146$$

El gráfico A.1*b* del apéndice A indica que, para este valor, la cuantía requerida de acero será ligeramente inferior al mínimo de 200/60,000 = 0.0033. Parece posible la utilización de una losa de base un poco más delgada; sin embargo, falta investigar los momentos en la losa del talón al igual que los cortantes tanto en el puntal como en el talón y, por consiguiente, se mantendrá el espesor tentativo de 18 pulg. El acero requerido a flexión:

$$A_s = 0.0033 \times 12 \times 14.5 = 0.57 \text{ pulg}^2\text{/pie}$$

se suministra mediante barras No. 7 espaciadas a 12 pulg entre centros. La longitud de empotramiento que se requiere para estas barras más allá de la cara exterior del cuerpo del muro es igual a la longitud total de desarrollo de 26 pulg sujeta a un factor de reducción de 0.8, que refleja el espaciamiento lateral de 12 pulg; por tanto, se prolongarán 21 pulg más allá de la cara del muro, como aparece en la figura 17.7*d*.

El cortante se verificará a una distancia $d = 1.21$ pies de la cara del cuerpo principal (2.54 pies desde el extremo del puntal), de acuerdo con los procedimientos usuales del Código ACI. La presión de contacto para cargas de servicio en este punto (con referencia a la figura 17.7*c*) es 2130 lb/pie^2 y el cortante para cargas mayoradas es

$$V_u = 1.7(2710 \times 1/2 \times 2.54 + 2130 \times 1/2 \times 2.54) - 0.9(225 \times 2.54)$$
$$= 9940 \text{ lb}$$

La resistencia a cortante de diseño del concreto es

$$\phi V_c = 2 \times 0.85\sqrt{3000} \times 12 \times 14.5 = 16{,}200 \text{ lb}$$

muy por encima del valor exigido de V_u.

e. Losa de talón

La losa de talón también actúa como un voladizo, proyectándose en este caso desde la cara posterior del cuerpo principal, y está cargada por la sobrecarga, el relleno en tierra y su propio peso. En este caso, será insignificante la reacción hacia arriba del suelo por las razones determinadas previamente. Si se aplican los coeficientes apropiados de carga, el momento que se debe resistir es

$$M_u = 1.7(400 \times 4.67^2 \times 1/2) + 1.4(1620 \times 4.67^2 \times 1/2 + 225 \times 4.67^2 \times 1/2)$$
$$= 35{,}600 \text{ lb-pie}$$

Así,

$$\frac{M_u}{\phi bd^2} = \frac{35{,}600 \times 12}{0.9 \times 12 \times 210} = 188$$

A partir del gráfico A.1*b*, la cuantía requerida de acero es casi igual al valor mínimo de 0.0033. De nuevo, el área de acero que se necesita se proporcionará con barras No. 7 espaciadas a 12 pulg entre centros, como se indica en la figura 17.7*d*. Estas barras se clasifican como barras superiores pues tienen más de 12 pulg de concreto por debajo de ellas; en consecuencia, la longitud requerida de empotramiento hacia la izquierda de la cara interna del cuerpo principal es $26 \times 1.3 \times 0.8 = 27$ pulg.

De acuerdo con los procedimientos usuales del Código ACI, la primera sección crítica para cortante se localizará a una distancia *d* desde la cara del apoyo. Sin embargo, la justificación para esta disposición del Código es la presencia para los casos usuales de esfuerzos verticales de compresión cercanos a un apoyo, que tienden a disminuir la posibilidad de una falla a cortante en esta región. Sin embargo, la losa de talón en voladizo se encuentra colgada de la parte inferior del cuerpo principal por el acero a tensión por flexión de dicho cuerpo, y la compresión en el concreto, que normalmente se presenta cerca de los apoyos, está ausente en este caso. En consecuencia, la sección crítica a cortante en la losa de talón se tomará en la cara posterior del cuerpo principal. En ese sitio,

$$V_u = 1.7(400 \times 4.67) + 1.4(1845 \times 4.67)$$
$$= 15{,}240 \text{ lb}$$

La resistencia a cortante de diseño provista por el concreto es la misma que para la losa del puntal:

$$\phi V_c = 16{,}200 \text{ lb}$$

Puesto que este valor es apenas un seis por ciento mayor que el valor requerido V_u, no se realizará ninguna reducción en el espesor de la losa base considerado anteriormente.

La losa base se encuentra muy por debajo del nivel del terreno y, en efecto, no se someterá a los extremos de temperatura que sí afectarán el concreto del cuerpo principal. En consecuencia, son menores los requisitos de acero para el control de grietas en dirección perpendicular al refuerzo principal. Se suministrarán barras No. 4 espaciadas a 12 pulg entre centros, en una sola cara, colocadas como se presenta en la figura 17.7*d*. Estas barras sirven principalmente como espaciadores para el refuerzo principal de flexión.

17.9 MUROS DE CONTENCIÓN CON CONTRAFUERTES

La estabilidad externa de un muro de contención con contrafuertes se determina del mismo modo que en los ejemplos de las secciones 17.7 y 17.8. La losa del puntal es un voladizo construido integralmente a lo largo de la cara frontal del muro, que se carga hacia arriba por la presión de contacto, igual que en el muro en voladizo de la sección 17.8. El refuerzo se proporciona mediante las barras *a* en la figura 17.8.

Un panel de muro vertical entre dos contrafuertes es una losa sometida a la presión horizontal de tierra que se apoya a lo largo de tres lados, es decir, en los dos contrafuertes y en la losa base, mientras que el cuarto lado, el borde superior, está libre. La presión de tierra aumenta con la profundidad medida desde la superficie libre. La determinación de momentos y cortantes en este tipo de losas, apoyada en tres lados y cargada no uniformemente, es un poco complicada. En el diseño de estos muros es usual ignorar el apoyo que da la losa base al muro vertical; entonces, se diseña el muro como si fuera una losa continua que se extiende horizontalmente entre los contrafuertes. Este procedimiento es conservador, porque los momentos obtenidos mediante esta aproximación son mayores que los correspondientes a las condiciones reales de apoyo, particularmente en la parte inferior del muro. De ahí que, en obras grandes, se generan ahorros significativos con un análisis más preciso. La mejor herramienta computacional para este problema es el *método de las franjas* de Hillerborg, una teoría para el diseño de losas basada en la plasticidad, que se describió detalladamente en el capítulo 15. Como alternativa,

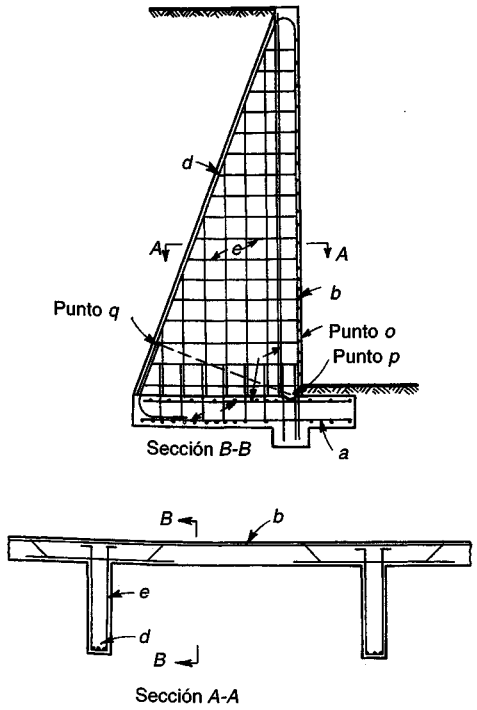


FIGURA 17.8
Detalles de un muro de contención con contrafuertes.

en la referencia 17.8 se presentan en forma tabulada los resultados de análisis elásticos para un intervalo amplio de variables.

Los momentos en la losa se determinan para franjas de un pie de ancho que se extienden horizontalmente, por lo general para la franja en la parte inferior del muro y para otras tres o cuatro franjas igualmente espaciadas a mayores elevaciones. La presión de tierra sobre las diferentes franjas disminuye al incrementar la elevación y se determina mediante la ecuación (17.1). Los valores de momento para las franjas inferiores pueden reducirse para tener en cuenta el apoyo adicional que suministra la losa base. Las barras horizontales *b* (ver la figura 17.8) se proporcionan según se requiera, con espaciamientos crecientes o diámetros decrecientes correspondientes a los momentos menores. Las barras se doblan alternativamente para absorber los momentos negativos en los contrafuertes o, en su defecto, se colocan barras rectas adicionales.

La losa de talón se apoya, lo mismo que la losa de muro, en los contrafuertes y en el mismo muro. Ésta está cargada hacia abajo por el peso del relleno que descansa sobre ella, por su propio peso y por la sobrecarga que pueda actuar; esta carga se contrarresta parcialmente con la presión de contacto. Al igual que para el muro vertical, un análisis simplificado consiste en ignorar la influencia del apoyo a lo largo del tercer lado y determinar los momentos y cortantes para franjas paralelas al muro, cada una de las cuales representa una viga continua apoyada en los contrafuertes. Con una superficie de suelo horizontal, la carga hacia abajo es constante para todo el talón, mientras que la carga hacia arriba causada por la presión de contacto es, por lo general, menor en el borde posterior y aumenta hacia el frente. Por esta razón, los momentos en la luz son positivos (compresión en la parte superior) y los momentos en los apoyos son negativos en la porción posterior del talón. Cerca del muro, la presión de contacto excede a menudo los pesos verticales, obteniéndose una carga neta hacia arriba. Los signos de los momentos se invierten correspondientemente y debe colocarse acero de acuerdo con esto. Para estos momentos se proporcionan las barras *c*.

Los contrafuertes son voladizos en forma de cuña que se empotran en la parte inferior de la losa base. Ellos soportan la losa del muro y, por consiguiente, se cargan con la totalidad de la presión del suelo a lo largo de una longitud igual a la distancia entre centros de contrafuertes; éstos actúan como una viga T donde la losa de muro es el ala y el contrafuerte el alma. El momento flector máximo es el

correspondiente a la presión total de tierra, tomado con respecto a la parte inferior de la losa de muro. Este momento se mantiene en equilibrio mediante las fuerzas en las barras *d* y, en consecuencia, la altura efectiva para flexión es la distancia perpendicular *pq* desde el centro de las barras *d* hasta el centro de la sección inferior de la losa de muro. Puesto que el momento disminuye rápidamente en las partes superiores del contrafuerte, algunas de las barras *d* pueden interrumpirse.

Con respecto al cortante, el autor sugiere utilizar la sección horizontal *oq* a una distancia *a* por encima de la losa base, como una ubicación conservadora para verificar el cumplimiento de los respectivos requisitos. Para los elementos en forma de cuña se requieren modificaciones de los cálculos usuales de cortante (ver la sección 4.7). Por lo general, el solo concreto es capaz de soportar todo el cortante, aunque las barras *e* trabajan como estribos, y pueden utilizarse para resistir el exceso de cortante.

El principal propósito de las barras *e* es el de contrarrestar el empuje de la losa de muro y se diseñan, por tanto, para la reacción total de esta losa.

Las barras restantes de la figura 17.8 sirven como refuerzo de retracción de fraguado, excepto las barras *f* que tienen otra función importante. Se debe recordar que las losas de muro y de talón se apoyan en tres lados. Aunque éstas se diseñaron como si estuvieran sostenidas sólo en los contrafuertes, de todas maneras se desarrollan momentos en donde se unen. La tensión resultante en y cerca de la esquina entrante debe absorberse con las barras *f*.

El problema de los detalles de las barras de refuerzo, siempre importante, lo es especialmente para las esquinas sometidas a grandes momentos flectores, como en el caso de los muros de contención en voladizo y de los muros con contrafuertes. En la referencia 17.9 se ofrecen sugerencias valiosas al respecto.

7.10 MUROS DE CONTENCIÓN PREFABRICADOS

Principalmente debido al alto costo de las formaletas en los muros fundidos en el sitio, se ha incrementado en años recientes el uso de muros prefabricados en concreto en diferentes modalidades. Las secciones pueden producirse en masa en condiciones controladas en planta, utilizando formaletas estandarizadas, con un excelente control de calidad. El tiempo de construcción en el sitio se reduce de manera significativa y usualmente se requiere sólo una cuadrilla pequeña con equipo liviano. El estado del tiempo deja de ser un factor tan importante para terminar el trabajo como para muros fundidos en el sitio.

En las figuras 17.9 y 17.10 se muestra un tipo de muro prefabricado. Se utilizan secciones en T, cada una de 2.5 pies de alto y 5 pies de ancho, siendo el alma de la T variable en función de los requerimientos, desde 4 pies hasta 20 pies. Las unidades individuales se colocan como se indica en la figura 17.10 utilizando llaves de cortante en el punto donde los dientes de una unidad superior y una inferior se unen, separadas aproximadamente por 6 pies medidos en forma perpendicular a la zona del muro. Los cálculos de estabilidad al deslizamiento y al volcamiento, y para presiones portantes, son los mismos que para muros voladizos o con contrafuertes fundidos en el sitio, con la estabilidad proporcionada por el peso combinado del muro de concreto y el relleno posterior seleccionado y compactado. Estos muros pueden construirse con cara vertical o sección acartelada, con alturas de hasta 25 pies.

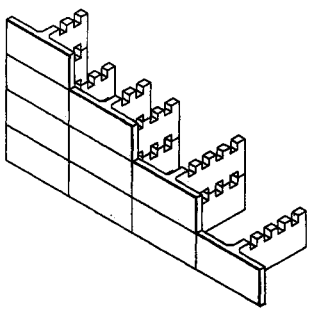


FIGURA 17.9
Sistema de muro de contención Precast T-Wall^{R} (*cortesía Concrete Systems Inc, Hudson, New Hampshire.*)

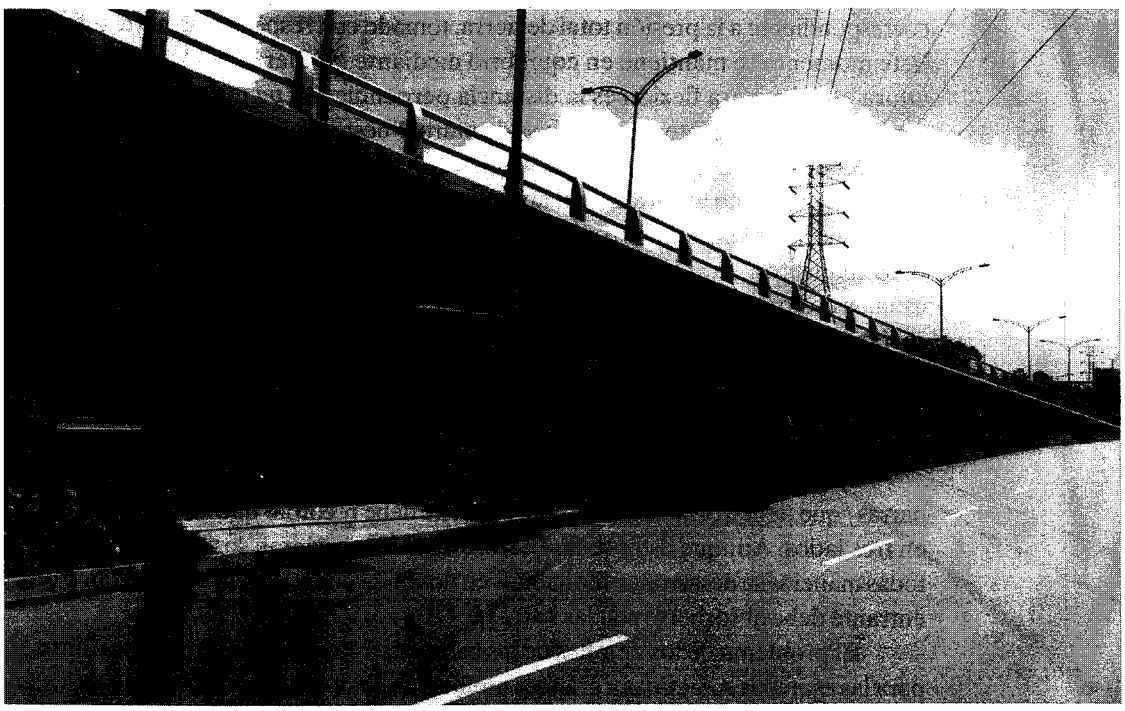


FIGURA 17.10
Muro de contención prefabricado con altura variable.

Muros del tipo mostrado se han utilizado para autopistas, lotes de estacionamiento, sitios industriales o comerciales, estabilización de bancas en vías, y propósitos similares, y pueden aún esperarse usos más diversos.

REFERENCIAS

17.1. R. B. Peck, W. E. Hanson, and T. H. Thornburn, *Foundation Engineering*, 2d ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.

17.2. K. Terzaghi and R. B. Peck, *Soil Mechanics in Engineering Practice*, 2d ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.

17.3. W. C. Huntington, *Earth Pressures and Retaining Walls*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957.

17.4. "Standard Specifications for Highway Bridges", 15th ed., American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), Washington, DC, 1992.

17.5. *Manual for Railway Engineering*, American Railway Engineering Association (AREA), Washington, DC, 1995.

17.6. *CRSI Handbook*, 7 th ed., Concrete Reinforcing Steel Institute, Shaumburg, Illinois, 1992.

17.7. M. Fintel, *Handbook of Concrete Engineering*, 2d ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1985.

17.8. "Rectangular Concrete Tanks", Publication No. IS003D, Portland Cement Association, Skokie, IL, 1981.

17.9. I. H. E. Nilsson and A. Losberg, "Reinforced Concrete Corners and Joints Subjected to Bending Moment", *J. Struct. Div. ASCE*, vol. 102, no. ST6, 1976, pp. 1229-1254.

PROBLEMAS

17.1. Un muro de contención en voladizo debe diseñarse con la geometría indicada en la figura P17.1. El material de relleno posterior será una grava bien drenada, con un peso unitario $w = 120$ lb/pie^3, un ángulo de fricción interna $\phi = 33^\circ$ y un factor de fricción contra la base de concreto $f = 0.55$. El relleno colocado al frente del puntal tendrá las mismas propiedades y se compactará bien. El nivel final del terreno por detrás del muro coincidirá con la parte superior de éste y no se aplicará sobrecarga. En la parte inferior, el nivel del terreno estará a 3 pies por encima de la parte superior de la losa base. Para mejorar la resistencia al deslizamiento, se utilizará un tacón que se proyectará tentativamente

hasta una profundidad de 4 pies por debajo de la parte superior de la losa base (esta dimensión puede modificarse si es necesario).

(*a*) Con base en un análisis de estabilidad, seleccione una geometría del muro adecuada para las condiciones especificadas. Para un primer ensayo, coloque la cara exterior del muro a una distancia de $\frac{1}{3}$ del ancho de la losa base hacia atrás desde el borde del puntal.

(*b*) Realice el diseño estructural completo especificando el tamaño, colocación y puntos de corte para todo el refuerzo. Los materiales tienen resistencias $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. La presión de contacto admisible del suelo es 5000 lb/pie^2.

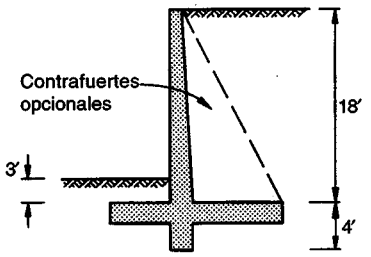


FIGURA P17.1

17.2 Rediseñe el muro del problema 17.1 como un muro de contención con contrafuertes, los cuales se colocan con un espaciamiento tentativo de 12 pies entre centros, aunque esta distancia puede modificarse si es necesario. Utilice todos los detalles del refuerzo, incluyendo las barras en los contrafuertes.

CAPÍTULO

18 SISTEMAS DE CONSTRUCCIÓN PARA EDIFICIOS DE CONCRETO

18.1 INTRODUCCIÓN

La mayor parte del material de los capítulos anteriores se enfocó hacia el diseño de *elementos estructurales* de concreto reforzado como losas, columnas, vigas y zapatas. Estos elementos se combinan de diferentes maneras para crear los *sistemas estructurales* para edificios y otro tipo de construcciones. Una parte esencial de las responsabilidades del ingeniero estructural consiste en seleccionar, a partir de muchas alternativas, el mejor sistema estructural para determinadas condiciones. La selección acertada del sistema estructural es mucho más importante, con respecto a sus efectos sobre la economía y el funcionamiento globales, que los refinamientos en el dimensionamiento de los elementos individuales. Resulta esencial una cooperación estrecha con el arquitecto en las primeras etapas del proyecto, para desarrollar una estructura que no sólo cumpla los requisitos funcionales y estéticos, sino que también explote al máximo las ventajas especiales del concreto reforzado, dentro de las cuales se incluyen las siguientes:

Versatilidad de formas. Puesto que el concreto se coloca por lo general en la estructura en estado fluido, el material puede adaptarse con facilidad a una amplia variedad de requisitos arquitectónicos y funcionales.

Durabilidad. Si el acero de refuerzo tiene una protección de concreto adecuado, la estructura tendrá larga vida aun bajo condiciones climáticas y ambientales fuertemente adversas.

Resistencia al fuego. Con el refuerzo adecuadamente protegido, una estructura de concreto reforzado suministra la máxima protección contra el fuego.

Velocidad de construcción. En términos del periodo total de construcción, desde la fecha de aprobación de los planos hasta la de entrega de la obra, un edificio de concreto a menudo puede terminarse en menos tiempo que una estructura de acero. Aunque el montaje en obra de un edificio de acero es mucho más rápido, esta fase debe estar precedida por la prefabricación de todas las partes en el taller.

Costo. En muchos casos, el costo básico de una estructura de concreto es menor que el de una estructura comparable de acero. En casi todos los casos, los costos de mantenimiento son menores.

Disponibilidad de mano de obra y material. Siempre es posible hacer uso de las fuentes locales de mano de obra y en muchas áreas inaccesibles puede encontrarse una fuente cercana de buen agregado, de manera que sólo es necesario llevar el cemento y el refuerzo.

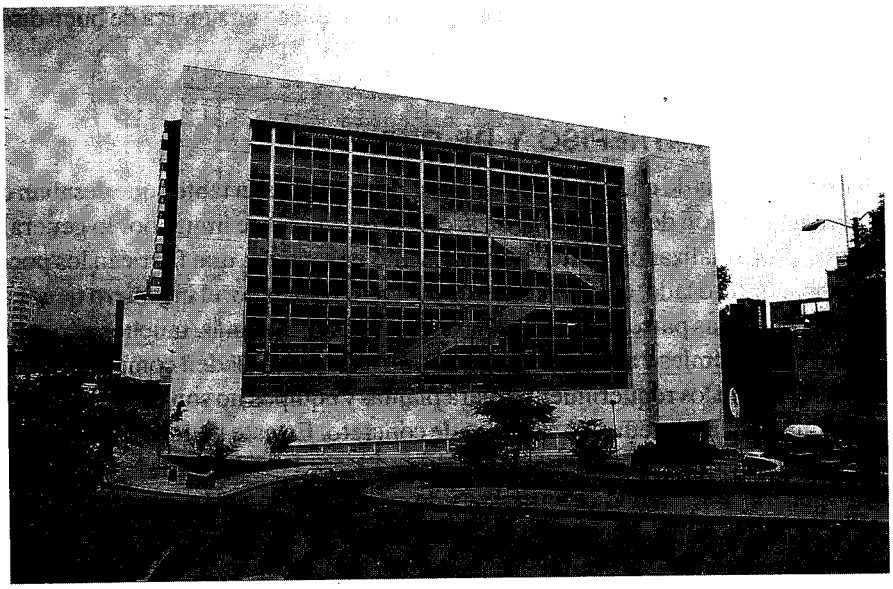


FIGURA 18.1
Edificio en concreto. Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá, Colombia.

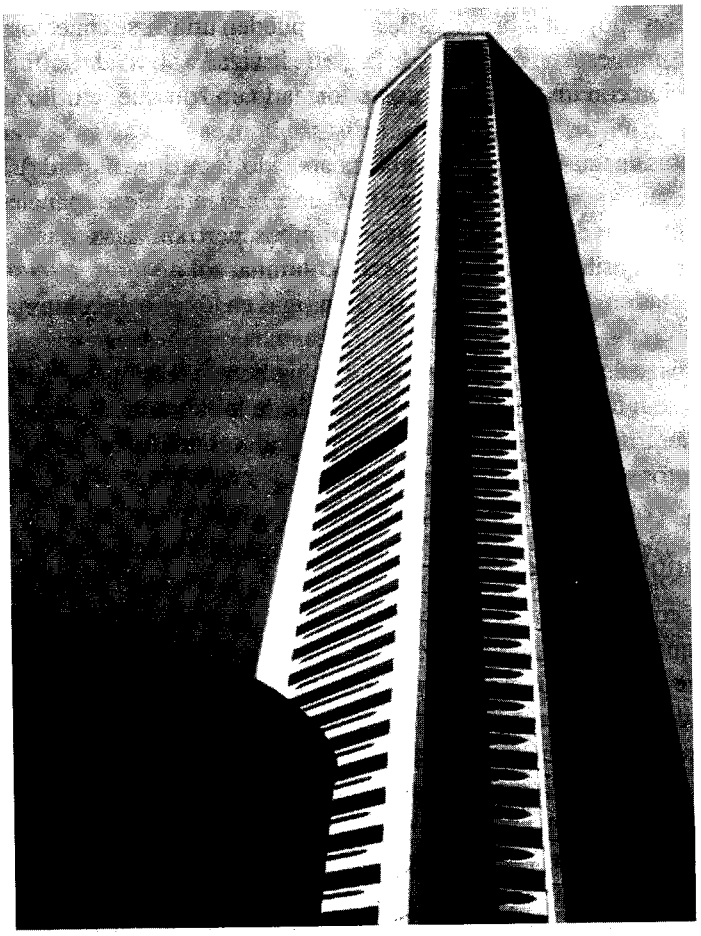


FIGURA 18.2
Centro MLC en Sydney, Australia, con una altura de 808 pies es el tercer edificio de concreto reforzado más alto del mundo.

En la figura 18.2 se presenta un ejemplo que establece una marca de buen diseño en edificios de concreto.

18.2 SISTEMAS DE ENTREPISO Y DE CUBIERTA

Los tipos de sistemas de entrepiso y de cubierta de concreto son tantos que desafían cualquier clasificación. En construcción de estructuras de acero, el diseñador se limita por lo general al uso de perfiles estructurales normalizados, tanto en forma como en tamaño, que fabrican los pocos productores en este campo. Por otro lado, en estructuras de concreto reforzado, el ingeniero tiene casi un control total sobre la forma de las partes estructurales de un edificio. Además, muchos pequeños productores de elementos estructurales y accesorios de concreto reforzado pueden competir ventajosamente en este campo, puesto que los requerimientos para plantas y equipos no son excesivos. Esto conduce al desarrollo de una amplia variedad de sistemas de concreto. En este texto se mencionan sólo los tipos más comunes.

En general, los sistemas de entrepiso y de cubierta de concreto reforzado comúnmente utilizados pueden clasificarse como sistemas en una dirección, en los cuales el refuerzo principal de cada uno de los elementos estructurales se extiende en una sola dirección, y sistemas en dos direcciones, donde el refuerzo principal se extiende en direcciones perpendiculares, al menos para uno de los elementos estructurales. En la siguiente lista pueden identificarse sistemas que encajan en los dos tipos mencionados:

a. Losa en una dirección apoyada sobre vigas de concreto monolíticas.
b. Losa en una dirección apoyada sobre vigas de acero (pueden utilizarse conectores de cortante para lograr una acción compuesta en dirección de la luz de la viga).
c. Losa en una dirección con un tablero de acero formado en frío que se utiliza como formaleta y refuerzo adicional.
d. Entrepiso de viguetas en una dirección (también conocido como losa nervada).
e. Losa en dos direcciones apoyada sobre vigas de borde en cada uno de los paneles.
f. Losas planas con capiteles de columna o ábacos, o ambos, pero sin vigas.
g. Placas planas, sin vigas y sin ábacos o capiteles de columna.
h. Entrepisos de viguetas en dos direcciones, con o sin vigas en los ejes de columnas.

Cada uno de estos tipos se describirá brevemente en las siguientes secciones. En las referencias 18.1 a 18.3 puede encontrarse información adicional. Además de los sistemas de entrepiso y de cubierta vaciados en el sitio y descritos en esta sección, existe una gran variedad de sistemas de concreto prefabricado; algunos de éstos se explicarán en la sección 18.6.

a. Entrepisos monolíticos de vigas

Un entrepiso de vigas consta de una serie de vigas secundarias paralelas, apoyadas en sus extremos en vigas principales las que a su vez se apoyan sobre columnas de concreto ubicadas a intervalos más o menos regulares sobre la totalidad del área del piso, como se ilustra en la figura 18.3. Este entramado se cubre con una losa de concreto reforzado, armada en una dirección, cuya carga se transmite primero a las vigas secundarias, luego a las vigas principales y de éstas a las columnas. Las vigas se colocan espaciadas de tal modo que lleguen hasta el punto central, los puntos en los tercios o los puntos en los cuartos de las longitudes de las vigas principales. La distribución de las vigas y el espaciamiento entre columnas debe determinarse a partir de consideraciones económicas y prácticas. Éstas se verán afectadas por el uso que se le vaya a dar al edificio, el tamaño y la forma del área del terreno y la carga que debe soportarse. Si el tamaño del edificio lo justifica, se debe comparar una cantidad suficiente de diseños tentativos y de estimativos para poder seleccionar la distribución más satisfactoria. Si las luces en una de las direcciones no son muy grandes, por ejemplo, del orden de 16 pies o menos, las vigas pueden

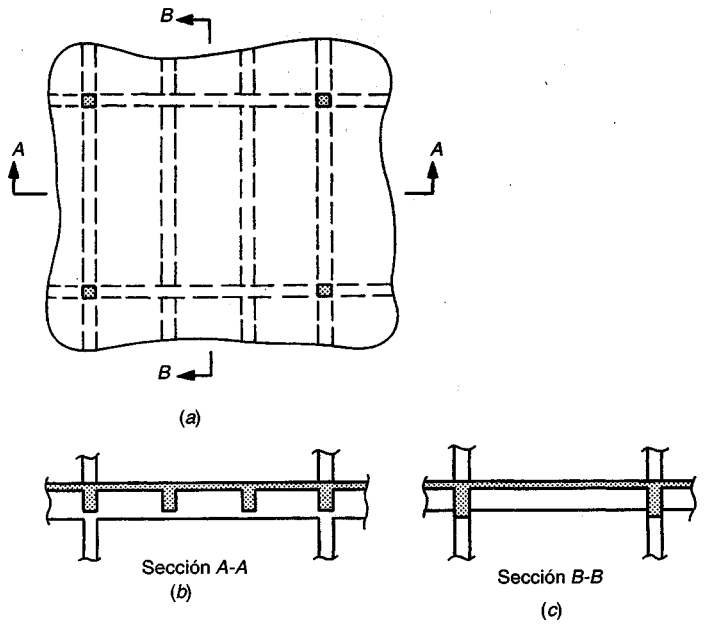


FIGURA 18.3
Entramado de un entrepiso de vigas secundarias y vigas principales: (*a*) vista en planta; (*b*) sección a través de las vigas secundarias; (*c*) sección a través de las vigas principales.

omitirse del todo y la losa, que se extiende en una sola dirección, puede apoyarse directamente en las vigas principales, que se proyectan en la dirección perpendicular, en los ejes de columnas. Puesto que las losas y las vigas secundarias y principales se construyen monolíticamente, tanto las vigas secundarias como las principales se diseñan como vigas T, y se puede aprovechar la continuidad.

Los entrepisos conformados por vigas secundarias y principales se adaptan a cualquier magnitud de cargas y tipo de luces que puedan encontrarse en la construcción corriente de edificios. El máximo rango normal en los valores de carga viva está entre 40 lb/pie^2 y 400 lb/pie^2, y el rango normal de espaciamientos entre columnas está entre 16 y 32 pies.

Es necesario prestar atención al diseño y a los detalles de las uniones entre vigas secundarias y principales y las columnas del edificio, particularmente en diseños donde deben soportarse cargas horizontales de consideración, mediante una acción de pórtico rígido del edificio. En este caso, la zona de la columna, dentro de la altura de las vigas que llegan a ella, se somete a cortantes horizontales significativos al igual que a cargas axiales y de flexión. Deben incluirse flejes horizontales especiales en la columna para evitar agrietamiento diagonal incontrolado y desintegración del concreto, en particular si la unión se somete a inversiones de carga. En el capítulo 10 y en la referencia 18.4 se pueden encontrar recomendaciones específicas para el diseño de uniones viga-columna. El diseño de las uniones en edificios que deben resistir fuerzas sísmicas está sujeto a disposiciones especiales del Código ACI (ver capítulo 20).

En la construcción corriente de vigas, la altura de éstas es por lo general dos y tres veces mayor que el ancho del alma. Para cargas pequeñas se ha desarrollado un sistema de entrepiso en el cual las vigas se omiten en una dirección y la losa la soportan directamente vigas muy anchas y de poca altura sobre los ejes entre columnas, como se indica en la figura 18.4. Estas vigas, soportadas directamente por las columnas, se convierten en poco más que una porción de losa con mayor espesor. Este tipo de construcción se conoce como construcción de *losa con bandas* y existen varias ventajas asociadas con su uso. En la dirección de la luz de la losa se presenta un elemento acartelado con la máxima altura efectiva en el sitio de máximo momento negativo, es decir, en los ejes de los apoyos. Los momentos negativos son pequeños en el borde del sobreespesor, donde la altura disminuye, y los momentos positivos en la luz de la losa también se reducen. Aunque el acero de flexión en la viga

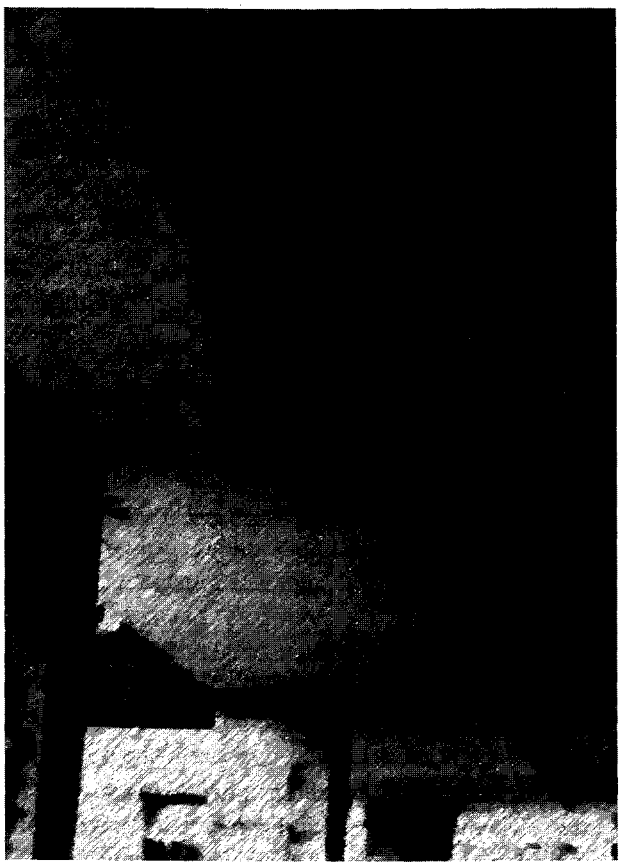


FIGURA 18.4
Sistema de entrepiso de losa con banda de borde en las columnas exteriores.

(banda de la losa) aumenta por la poca altura efectiva si se equipara con la de una viga de dimensiones normales, comparaciones de costos demuestran que esto se compensa por el ahorro en el acero de la losa. Otras ventajas incluyen una menor altura de construcción que permite reducir la altura total del edificio y una mayor flexibilidad en la ubicación de las columnas, las cuales pueden desplazarse alguna distancia desde la línea central de las bandas de losa sin que cambie significativamente la acción estructural del entrepiso. El trabajo de formaletería se simplifica por la reducción en la cantidad de elementos que constituyen el entramado. En estos sistemas debe prestarse atención especial a los detalles de diseño en las uniones viga-columna. Puede requerirse acero superior transversal para distribuir la reacción de la columna sobre el ancho de la banda de losa. Además, es posible que se presente una falla por punzonamiento; ésta debe investigarse utilizando los mismos métodos expuestos para placas planas (ver la sección 13.6)

b. Construcción compuesta con vigas de acero

Las losas de concreto reforzado armadas en una dirección, también se utilizan con frecuencia en edificios donde las columnas, las vigas secundarias y las vigas principales tienen elementos de acero estructural. Normalmente la losa se diseña teniendo en cuenta una continuidad total sobre las vigas de apoyo y siguiendo los métodos usuales de diseño. El espaciamiento entre vigas está por lo general entre 6 y 8 pies. A menudo la losa se funde de manera que su lado inferior quede a nivel con el lado inferior del ala superior de la viga de apoyo, como se ilustra en la figura 18.5. Esto facilita la construcción puesto que el testero de madera puede acuñarse contra el ala superior de la viga. Probablemente es de

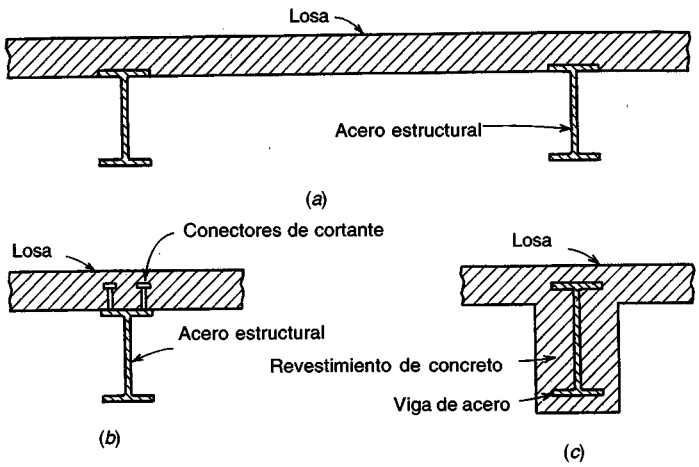


FIGURA 18.5
Entrepisos compuestos de viga y losa.

mayor importancia el hecho de que se proporciona un arriostramiento efectivo contra el pandeo lateral del ala a compresión de la viga, mientras que si la parte inferior de la losa estuviera al mismo nivel que la parte superior del acero, sólo la fricción suministraría resistencia al movimiento lateral.

Los edificios de este tipo se diseñan cada vez más para acción compuesta. En la parte superior de la viga de acero se sueldan conectores de cortante que quedan embebidos en la losa de concreto, como aparece en la figura 18.5*b*. Al impedir el deslizamiento longitudinal entre la losa y la viga de acero en la dirección del eje de la viga, el elemento combinado resulta más fuerte y más rígido que si no se desarrollara la acción compuesta. Expresado de otra manera, lo anterior significa que para determinadas cargas y límites de deflexión, pueden utilizarse vigas de acero más pequeñas y más livianas.

Los entrepisos compuestos también pueden utilizar vigas recubiertas de concreto, como se indica en la figura 18.5*c*, lo cual ofrece la ventaja de una protección total del acero contra el fuego con la desventaja de una formaleta más complicada y la dificultad de vaciar el concreto alrededor y por debajo del elemento de acero. Estas vigas totalmente embebidas no requieren la utilización de conectores de cortante.

c. Losas compuestas reforzadas con tablero de acero

Para pisos, durante los últimos años se han utilizado ampliamente paneles que constan de tableros de acero formados en frío y de bajo calibre, sobre los cuales se funde una losa de entrepiso en concreto. Si se presta atención adecuada a los detalles, la losa puede trabajar en forma compuesta con el tablero de acero, que sirve entonces no solamente como formaleta para la losa, sino también como acero principal a tensión por flexión. Apropiadas para cargas de piso relativamente livianas y luces cortas, las losas compuestas reforzadas con tablero de acero se utilizan en edificios de oficinas y de apartamentos, con vigas principales en los ejes de columnas y vigas secundarias en la dirección perpendicular subdividiendo los paneles en luces hasta de aproximadamente 12 pies. Pueden utilizarse cimbras temporales en el centro de la luz o en los tercios de la luz de los paneles para evitar esfuerzos y deflexiones en exceso mientras se vacía la losa, puesto que en esta etapa el tablero de acero solo debe resistir la totalidad de la carga aplicada.

d. Entrepisos de viguetas en una dirección

Un entrepiso de viguetas en una dirección consta de una serie de pequeñas vigas T de concreto reforzado con poco espaciamiento entre sí, que se apoyan en vigas principales de concreto vaciadas monolíticamente,

las cuales a su vez están sostenidas por las columnas del edificio. Las vigas T, llamadas también *viguetas* o *nervaduras*, se forman al dejar espacios vacíos en lo que de otra manera sería una losa maciza; estos vacíos se forman utilizando cajones especiales de acero* como se presenta en la figura 18.6. El concreto se vacía entre las formaletas para conformar las viguetas y se deja cierta altura por encima de la parte superior de las formaletas para configurar una delgada losa monolítica que se convierte en el ala de las vigas T.

Puesto que la resistencia del concreto a tensión es pequeña y se ignora por lo regular en el diseño, la eliminación de gran parte de éste en la losa mediante la utilización de las formaletas en forma de cajón genera disminución del peso con una ligera modificación en las características estructurales de la losa. Los entrepisos nervados son económicos para edificios como hoteles, hospitales y de apartamentos donde las cargas vivas son relativamente pequeñas y las luces comparativamente grandes. Éstos no son adecuados para construcción pesada como bodegas, plantas de impresión y edificios de manufactura pesada.

Las formaletas estándares para conformar los espacios vacíos entre las viguetas tienen un ancho de 20 ó 30 pulg y una altura de 8, 10, 12, 14, 16 ó 20 pulg. Como aparece en la figura 18.7, vistos en sección los lados tienen por lo general una inclinación de 1 a 12 hacia afuera para facilitar su remoción. Al variar el espaciamiento inferior entre las formaletas se puede lograr cualquier ancho de vigueta. Asimismo, pueden utilizarse cajones cuyos extremos disminuyen en ancho cuando se desee obtener una vigueta más ancha en la zona cercana a los apoyos extremos, como para grandes cortantes o para grandes momentos flectores negativos. Una vez que el concreto se endurece, los cajones de acero se retiran para ser reutilizados.

De acuerdo con el Código ACI 8.11.2, las viguetas no deben tener un ancho menor que 4 pulg ni una altura mayor que 3.5 veces el ancho mínimo del alma (para facilitar la ubicación de las barras y la colocación del concreto, es aconsejable tener anchos mínimos del alma de 5 pulg). El espaciamiento libre entre viguetas (determinado por el ancho del cajón) no debe exceder 30 pulg. El espesor de la losa por encima de la parte superior de los cajones no debe ser menor que un doceavo de la distancia libre entre

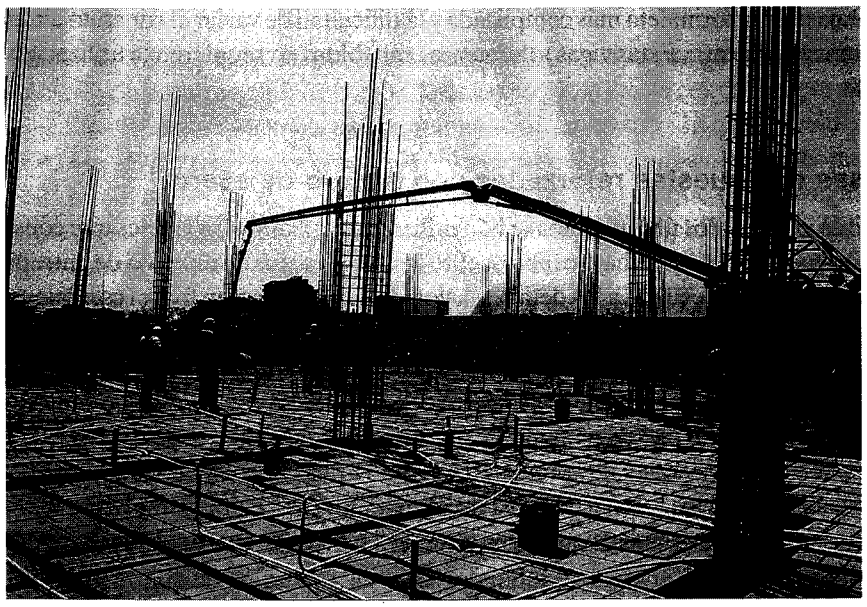
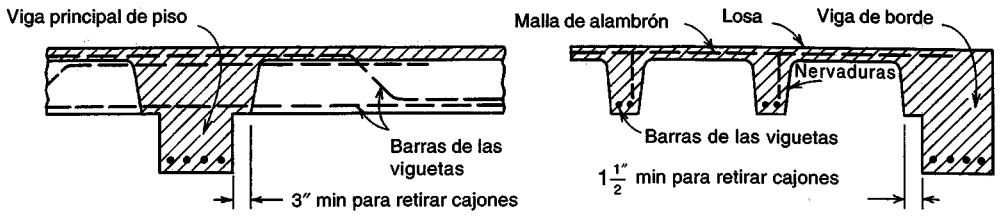


FIGURA 18.6
Formaletas para entrepiso de viguetas en una dirección.

* *N del R. T.* También pueden ser de icopor, madera y lona.



(*a*) Sección longitudinal a través de las viguetas (*b*) Sección transversal a través de las viguetas

FIGURA 18.7
Secciones transversales de un entrepiso de viguetas en una dirección: (*a*) sección transversal a través de una viga principal de soporte, que expone los extremos de las viguetas; (*b*) sección transversal a través de viguetas comunes.

viguetas, ni menor que 2 pulg, según el código ACI 8.11.6. La tabla 18.1 presenta valores de pesos unitarios en términos de lb/pie^2 de superficie de entrepiso, para combinaciones corrientes de anchos y alturas de viguetas, espesores de losa y anchos de formaletas.

El refuerzo de las viguetas consta generalmente de dos barras en la zona de flexión positiva, con una de las barras interrumpida donde ya no se requiere o doblada hacia arriba para proporcionar parte del acero negativo que se necesita sobre las vigas principales de apoyo. Se adicionan barras superiores rectas sobre los apoyos para absorber el momento flector negativo. Con respecto al Código ACI 7.13.2, al menos una barra inferior debe continuar a través del apoyo o, para el caso de apoyos no continuos, debe terminar en un gancho estándar como una medida para mejorar la integridad estructural en caso de que se presente un daño estructural considerable.

El Código ACI 7.7.1 permite un recubrimiento reducido de concreto de $\frac{3}{4}$ pulg para la construcción con viguetas, al igual que para losas. La losa delgada (ala superior) se refuerza principalmente para esfuerzos de temperatura y de retracción de fraguado, utilizando malla de alambrón o barras de diámetro pequeño que se colocan a ángulos rectos con respecto a las viguetas. El área de este refuerzo está por lo general en el orden de 0.18 por ciento de la sección transversal bruta de la losa de concreto.

Las viguetas en una dirección se dimensionan para que el concreto suministre toda la resistencia a cortante, sin que sea necesaria la utilización de estribos. Según el Código ACI 8.11.8, en la construc-

TABLA 18.1
Peso de sistemas de entrepiso de viguetas en una dirección

Losa superior de 3 pulg			Losa superior de $4\frac{1}{2}$ pulg		
Altura de la formaleta, pulg	**Ancho de la vigueta + la formaleta, pulg**	**Peso lb/pie^2**	**Altura de la formaleta, pulg**	**Ancho de la vigueta + la formaleta, pulg**	**Peso lb/pie^2**
8	5 + 20	60	8	5 + 20	79
8	5 + 30	54	8	5 + 30	72
10	5 + 20	67	10	5 + 20	85
10	5 + 30	58	10	5 + 30	77
12	5 + 20	74	12	5 + 20	92
12	5 + 30	63	12	5 + 30	82
14	5 + 20	81	14	5 + 20	99
14	5 + 30	68	14	5 + 30	87
16	6 + 20	94	16	6 + 20	113
16	6 + 30	78	16	6 + 30	97
20	6 + 20	111	20	6 + 20	130
20	6 + 30	91	20	6 + 30	109

Fuente: Adaptada de la referencia 18.2.

ción con viguetas se permite un incremento del diez por ciento en el valor de V_c, por encima del valor que determinan las ecuaciones (4.12*a*) o (4.12*b*), con base en la posibilidad de redistribución de sobrecargas locales a las viguetas adyacentes.

Las vigas principales que soportan las viguetas se vacían monolíticamente con éstas y son vigas T con una sección transversal que depende de la forma de los cajones que conforman las viguetas, como resulta evidente de la figura 18.7*a*. La losa delgada de concreto, directamente encima de la parte superior de los cajones, no se tiene en cuenta en los cálculos para las vigas principales y el espesor del ala para la viga T se toma como la altura total de las viguetas. El ancho del ala puede ajustarse para cumplir los requisitos variando la colocación de los cajones extremos, pero se requiere un mínimo de 3 pulg desde el alma de la viga T hasta el extremo del cajón para permitir la remoción de la formaleta.

Se ha desarrollado un sistema de entrepiso de viguetas en una dirección conocido como *sistema de viguetas y bandas*, en el cual a las primeras las sostienen vigas principales anchas con la misma altura total que las viguetas. Las formaletas independientes para las vigas se eliminan y el mismo tablero configura la parte inferior de las viguetas y de las vigas principales. En la mayor parte de los casos, la simplificación en la formaletería, la construcción más rápida, el cielo raso nivelado sin vigas sobresalientes y la reducción en la altura total de los muros, de las columnas y de las instalaciones verticales, entre otras, se combinan todas para alcanzar una reducción global en el costo en la mayoría de los casos.

En entrepisos de viguetas en una dirección, el espesor de la losa es controlado a menudo por los requisitos de resistencia contra el fuego. Por ejemplo, para una capacidad de dos horas, la losa debe tener un espesor aproximado de $4\frac{1}{2}$ pulg. Si se utilizan cajones de 20 ó 30 pulg, la luz libre de la losa es pequeña y su resistencia no se utiliza totalmente. Esto conduce a lo que se conoce como *sistema de viguetas de módulo ancho* o *sistema de viguetas salteadas* (referencia 18.4*a*). Estos entrepisos tienen en general viguetas con anchos entre 6 y 8 pulg, espaciadas de 5 a 6 pies entre centros, con una losa superior de $4\frac{1}{2}$ pulg. Estos entrepisos proporcionan no sólo una utilización más eficiente del concreto en la losa, sino que también exigen menos trabajo de formaletería de acuerdo con estudios en obra. Según el Código ACI 8.11.4, las viguetas de módulo ancho deben diseñarse como vigas T corrientes, puesto que el espaciamiento libre entre nervaduras excede el valor máximo de 30 pulg para construcción con viguetas y no pueden aplicarse entonces las disposiciones especiales del Código ACI para las mismas. El recubrimiento de concreto para el refuerzo es el mismo que se requiere para vigas y no para viguetas, y no puede aplicarse el aumento del diez por ciento en el valor de V_c. A menudo, las viguetas en los sistemas de módulo ancho se apoyan en vigas anchas en los ejes de columnas, con altura igual a la de las viguetas, para conformar un sistema de viguetas y bandas equivalente al descrito anteriormente.

En el *CRSI Handbook* (ver la referencia 18.2) se puede encontrar información útil para el diseño de entrepisos de viguetas en una dirección, que incluye gran cantidad de tablas de carga. En el *ACI Detailing Manual* (ver la referencia 18.3) se encuentran sugerencias para los detalles de barras y planos de diseño típicos.

e. Losas en dos direcciones apoyadas en los bordes

Las losas macizas en dos direcciones, apoyadas sobre vigas en los ejes de columnas a lo largo de todos los lados de cada panel de losa se analizaron en detalle en los capítulos 12 y 13. Las vigas perimetrales son por lo general de concreto vaciado monolíticamente con la losa, aunque también pueden ser de acero estructural, con frecuencia recubiertas de concreto para lograr una acción compuesta y mejorar la resistencia contra el fuego. Si las vigas de apoyo son de acero o si son de concreto vaciado monolíticamente y tienen una altura aproximada de tres veces el espesor de la losa o más, puede utilizarse el método de análisis y diseño de los coeficientes del capítulo 12. De otra manera, debe optarse por el método directo de diseño o por el del pórtico equivalente, descritos en el capítulo 13, porque tienen en cuenta la interacción entre la losa y las vigas de apoyo de manera más racional.

Los sistemas de losa maciza en dos direcciones son adecuados para cargas intermedias a grandes que actúan en luces hasta de 30 pies. Este intervalo corresponde muy de cerca al de losas sin vigas, pero

con ábacos o capiteles de columna, sistemas que se describen en la siguiente sección. Estos últimos se prefieren a menudo porque evitan que las vigas sobresalgan por debajo de la losa.

Para cargas más livianas y luces más cortas, se desarrolló un sistema de losa maciza en dos direcciones donde las vigas en los ejes de columnas son anchas y de poca altura de modo que una sección transversal a través del piso en cualquiera de las direcciones es similar a la de la losa con bandas expuesta en la figura 18.4. El resultado es un entrepiso de losa en dos direcciones con bandas que, visto desde abajo, se parece a un cielo raso con paneles. Las ventajas son similares a las determinadas anteriormente para los entrepisos de losas en una dirección con bandas y para los sistemas de vigueta y banda.

f. Losas planas sin vigas con ábaco o capiteles de columnas

Mediante un dimensionamiento y un refuerzo adecuados de la losa resulta posible eliminar del todo las vigas de apoyo; la losa queda entonces apoyada directamente en las columnas. En una zona rectangular o cuadrada centrada en las columnas, es posible suministrar un sobreespesor a la losa, y las partes superiores de las columnas pueden acampanarse, como aparece en la figura 18.8. El sobreespesor de la losa se llama comúnmente *ábaco* y la forma acampanada de la columna se llama un *capitel de columna*. Los dos tienen un propósito doble: aumentan la resistencia a cortante del sistema de piso en la región crítica alrededor de la columna y proporcionan una altura efectiva mayor para el acero de flexión en la región de alto momento flector negativo sobre el apoyo. Los sistemas sin vigas con ábacos o capiteles de columnas, o ambos, se llaman *sistemas de losa plana* (aunque en la práctica de ingeniería estructural casi todas las losas son "planas" en el sentido usual de la palabra) y se diferencian de los sistemas de placa plana, que no tienen ninguna proyección por debajo de la losa. Éstos se describen en la siguiente sección.

En general, las construcciones de losa plana son económicas para cargas vivas de 100 lb/pie^2 o más y para luces hasta casi 30 pies. Se utilizan ampliamente en bodegas de almacenamiento, garajes de estacionamiento y estructuras subterráneas que soportan grandes cargas producidas, por ejemplo, por rellenos de tierra. Para cargas más livianas, como en el caso de hoteles, edificios de apartamentos y de oficinas, las placas planas (ver la sección 18.2) o alguna forma de construcción con viguetas (ver las secciones 18.2*d* y *h*) serán en general menos costosas. Para luces mayores que aproximadamente

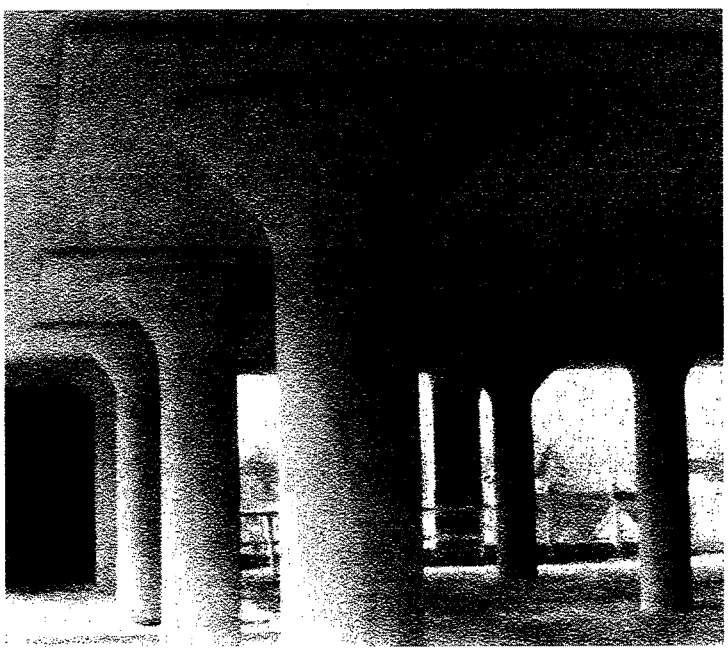


FIGURA 18.8
Entrepiso de losa plana en un garaje de estacionamiento.

30 pies, se utilizan vigas secundarias y vigas principales debido a la mayor rigidez de este tipo de construcción.

Las losas planas pueden diseñarse con el método directo de diseño o mediante el del pórtico equivalente, ambos descritos en detalle en el capítulo 13.

g. Losas de placa plana

Un entrepiso de placa plana consta esencialmente de un entrepiso de losa plana, en el que se omiten los ábacos y los capiteles de columna, de manera que el entrepiso de espesor uniforme queda soportado en forma directa por columnas prismáticas. Se ha encontrado que los entrepisos de placa plana son económicos y ventajosos, por ejemplo para usos en edificios de apartamentos, como se ilustra en la figura 18.9, donde las luces son moderadas y las cargas relativamente livianas. El espesor de construcción de cada entrepiso se mantiene en el mínimo absoluto con un ahorro resultante en la altura total del edificio. La parte inferior lisa de la losa puede pintarse directamente y dejarse expuesta como cielo raso



FIGURA 18.9
Construcción de un entrepiso de placa plana.

Si las deformaciones por retracción de fraguado y por flujo plástico son las mismas que antes, la deformación neta en el acero después de estas pérdidas es

$$\epsilon_{s,\text{ neta}} = (51.7 - 8.0) \times 10^{-4} = 43.7 \times 10^{-4}$$

y el esfuerzo correspondiente después de las pérdidas es

$$f_s = \epsilon_{s,\text{neta}} E_s = (43.7 \times 10^{-4})\,(29 \times 10^6) = 127{,}000 \text{ lb/pulg}^2$$

Esto representa una pérdida de esfuerzo de aproximadamente el 15 por ciento, en comparación con la pérdida del cien por ciento en la viga con acero común. Es claro que la cantidad de esfuerzo perdido por la retracción de fraguado y el flujo plástico es independiente del esfuerzo original en el acero; por tanto, cuanto mayor sea el esfuerzo original, menor será el porcentaje de pérdida. Esto se ilustra gráficamente mediante las curvas esfuerzo-deformación unitaria de la figura 19.7*b*. La curva *A* es representativa de barras de refuerzo corrientes con un esfuerzo de fluencia de 60,000 lb/pulg^2, mientras que la curva *B* representa aceros de alta resistencia con un esfuerzo último de 250,000 lb/pulg^2. El cambio de esfuerzo Δf resultante de algún cambio en la deformación unitaria $\Delta\epsilon$ tiene mucho menos efecto cuando se alcanzan altos niveles de esfuerzos en el acero. Por consiguiente, el preesfuerzo del concreto es práctico sólo cuando se utilizan aceros de muy alta resistencia.

Los aceros de preesfuerzo se utilizan con mayor frecuencia en la forma de alambrones individuales, cables en forma de torón de siete hilos y barras de acero aleado. Las propiedades físicas de estos aceros se analizaron en la sección 2.16 y en la figura 2.15 se presentan curvas esfuerzo-deformación unitaria típicas.

El esfuerzo de tensión permitido por el Código ACI 18.5 en alambres, torones o barras de preesfuerzo depende del estado de aplicación de las cargas. Cuando la fuerza de los gatos se aplica por primera vez, se permite un esfuerzo de $0.80f_{pu}$ o $0.94f_{py}$, el que sea menor, donde f_{pu} es la resistencia última del acero y f_{py} es la resistencia de fluencia. Inmediatamente después de la transferencia de la fuerza de preesfuerzo al concreto, el esfuerzo permitido es $0.74f_{pu}$ o $0.82f_{py}$, el que sea menor (excepto en los anclajes de postensado donde el esfuerzo se limita a $0.70f_{pu}$). La justificación para permitir un esfuerzo admisible mayor durante la operación de tensionamiento es que el esfuerzo en el acero se conoce con bastante precisión en este estado. La presión hidráulica en los gatos y la deformación total en el acero son cantidades que se miden fácilmente. Además, si un tendón deficiente se rompe en forma accidental, puede remplazarse sin problemas; de hecho, la operación de tensionamiento es un ensayo del comportamiento del material. Los valores más bajos de esfuerzos admisibles son aplicables después de que ocurren el acortamiento elástico del concreto, las pérdidas por fricción y los deslizamientos en los anclajes, estado en el que se aplican las cargas de servicio. El esfuerzo en el acero se reduce un poco más durante la vida del elemento por la retracción de fraguado y el flujo plástico en el concreto, y por la relajación en el acero. La tabla 19.1 resume los esfuerzos admisibles dados por el AIC para aceros de preesfuerzo.

TABLA 19.1
Esfuerzos admisibles en tendones de preesfuerzo

Los esfuerzos de tensión en los tendones de preesfuerzo no deben exceder lo siguiente:	
1. Debido a la fuerza del gato en el tendón pero no mayor que el menor entre $0.80f_{pu}$ y el valor máximo recomendado por el fabricante de los tendones de preesfuerzo o de los anclajes	$0.94f_{py}$
2. Inmediatamente después de la transferencia del preesfuerzo pero no mayor que $0.74f_{pu}$	$0.82f_{py}$
3. En anclajes y acoples de tendones de postensionamiento, inmediatamente después del anclaje del tendón	$0.70f_{pu}$

La resistencia y otras características de los alambres, torones y barras de preesfuerzo varían un poco entre los diferentes fabricantes, lo mismo que los métodos de agrupar los tendones y de anclarlos. En la tabla A. 16 del apéndice A y en la referencia 19.1 a 19.8 se presenta información típica a manera de ilustración.

19.5 CONCRETO PARA CONSTRUCCIÓN PREESFORZADA

A menudo se utiliza concreto de resistencia a la compresión sustancialmente mayor para estructuras preesforzadas, que para las construidas con concreto reforzado corriente. En la actualidad, la mayor parte de las construcciones preesforzadas en los Estados Unidos se diseñan para una resistencia a la compresión entre 5000 y 6000 lb/pulg^2. Hay varias razones para esto:

1. Normalmente, el concreto de alta resistencia tiene un módulo de elasticidad mayor (ver la figura 2.3). Esto significa una reducción en la deformación elástica inicial con la aplicación de la fuerza de preesfuerzo y una reducción en la deformación por flujo plástico, que es aproximadamente proporcional a la deformación elástica. Esto genera una reducción en la pérdida de preesfuerzo.
2. En construcción postensada, se tienen grandes esfuerzos de contacto en los extremos de las vigas, donde la fuerza de preesfuerzo se transfiere desde los tendones hasta los dispositivos de anclaje, que se apoyan directamente sobre el concreto. Este problema se puede resolver aumentando el tamaño de los dispositivos de anclaje o incrementando la capacidad portante del concreto mediante un aumento en su resistencia a la compresión. Esta última solución es por lo general más económica.
3. En construcción pretensada, donde es común la transferencia de esfuerzos por adherencia, la utilización de concretos de alta resistencia permitirá el desarrollo de mayores esfuerzos de adherencia.
4. Una parte sustancial de la construcción preesforzada en los Estados Unidos es prefabricada, con el concreto mezclado, vaciado y curado en condiciones cuidadosamente controladas, lo cual facilita la obtención de altas resistencias.

Las características de deformabilidad del concreto bajo cargas de corta duración y cargas sostenidas adquieren una importancia incluso mayor en estructuras preesforzadas que en estructuras de concreto reforzado, por la influencia de las deformaciones en la pérdida de la fuerza de preesfuerzo. Las deformaciones ocasionadas por esfuerzos, junto con los cambios volumétricos que generan la retracción de fraguado y los cambios de temperatura, pueden tener una influencia considerable en las estructuras preesforzadas. Con relación a este aspecto, se sugiere que el lector repase las secciones 2.8 a 2.11, que analizan con algún detalle las resistencias a la compresión y a la tensión del concreto bajo cargas de corta duración y cargas sostenidas, y los cambios volumétricos en el concreto por la retracción de fraguado y por los cambios de temperatura.

Al igual que para los aceros de preesfuerzo, los esfuerzos admisibles en el concreto, según el Código ACI 18.4, dependen del estado de carga. Estos esfuerzos están dados en la tabla 19.2. En este caso, f'_{ci} es la resistencia a la compresión del concreto en el momento del preesfuerzo inicial y f'_c es la resistencia a la compresión especificada del concreto. En las partes 2*a* y 2*b* de la tabla 19.2, las *cargas sostenidas* se refieren a cualquier parte de la carga de servicio que permanecerá aplicada durante un periodo suficiente de tiempo para producir significativas deflexiones dependientes del tiempo, mientras que la *carga total* se refiere a la carga de servicio total, una parte de la cual puede ser transitoria o carga viva temporal. De esta manera, la carga sostenida incluiría la carga muerta y puede o no incluir la carga viva de servicio, dependiendo de su duración. Si la duración de la carga viva es corta o intermitente, se permite el límite mayor de la parte 2*b*.

TABLA 19.2
Esfuerzos admisibles en el concreto en elementos preesforzados sometidos a flexión

1. Los esfuerzos en el concreto inmediatamente después de la transferencia del preesfuerzo, antes de las pérdidas de preesfuerzo dependientes del tiempo, no deben exceder lo siguiente:	
(*a*) Esfuerzo en la fibra extrema a compresión	$0.60f'_{ci}$
(*b*) Esfuerzo en la fibra extrema a tensión, excepto por lo permitido en (*c*)	$3\sqrt{f'_{ci}}$
(*c*) Esfuerzo en la fibra extrema a tensión en los extremos de elementos simplemente apoyados Cuando los esfuerzos de tensión calculados excedan estos valores, debe proporcionarse refuerzo auxiliar adherido (no preesforzado o preesforzado) en la zona de tensión, para resistir la fuerza total de tensión en el concreto calculada con el supuesto de una sección no fisurada.	$6\sqrt{f'_{ci}}$
2. Los esfuerzos en el concreto para las cargas de servicio, después de tener en cuenta todas las pérdidas de preesfuerzo, no deben exceder lo siguiente:	
(*a*) Esfuerzo en la fibra extrema a compresión debido a preesfuerzo más cargas sostenidas	$0.45f'_c$
(*b*) Esfuerzo en la fibra extrema a compresión debido a preesfuerzos más la carga total	$0.60f'_c$
(*c*) Esfuerzo en la fibra extrema a tensión en la zona de tensión precomprimida	$6\sqrt{f'_c}$
(*d*) Esfuerzo en la fibra extrema a tensión en la zona de tensión precomprimida de los elementos, excepto para los sistemas de losa en dos direcciones, en los cuales el análisis basado en las secciones fisuradas transformadas y en las relaciones bilineales momento-deflexión demuestren que las deflexiones instantáneas y a largo plazo cumplen con las restricciones establecidas en otras secciones del Código ACI	$12\sqrt{f'_c}$
3. Los esfuerzos admisibles en el concreto, determinados anteriormente, pueden excederse si se demuestra mediante ensayo o análisis que el comportamiento no se verá afectado	

19.6 ANÁLISIS ELÁSTICO A FLEXIÓN

Anteriormente se indicó que el diseño de estructuras de concreto puede basarse en suministrar la resistencia suficiente, que se utilizaría sólo si las cargas esperadas se incrementaran con un factor de sobrecarga, o manteniendo los esfuerzos del material dentro de límites admisibles cuando actúan las cargas reales de servicio. Para el caso de elementos de concreto reforzado corriente, se utiliza en general el diseño a la resistencia. Los elementos se dimensionan con base en los requisitos de resistencia y luego se verifican para un comportamiento satisfactorio ante las cargas de servicio, principalmente con respecto a las deflexiones y al agrietamiento. El diseño se modifica entonces si es necesario.

En el caso de elementos de concreto preesforzado, la práctica actual consiste en dimensionar los elementos de manera que los esfuerzos en el concreto y en el acero bajo las cargas reales de servicio estén dentro de los límites permitidos, los cuales son una fracción de las capacidades reales de los materiales. Hay algo lógico en este enfoque, puesto que un objetivo importante del preesfuerzo es mejorar el comportamiento de los elementos con las cargas de servicio. Más aún, los requisitos para cargas de servicio controlan a menudo la cantidad de fuerza de preesfuerzo que se utiliza. El diseño basado en las cargas de servicio puede llevarse a cabo, por lo general, suponiendo un comportamiento elástico tanto del concreto como del acero, puesto que los esfuerzos son relativamente bajos en los dos materiales.

Independientemente del punto de partida seleccionado para el diseño, un elemento estructural debe comportarse de manera satisfactoria en todos los estados de su historial de cargas. De acuerdo con esto, los elementos preesforzados dimensionados con base en esfuerzos admisibles se deben revisar para verificar si disponen de resistencia suficiente en caso de que ocurran sobrecar-

gas, y deben investigarse en lo que a deflexiones y agrietamiento ante las cargas de servicio se refiere. En forma consistente con la práctica más común en los Estados Unidos, en este texto se inicia el diseño de vigas de concreto preesforzado con una consideración de los límites de esfuerzos, después de lo cual se verifican la resistencia y otras propiedades.

Es conveniente pensar que las fuerzas de preesfuerzo conforman un sistema de fuerzas externas que actúan sobre un elemento de concreto, que debe estar en equilibrio bajo la acción de dichas fuerzas. La figura 19.8*a* ilustra una viga preesforzada de una sola luz, simplemente apoyada y con tendones curvos, típica de muchos elementos postensados. La porción de la viga a la izquierda de un plano de corte vertical *x-x* se toma como un cuerpo libre con las fuerzas que actúan en la figura 19.8*b*. La fuerza P en el extremo izquierdo se ejerce sobre el concreto mediante el anclaje de los tendones, mientras que la fuerza P en el plano de corte *x-x* resulta de la combinación de esfuerzos cortantes y normales que actúan en la superficie del concreto en ese punto. La dirección de P es tangencial a la curva del tendón en cada punto. Observe la presencia de la fuerza N, que actúa sobre el concreto proveniente del tendón, a causa de su curvatura; esta fuerza se distribuirá de alguna manera a lo largo de la longitud del tendón y su distribución exacta dependerá del perfil del mismo. Su resultante y la dirección en la cual actúa pueden encontrarse a partir del diagrama de fuerzas de la figura 19.8*c*.

Al trabajar con la fuerza de preesfuerzo P, es conveniente dividirla en sus componentes en las direcciones horizontal y vertical. La componente horizontal (ver la figura 19.8*d*) es $H = P \cos \theta$, y la componente vertical es $V = H \tan \theta = P \operatorname{sen} \theta$, donde θ es el ángulo de inclinación del centroide del tendón en la sección particular. Puesto que el ángulo de la pendiente es por lo general muy pequeño, el coseno de θ está muy cerca de la unidad y resulta suficiente en la mayor parte de los cálculos tomar $H = P$.

La magnitud de la fuerza de preesfuerzo no es constante. La *fuerza del gato* P_j se reduce inmediatamente a lo que se llama la *fuerza de preesfuerzo inicial* P_i a causa del acortamiento elástico del concreto luego de la transferencia, del deslizamiento del tendón a medida que la fuerza se transfiere de los gatos a los extremos de la viga, y por las pérdidas que ocasiona la fricción entre el tendón y el concreto (postensado) o entre el tendón y los dispositivos de alineamiento del cable (pretensado). Existe una reducción adicional de la fuerza desde P_i hasta el *preesfuerzo efectivo* P_e, que ocurre durante un largo período y a una tasa gradualmente decreciente, producto del flujo plástico del concreto bajo la acción de la fuerza de preesfuerzo sostenida, de la retracción de fra-

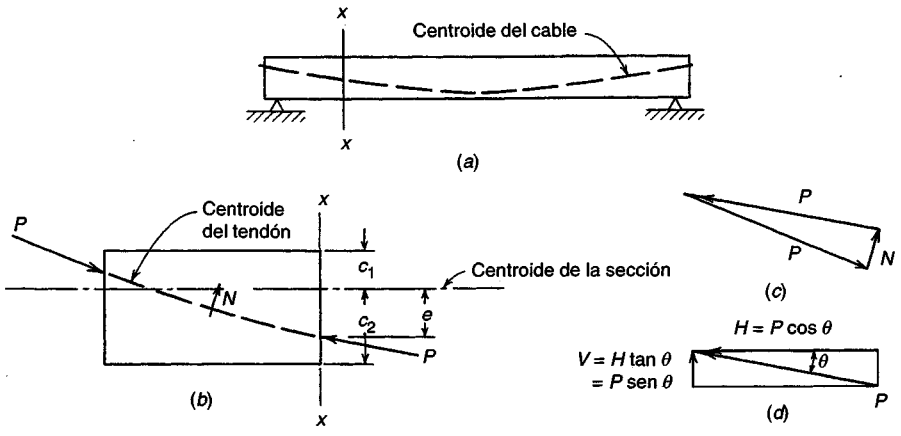


FIGURA 19.8
Fuerzas de preesfuerzo que actúan sobre el concreto.

guado del concreto y de la relajación de esfuerzos en el acero. En la sección 19.13 se analizan los métodos para estimar las pérdidas. Los preesfuerzos iniciales P_i inmediatamente después de la transferencia, y los preesfuerzos finales o efectivos P_e, después de todas las pérdidas, son de interés primordial para el diseñador.

En el desarrollo de las ecuaciones elásticas para esfuerzos generados por flexión, los efectos de la fuerza de preesfuerzo, los momentos que genera el peso propio y los momentos por las cargas muerta y viva se calculan por separado y luego se superponen. Cuando la fuerza inicial de preesfuerzo P_i se aplica con una excentricidad e por debajo del centroide de la sección transversal con área A_c y con distancias a las fibras superiores e inferiores c_1 y c_2, respectivamente, ésta produce el esfuerzo de compresión $-P_i/A_c$, y los esfuerzos flectores $+P_iec_1/I_c$ y $-P_iec_2/I_c$ en las fibras superiores e inferiores respectivamente (los esfuerzos de compresión se consideran negativos y los esfuerzos de tensión positivos), como se indica en la figura 19.9*a*. Entonces, en la fibra superior, el esfuerzo es

$$f_1 = -\frac{P_i}{A_c} + \frac{P_iec_1}{I_c} = -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) \tag{19.1a}$$

y en la fibra inferior

$$f_2 = -\frac{P_i}{A_c} - \frac{P_iec_2}{I_c} = -\frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) \tag{19.1b}$$

donde r es el radio de giro de la sección de concreto. Normalmente, a medida que se aplica la fuerza de preesfuerzo excéntrica la viga se deflecta hacia arriba. El peso propio de la viga w_o produce entonces un momento adicional M_o, y los esfuerzos netos en las fibras superiores e inferiores se convierten en

$$f_1 = -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_oc_1}{I_c} \tag{19.2a}$$

$$f_2 = -\frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_oc_2}{I_c} \tag{19.2b}$$

como se indica en la figura 19.9*b*. En este estado de carga comienzan las pérdidas dependientes del tiempo por la retracción de fraguado, el flujo plástico y la relajación, y la fuerza de preesfuerzo se reduce en forma gradual desde P_i hasta P_e. Por lo general, resulta aceptable suponer que todas estas pérdidas ocurren antes de la aplicación de las cargas de servicio, puesto que los esfuerzos en el concreto para estas cargas serán críticos después de que ocurran todas las pérdidas y no antes. De acuerdo con esto, cuando se aplican la carga P_e y la carga por peso propio de la viga, los esfuerzos en la fibra superior y en la inferior se transforman en

$$f_1 = -\frac{P_e}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_oc_1}{I_c} \tag{19.3a}$$

$$f_2 = -\frac{P_e}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_oc_2}{I_c} \tag{19.3b}$$

Cuando se aplica la totalidad de las cargas de servicio (carga muerta adicional al peso propio de la viga, más carga viva de servicio), los esfuerzos son

$$f_1 = -\frac{P_e}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{(M_o + M_d + M_l)c_1}{I_c} \tag{19.4a}$$

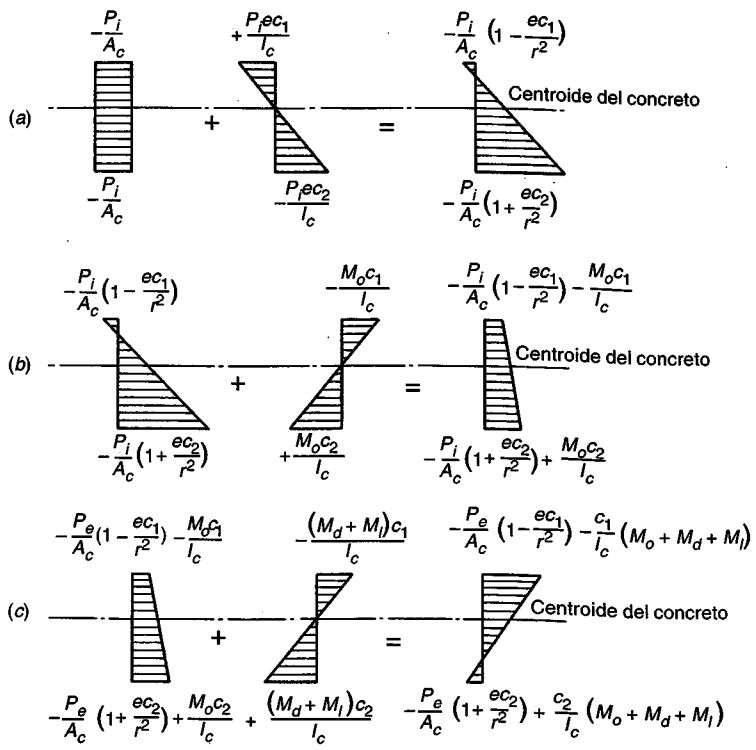


FIGURA 19.9
Distribución de esfuerzos en el concreto en vigas: (*a*) efecto del preesfuerzo; (*b*) efecto del preesfuerzo más el peso propio de la viga; (*c*) efecto del preesfuerzo, del peso propio y de las cargas externas de servicio (muertas y vivas).

$$f_2 = -\frac{P_e}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{(M_o + M_d + M_l)c_2}{I_c} \qquad (19.4b)$$

como se ilustra en la figura 19.9*c*.

Al revisar si la viga es adecuada (o al diseñar una viga con base en esfuerzos admisibles) es necesario que los esfuerzos en las fibras extremas permanezcan dentro de límites especificados con cualquier combinación de cargas que pueda ocurrir. Con frecuencia, los esfuerzos en la sección de máximo momento de una viga bien diseñada deben permanecer dentro de los estados límite definidos por las distribuciones que se presentan en la figura 19.10, a medida que la viga pasa del estado sin carga (P_i más peso propio) al estado de carga (P_e, más las cargas completas de servicio). En la figura, f_{ci} y f_{ti} son los respectivos esfuerzos de compresión y de tensión admisibles en el concreto

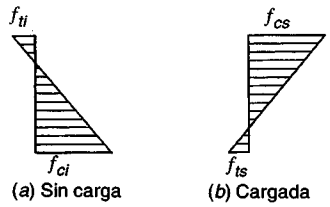


FIGURA 19.10
Esfuerzos límite: (*a*) viga sin carga, con preesfuerzo inicial más peso propio; (*b*) viga cargada, con preesfuerzo efectivo, peso propio y carga de servicio completa.

inmediatamente después de la transferencia, y f_{cs} y f_{ts} son los esfuerzos de compresión y tensión admisibles para las cargas de servicio (ver la tabla 19.2).

Al calcular las propiedades de las secciones A_c, I_c, etc., a utilizar en las ecuaciones anteriores, resulta relevante considerar que, en la construcción postensada, los tendones por lo general se inyectan con lechada en los conductos después del tensionamiento. Antes de la inyección de la lechada, los esfuerzos deben calcularse con base en la sección neta descontando los huecos. Después de la inyección de la lechada, se debe utilizar la sección transformada, teniendo en cuenta los huecos rellenos con concreto y remplazando el acero con un área equivalente de concreto. Sin embargo, es aceptable, a menos que los huecos sean demasiado grandes, calcular las propiedades de la sección con base en la sección bruta de concreto. En forma similar, aunque en vigas pretensadas deben utilizarse las propiedades de la sección transformada, se obtiene poca diferencia si los cálculos se basan en las propiedades de la sección bruta de concreto†.

Resulta útil establecer la ubicación de los *puntos límite* superior e inferior de una sección transversal. Éstos se definen como los puntos límite de la zona dentro de la cual puede aplicarse la fuerza de preesfuerzo, sin producir tensión en ninguna parte de la sección transversal. Su localización se obtiene planteando la expresión para el esfuerzo en la fibra de tensión, causado por una fuerza de preesfuerzo excéntrica que actúa sola e igualando a cero esta expresión para encontrar la excentricidad requerida. En la figura 19.11, para localizar la distancia del punto límite superior k_1 desde el eje neutro, suponga que la resultante de la fuerza de preesfuerzo P actúa en ese punto. Entonces, el esfuerzo en la fibra inferior es

$$f_2 = -\frac{P}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) = 0$$

Así, con

$$1 + \frac{ec_2}{r^2} = 0$$

se obtiene la excentricidad correspondiente

$$e = k_1 = -\frac{r^2}{c_2} \tag{19.5a}$$

Asimismo, la distancia k_2 hasta el punto límite inferior es

$$k_2 = \frac{r^2}{c_1} \tag{19.5b}$$

La región entre estos dos puntos límite se conoce como el *núcleo* de la sección.

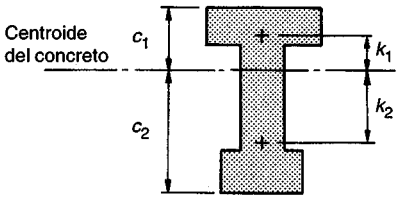


FIGURA 19.11
Localización de los puntos límite del núcleo de la sección.

†El Código ACI 18.2.6 incluye la siguiente disposición: "Al calcular las propiedades de la sección antes de la adherencia de los tendones de preesfuerzo debe tenerse en cuenta el efecto de la pérdida de área por los ductos abiertos". En el comentario ACI 18.2.6 se enfatiza que "Si el efecto del área del ducto abierto se considera insignificante en el diseño, las propiedades de la sección pueden basarse en el área total. En elementos pretensados y postensados, después de la inyección de la lechada, las propiedades de la sección pueden basarse en las secciones brutas, las netas o las efectivas utilizando las áreas transformadas de los tendones adheridos y del refuerzo no preesforzado".

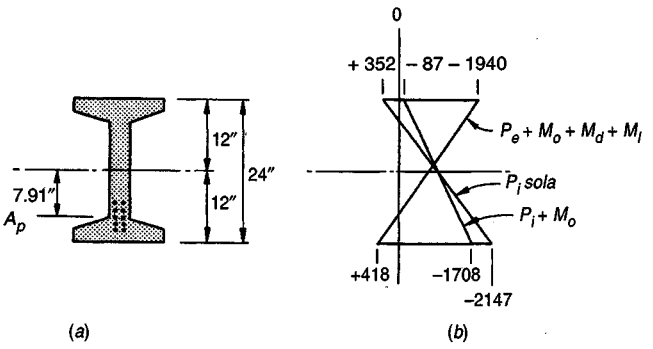


FIGURA 19.12
Ejemplo de diseño: viga I pretensada.

Ejemplo 19.1. Viga I pretensada con excentricidad constante. La viga I simétrica y simplemente apoyada que aparece en sección transversal en la figura 19.12*a*, se utilizará sobre una luz sencilla de 40 pies. Las propiedades de la sección de la viga son:

Momento de inercia:	$I_c = 12{,}000$ pulg^4
Área de concreto:	$A_c = 176$ pulg^2
Radio de giro:	$r^2 = 68.2$ pulg^2
Módulo elástico de la sección:	$S = 1000$ pulg^3
Peso propio:	$w_o = 0.183$ klb/pie

y debe soportar una carga muerta superpuesta más una viva (considerada como "sostenida", no de corto plazo) de 0.750 klb/pie además de su peso propio. La viga se pretensionará con múltiples torones de siete hilos, con centroide a una excentricidad constante de 7.91 pulg. La fuerza de preesfuerzo P_i inmediatamente después de la transferencia será de 158 klb; después de las pérdidas dependientes del tiempo, la fuerza se reducirá a $P_e = 134$ klb. La resistencia de diseño del concreto es $f'_c = 5000$ lb/pulg^2 y en el momento de la aplicación de la fuerza de preesfuerzo será de $f'_{ci} = 3750$ lb/pulg^2. Calcule los esfuerzos por flexión en el concreto en la sección en el centro de la luz de la viga en el momento de la transferencia y después de que ocurren todas las pérdidas con la totalidad de la carga de servicio aplicada. Compare los resultados con los esfuerzos admisibles del Código ACI.

Solución. Los esfuerzos en el concreto causados por la fuerza inicial de preesfuerzo de 158 klb pueden encontrarse mediante las ecuaciones (19.1*a*) y (19.1*b*):

$$f_1 = -\frac{158{,}000}{176}\left(1 - \frac{7.91 \times 12}{68.2}\right) = +352 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -\frac{158{,}000}{176}\left(1 + \frac{7.91 \times 12}{68.2}\right) = -2147 \text{ lb/pulg}^2$$

El peso propio de la viga produce la superposición inmediata de un momento igual a

$$M_o = 0.183 \times \frac{40^2}{8} = 36.6 \text{ klb-pie}$$

y esfuerzos correspondientes de $36{,}600 \times 12/1000 = 439$ lb/pulg^2, de manera que los esfuerzos netos en la parte superior y en la inferior de la sección de concreto ocasionados por el preesfuerzo inicial y el peso propio, a partir de las ecuaciones (19.2*a*) y (19.2*b*), son

$$f_1 = +352 - 439 = -87 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -2147 + 439 = -1708 \text{ lb/pulg}^2$$

Después de las pérdidas, la fuerza de preesfuerzo se reduce a 134 klb y los esfuerzos en el concreto generados por esta fuerza más el peso propio son

$$f_1 = +352 \times \frac{134}{158} - 439 = 140 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -2147 \times \frac{134}{158} + 439 = -1382 \text{ lb/pulg}^2$$

La carga superpuesta de 0.750 klb/pie produce un momento en el centro de la luz de $M_d + M_l = 0.750 \times 40^2/8 = 150$ klb-pie y los esfuerzos correspondientes de $150{,}000 \times 12/1000 = 1800$ lb/pulg^2 de compresión y de tensión en las partes superior e inferior de la viga, respectivamente. Así, los esfuerzos para cargas de servicio en las caras superior e inferior son

$$f_1 = -140 - 1800 = -1940 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = -1382 + 1800 = +418 \text{ lb/pulg}^2$$

Los esfuerzos en el concreto en el centro de la luz se ilustran en la figura 19.12*b*. Según el Código ACI (ver la tabla 19.2), los esfuerzos permitidos en el concreto son:

Tensión en la transferencia: $f_{ti} = 3\sqrt{3750} = +184$ lb/pulg^2
Compresión en la transferencia: $f_{ci} = 0.60 \times 3750 = -2250$ lb/pulg^2
Tensión bajo las cargas de servicio: $f_{ts} = 6\sqrt{5000} = +424$ lb/pulg^2
Compresión bajo las cargas de servicio: $f_{cs} = 0.45 \times 5000 = -2250$ lb/pulg^2

En el estado de carga inicial, con la fuerza de preesfuerzo más el peso propio actuando, la compresión real de 1708 lb/pulg^2 está muy por debajo del límite de 2250 lb/pulg^2 y no se presenta tensión en la parte superior aunque se permiten 184 lb/pulg^2. Aunque podría sugerirse la aplicación de una fuerza de preesfuerzo mayor o una mayor excentricidad para utilizar en forma más completa la sección, tratar de hacerlo en esta viga con excentricidad constante violaría los límites en los apoyos donde los momentos por peso propio son nulos. Es evidente que, en los apoyos, la fuerza de preesfuerzo inicial que actúa sola produce una tensión de 352 lb/pulg^2 en la parte superior de la viga, escasamente inferior al valor permitido de $6\sqrt{3750} = 367$ lb/pulg^2, de manera que puede lograrse un mejoramiento muy pequeño. Finalmente, con la carga de servicio completa, la tensión de 418 lb/pulg^2 está justo por debajo del valor admisible de 424 lb/pulg^2 y la compresión de 1940 lb/pulg^2 se encuentra muy por debajo del valor permitido de 2250 lb/pulg^2.

19.7 RESISTENCIA A LA FLEXIÓN

En una viga corriente de concreto reforzado, el esfuerzo en el acero a tensión y la fuerza de compresión en el concreto aumentan en proporción al momento aplicado hasta y un poco más allá de la carga de servicio, y la distancia entre las dos resultantes de esfuerzos internos permanece constante. En contraste con este comportamiento, en una viga preesforzada el incremento en el momento es resistido por un aumento proporcional en la distancia entre las resultantes de las fuerzas a compresión y a tensión, con la resultante de compresión desplazándose hacia arriba a medida que se incrementa la carga. La magnitud de las fuerzas internas permanece casi constante hasta y, por lo general, un poco más allá de las cargas de servicio.

Esta situación cambia de manera drástica una vez que ocurre el agrietamiento a tensión por flexión de la viga preesforzada. Cuando el concreto se fisura, se presenta un aumento súbito en el esfuerzo en el acero, puesto que la tensión que inicialmente resistía el concreto se transfiere al acero. Después del agrietamiento, la viga preesforzada se comporta como una viga corriente de concreto reforzado. La resultante de compresión no puede continuar moviéndose hacia arriba en forma indefinida y el aumento en el momento debe estar acompañado por un incremento casi proporcional en los esfuerzos en el acero y en la fuerza de compresión. Por consiguiente, es posible estimar la resistencia de una viga preesforzada mediante los mismos métodos desarrollados para las vigas corrientes de concreto reforzado, con algunas modificaciones para tener en cuenta: (*a*) la forma diferente de la curva esfuerzo-deformación unitaria para el acero de preesfuerzo, en comparación con la de las barras corrientes de refuerzo, y (*b*) la deformación de tensión ya presente en el acero de preesfuerzo antes de cargar la viga.

Con base en un *análisis de compatibilidad de deformaciones* que tenga en cuenta estos factores de modo racional y explícito (ver la referencia 19.1), puede adelantarse un estimativo bastante preciso de la resistencia a la flexión de vigas preesforzadas. Para efectos de diseño corriente se han desarrollado relaciones aproximadas. El Código ACI 18.7 y el comentario que lo acompaña

incluyen ecuaciones aproximadas para estimar la resistencia a la flexión, las cuales se resumen en los siguientes párrafos.

a. Esfuerzo en el acero de preesfuerzo para la falla a flexión

Cuando una viga de concreto preesforzado falla a flexión, el acero de preesfuerzo está sometido a un esfuerzo f_{ps} que es mayor que el preesfuerzo efectivo f_{pe}, pero menor que la resistencia última a tensión f_{pu}. Si el preesfuerzo efectivo $f_{pe} = P_e/A_{ps}$ no es menor que $0.50f_{pu}$, el Código ACI 18.7.2 permite la utilización de ciertas ecuaciones aproximadas para estimar f_{ps}. Estas ecuaciones parecen bastante complejas, principalmente porque están formuladas de modo general para tener en cuenta las diferencias en los tipos de acero de preesfuerzo y aplicarlas a vigas donde pueden incluirse barras de refuerzo no preesforzadas en la zona de tensión por flexión, o en la región de compresión, o en ambas. Se dan ecuaciones independientes para elementos con tendones adheridos y con tendones no adheridos porque, en este último caso, el aumento del esfuerzo en el acero, en la sección de máximo momento, a medida que la viga se sobrecarga, es mucho menor que si el acero se adhiere en toda su longitud.

Para el caso básico, en el cual el acero de preesfuerzo proporciona todo el refuerzo a flexión, las ecuaciones del Código ACI pueden plantearse de la siguiente manera simplificada:

1. Para elementos con tendones adheridos:

$$f_{ps} = f_{pu}\left(1 - \frac{\gamma_p}{\beta_1}\frac{\rho_p f_{pu}}{f'_c}\right) \tag{19.6}$$

en la cual $\rho_p = A_{ps}/bd_p$, d_p = altura efectiva hasta el centroide del acero de preesfuerzo, b = ancho de la cara a compresión, β_1 = relaciones familiares entre la altura del bloque de esfuerzos y la distancia al eje neutro, y γ_p es un factor que depende del tipo de acero de preesfuerzo utilizado, de la siguiente manera:

$\gamma_p = 0.55$ para f_{py}/f_{pu} no menor que 0.80 (barras de alta resistencia típicas)
$\gamma_p = 0.40$ para f_{py}/f_{pu} no menor que 0.85 (torón corriente típico)
$\gamma_p = 0.28$ para f_{py}/f_{pu} no menor que 0.90 (torón de baja relajación típico)

2. Para elementos con tendones no adheridos y con una relación luz-altura de 35 o menos (que incluye la mayor parte de las vigas),

$$f_{ps} = f_{pe} + 10{,}000 + \frac{f'_c}{100\rho_p} \tag{19.7}$$

pero no mayor que f_{py} y no mayor que $f_{pe} + 60{,}000$ lb/pulg^2.

3. Para elementos con tendones no adheridos y con una relación luz-altura mayor que 35 (aplicable a muchas losas),

$$f_{ps} = f_{pe} + 10{,}000 + \frac{f'_c}{300\rho_p} \tag{19.8}$$

pero no mayor que f_{py}, y no mayor que $f_{pe} + 30{,}000$ lb/pulg^2.

b. Resistencia nominal a la flexión y resistencia de diseño

Una vez determinado el esfuerzo en el acero de preesfuerzo a tensión cuando el elemento falla a flexión utilizando las ecuaciones (19.6), (19.7) o (19.8), puede calcularse la resistencia nominal a la flexión con métodos y ecuaciones que corresponden en forma directa a los utilizados para vigas

corrientes de concreto reforzado. Para secciones transversales rectangulares o para secciones con aletas, como las de las vigas I o T, donde la altura del bloque de esfuerzos es igual o menor que el espesor promedio del ala, la resistencia nominal a la flexión es

$$M_n = A_{ps} f_{ps} \left(d_p - \frac{a}{2}\right) \tag{19.9}$$

donde

$$a = \frac{A_{ps} f_{ps}}{0.85 f_c' b} \tag{19.10}$$

Las ecuaciones (19.9) y (19.10) pueden combinarse de la siguiente manera:

$$M_n = \rho_p f_{ps} b d_p^2 \left(1 - 0.588 \frac{\rho_p f_{ps}}{f_c'}\right) \tag{19.11}$$

En todos los casos, la *resistencia de diseño a la flexión* se toma igual a ϕM_n, donde $\phi = 0.90$, como es usual para flexión.

Si la altura del bloque de esfuerzos excede el espesor promedio del ala, el método para calcular la resistencia a la flexión es exactamente análogo al utilizado para vigas corrientes I o T de concreto reforzado. Para efectos del cálculo, toda el área de acero a tensión preesforzado se divide en dos partes. La primera parte A_{pf}, que actúa a un esfuerzo f_{ps}, suministra una fuerza de tensión que balancea la compresión en las partes sobresalientes del ala. Así,

$$A_{pf} = 0.85 \frac{f_c'}{f_{ps}} (b - b_w) h_f \tag{19.12}$$

El área restante de acero de preesfuerzo

$$A_{pw} = A_{ps} - A_{pf} \tag{19.13}$$

proporciona la tensión que balancea la compresión en el alma. El momento resistente total es la suma de las contribuciones de los dos pares de fuerzas:

$$M_n = A_{pw} f_{ps} \left(d_p - \frac{a}{2}\right) + A_{pf} f_{ps} \left(d_p - \frac{h_f}{2}\right) \tag{19.14a}$$

o

$$M_n = A_{pw} f_{ps} \left(d_p - \frac{a}{2}\right) + 0.85 f_c' (b - b_w) h_f \left(d_p - \frac{h_f}{2}\right) \tag{19.14b}$$

en la cual

$$a = \frac{A_{pw} f_{ps}}{0.85 f_c' b_w} \tag{19.15}$$

Como antes, la resistencia de diseño se toma como ϕM_n, donde $\phi = 0.90$.

Si después de diseñar una viga preesforzada mediante los métodos elásticos para las cargas de servicio, ésta no tiene la resistencia adecuada que suministre el margen de seguridad requerido para el estado de sobrecargas mayoradas, pueden adicionarse barras no preesforzadas en el lado de tensión que trabajarán en combinación con el acero preesforzado para proporcionar la resistencia necesaria. Es factible suponer que este acero no preesforzado, con área A_s, actúa a su esfuerzo de fluencia f_y, para contribuir al momento último con una fuerza de tensión igual a $A_s f_y$. El lector debe consultar el Código ACI 18.7 y el comentario ACI 18.7 donde se presentan las ecuaciones para esfuerzos en el acero preesforzado en la falla y para la resistencia a la flexión; éstas son extensiones directas de las ecuaciones establecidas anteriormente.

c. Límites del refuerzo

Para vigas corrientes de concreto reforzado se establece un *límite superior* en la cuantía de acero a tensión igual a 0.75 veces la cuantía balanceada de acero, con el fin de garantizar que, en caso de que ocurra la falla a flexión, ésta sea una falla dúctil con amplio agrietamiento y grandes deflexiones antes de que se llegue al colapso. En el Código ACI 18.8.1 se presenta la correspondiente disposición para vigas preesforzadas. Planteada de manera muy sencilla, ésta es:

$$\frac{0.85a}{d_p} \leq 0.36\beta_1 \tag{19.16}$$

Si la viga preesforzada no cumple el requisito de la ecuación (19.16), se considera *sobreesforzada* y deben desarrollarse ecuaciones alternas para calcular la resistencia a la flexión (ver la referencia 19.1).

Para vigas corrientes de concreto reforzado se impone una *cuantía mínima de acero a tensión* con el fin de que la viga sea segura contra una falla súbita después de la formación de las grietas de flexión. Para vigas preesforzadas, ante la misma inquietud el Código ACI 18.8.3 exige que el refuerzo total a tensión debe estar en capacidad de soportar una carga mayorada de al menos 1.2 veces la carga de agrietamiento de la viga, calculada con base en un módulo de rotura de $7.5\sqrt{f'_c}$.

d. Refuerzo adherido mínimo

Para controlar el agrietamiento en vigas y en losas preesforzadas en una dirección con *tendones no adheridos*, se debe adicionar un poco de refuerzo adherido en forma de barras no preesforzadas, uniformemente distribuidas en la zona de tensión y tan cerca como sea posible de la cara de tensión. De acuerdo con el Código ACI 18.9.2, la cantidad mínima de este refuerzo es

$$A_s = 0.004A \tag{19.17}$$

donde A es el área de la parte de la sección transversal entre la cara a tensión por flexión y el centroide de la sección transversal bruta de concreto.

Ejemplo 19.2. Resistencia a la flexión de una viga I pretensada. La viga I preesforzada que aparece en sección transversal en la figura 19.13, se pretensiona utilizando siete torones corrientes de grado 250 y con diámetro de $\frac{1}{2}$ pulg, que se han sometido a tratamiento de revenido para liberarlos de esfuerzos residuales y que soportan un preesfuerzo efectivo de f_{pe} = 143 klb/pulg^2. La resistencia del concreto es f'_c = 4000 lb/pulg^2. Calcule la resistencia de diseño de la viga.

Solución. El preesfuerzo efectivo en los torones de 143 klb/pulg^2 está muy por encima de 0.50 × 250 = 125 klb/pulg^2, confirmando que las ecuaciones aproximadas del Código ACI son aplicables. La cuantía de acero a tensión es

$$\rho_p = \frac{1.008}{12 \times 17.19} = 0.0049$$

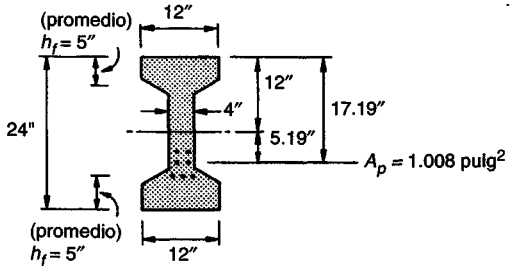


FIGURA 19.13
Viga postensada del ejemplo 19.2.

y el esfuerzo en el acero f_{ps} cuando la viga falla a flexión se encuentra a partir de la ecuación (19.6) y es igual a

$$f_{ps} = 250\left(1 - \frac{0.40}{0.85}\frac{0.0049 \times 250}{4}\right) = 214 \text{ klb/pulg}^2$$

En seguida es necesario verificar si la altura del bloque de esfuerzos es mayor o menor que el espesor promedio del ala de 5 pulg. Bajo el supuesto de que éste no es mayor que el espesor del ala, puede utilizarse la ecuación (19.10):

$$a = \frac{1.008 \times 214}{0.85 \times 4 \times 12} = 5.29 \text{ pulg}$$

De este cálculo tentativo se concluye que el valor de a excede en efecto el valor de h, de modo que el cálculo tentativo no es válido y deben utilizarse las ecuaciones para elementos con alas. El acero que actúa con las aletas sobresalientes se encuentra a partir de la ecuación (19.12) y es igual a

$$A_{pf} = \frac{0.85 \times 4(12 - 4)5}{214} = 0.636 \text{ pulg}^2$$

y a partir de la ecuación (19.13),

$$A_{pw} = 1.008 - 0.636 = 0.372 \text{ pulg}^2$$

La altura real del bloque de esfuerzos se encuentra con la ecuación (19.15):

$$a = \frac{0.372 \times 214}{0.85 \times 4 \times 4} = 5.85 \text{ pulg}$$

Ahora se realiza una verificación para determinar si la viga puede considerarse subforzada. A partir de la ecuación (19.16),

$$\frac{0.85 \times 5.85}{17.19} = 0.289$$

Este valor es menor que $0.36\beta_1 = 0.36 \times 0.85 = 0.306$, confirmando que esta viga puede considerarse una viga preesforzada y subreforzada. La resistencia nominal a la flexión, a partir de la ecuación (19.14*b*), es

$$\begin{aligned} M_n &= 0.372 \times 214(17.19 - 2.93) + 0.85 \times 4(12 - 4)5(17.19 - 2.50) \\ &= 3133 \text{ klb-pulg} = 261 \text{ klb-pie} \end{aligned}$$

y, finalmente, la resistencia de diseño es $\phi M_n = 235$ klb-pie

19.8 PREESFUERZO PARCIAL

El objetivo del preesfuerzo en los primeros desarrollos del concreto preesforzado era el de eliminar totalmente los esfuerzos de tensión en el concreto para las cargas de servicio. Este tipo de diseño, en el cual el límite del esfuerzo de tensión para las cargas de servicio es $f_{ts} = 0$, se llama *preesfuerzo total.*

Aunque el preesfuerzo total ofrece muchas ventajas con respecto a la construcción no preesforzada, pueden surgir algunos problemas. Vigas altamente preesforzadas, en particular aquéllas en las cuales se aplicará rara vez la carga viva total, pueden tener deflexiones hacia arriba excesivamente grandes o contraflechas, que aumentan con el tiempo por el flujo plástico del concreto ante la fuerza de preesfuerzo excéntrica. Las vigas totalmente preesforzadas pueden presentar también tendencia a un acortamiento longitudinal severo produciendo grandes fuerzas de restricción, a menos que se tomen precauciones especiales que permitan el libre movimiento en uno de los extremos de cada luz. Si se permite que ocurra el acortamiento en forma libre, las

pérdidas de preesfuerzo por la deformación elástica y por el flujo plástico pueden ser grandes. Más aún, si las vigas altamente preesforzadas se sobrecargan hasta la falla, pueden hacerlo de manera súbita y de modo frágil, con poca advertencia antes del colapso.

En la actualidad se reconocen las ventajas de un *preesfuerzo parcial*, que permite cierto nivel de esfuerzos de tensión por flexión y un nivel limitado de agrietamiento con la carga de servicio total, la cual se aplicará probablemente con poca frecuencia. A menudo, muchas vigas soportan sólo la carga muerta durante la mayor parte del tiempo o la carga muerta más apenas una parte de la carga viva de servicio. En estas condiciones, una viga parcialmente preesforzada no estará sometida normalmente a tensión por flexión y las grietas que se formen en ocasiones, cuando la carga viva total esté en su sitio, se cerrarán por completo cuando se retire esta carga viva. Las grietas controladas no son más objetables en estructuras de concreto preesforzado que en estructuras de concreto reforzado. Con el preesfuerzo parcial se evitan la contraflecha excesiva y el acortamiento axial problemático. En caso de que ocurra una sobrecarga, se presentará una advertencia amplia del sobreesfuerzo, con agrietamiento extensivo y altas deflexiones (ver las referencias 19.9 a 19.11).

Aunque la cantidad de acero de preesfuerzo se reduce en las vigas parcialmente preesforzadas en comparación con las vigas totalmente preesforzadas, debe mantenerse aún un margen apropiado de seguridad y, para alcanzar la resistencia necesaria a la flexión, las vigas parcialmente preesforzadas requerirán refuerzo adicional a tensión en forma de barras de refuerzo corrientes no preesforzadas. De hecho, las vigas parcialmente preesforzadas se definen con frecuencia como vigas en las cuales: (*a*) se permite el agrietamiento por flexión para la carga total de servicio, y (*b*) el refuerzo principal a tensión por flexión incluye tanto acero preesforzado como no preesforzado. Los análisis indican, y los ensayos lo confirman, que este acero no preesforzado está sometido en la falla a flexión a un esfuerzo igual a f_y.

La mayor parte de las especificaciones de diseño permiten la utilización de vigas parcialmente preesforzadas. Aunque el Código ACI no menciona el preesfuerzo parcial de manera explícita, el Código ACI 18.4.2 permite un esfuerzo de tensión por flexión de $6\sqrt{f'_c}$ en el diseño corriente y una tensión por *flexión nominal* de $12\sqrt{f'_c}$, muy por encima del módulo de rotura usual, siempre y cuando las deflexiones se calculen con métodos que tengan en cuenta el agrietamiento y si se aumentan los requisitos de recubrimiento del concreto. También, la sección 18.4.3 del Código ACI incluye la posibilidad de exceder estos esfuerzos si se demuestra mediante ensayo o análisis que el comportamiento no se afectará. Más aún, en el Código ACI y en su comentario, las ecuaciones para resistencia a flexión tienen en cuenta de manera explícita la presencia del acero a tensión por flexión tanto del no preesforzado como del preesforzado.

Independientemente de las ventajas técnicas, también existen ventajas económicas significativas que se asocian al preesfuerzo parcial. Las barras de refuerzo son menos costosas que el acero de preesfuerzo de alta resistencia a la tensión y los costos de mano de obra para la colocación de las barras son en general menores que los costos asociados con la colocación y el tensionamiento de los tendones.

La selección de un grado adecuado de preesfuerzo depende de diferentes factores. Éstos incluyen la naturaleza de la carga (por ejemplo, puentes de carreteras o de líneas férreas, bodegas de almacenamiento, etc.), la relación de la carga viva a la muerta, la frecuencia de la carga total y la presencia de un ambiente corrosivo.

En la actualidad, la práctica más común en los Estados Unidos consiste en limitar la tensión para las cargas de servicio a $12\sqrt{f'_c}$, pero en Europa, particularmente en Suiza y en Alemania, se utiliza en mucho mayor grado el preesfuerzo parcial. El criterio consiste en que no se permite tensión bajo la carga muerta total. En este caso, la viga presentará algún agrietamiento cuando se coloca apenas un pequeño porcentaje de la carga viva y, para la carga viva total, los esfuerzos se determinan con base en un análisis de la sección fisurada, al igual que para el concreto reforzado (ver las referencias 19.12 y 19.13).

19.9 DISEÑO A FLEXIÓN CON BASE EN LÍMITES EN EL ESFUERZO DEL CONCRETO

Al igual que para el concreto reforzado, los problemas en concreto preesforzado pueden ser de revisión y de diseño. Para los primeros, en los cuales se conocen las cargas aplicadas, la sección transversal del concreto, el área de acero y la magnitud y punto de aplicación de la fuerza de preesfuerzo, las ecuaciones (19.1) a (19.4) permiten el cálculo directo de los esfuerzos resultantes en el concreto. Las ecuaciones de la sección 19.7 permiten estimar la resistencia a flexión. Sin embargo, si el problema consiste en determinar las dimensiones de la sección de concreto, el área de acero, la localización del centroide y la magnitud del preesfuerzo, dadas las cargas, los esfuerzos límite y la resistencia requerida, el problema se complica por las muchas variables interrelacionadas.

Existen al menos tres métodos prácticos para realizar el diseño a flexión de un elemento de concreto preesforzado. Algunos ingenieros prefieren suponer una sección de concreto, calcular la fuerza de preesfuerzo que se requiere y las excentricidades para el estado de carga que probablemente controla, luego verificar los esfuerzos en todos los estados utilizando las ecuaciones anteriores y finalmente verificar la resistencia a la flexión. La sección tentativa se modifica entonces, si es necesario. Para el caso en que la viga se debe seleccionar entre una cantidad limitada de formas estándares, como ocurre a menudo para luces cortas y cargas corrientes, éste es posiblemente el mejor procedimiento. Para luces más largas se puede lograr un diseño más efectivo al dimensionar la sección transversal de manera que los límites especificados para los esfuerzos del concreto de la tabla 19.2 se cumplan con mucha precisión. Esta sección transversal, cercana a la "ideal" desde el punto de vista de los esfuerzos límite, puede luego modificarse para cumplir requisitos de funcionamiento (por ejemplo, suministrando un ala superior más ancha para conformar el tablero de un puente) o para cumplir requisitos de resistencia si es necesario. En esta sección se desarrollarán las ecuaciones para facilitar este enfoque. Un tercer método de diseño consiste en balancear las cargas, utilizando el concepto de cargas equivalentes (ver la sección 19.2*b*). Se selecciona una sección tentativa, después se escogen la fuerza de preesfuerzo y el perfil del tendón para proporcionar fuerzas hacia arriba que balanceen justo una carga especificada. Si es necesario se pueden hacer las modificaciones del caso para satisfacer los límites de los esfuerzos o los requisitos de resistencia. Este tercer método se desarrollará en la sección 19.12.

Con relación a los esfuerzos admisibles en el concreto para los estados límite se establece la siguiente nomenclatura:

f_{ci} = esfuerzo admisible a compresión inmediatamente después de la transferencia
f_{ti} = esfuerzo admisible a tensión inmediatamente después de la transferencia
f_{cs} = esfuerzo admisible a compresión para las cargas de servicio después de ocurridas todas las pérdidas
f_{ts} = esfuerzo admisible a tensión para las cargas de servicio después de todas las pérdidas

Los valores de estos esfuerzos límite se establecen normalmente en la especificación (ver la tabla 19.2).

a. Vigas con excentricidad variable

Para una viga común en la cual se permite que varíe la excentricidad del tendón a lo largo de la luz, las distribuciones de esfuerzos de flexión en el concreto en la sección de máximo momento se ilustran en la figura 19.14*a*. La fuerza de preesfuerzo excéntrica, que tiene un valor inicial de P_i, produce la distribución lineal (1). Debido a la contraflecha hacia arriba de la viga que ocurre a medida que se aplica esa fuerza, el peso propio del elemento actúa en forma inmediata, se superponen los esfuerzos de flexión resultantes del momento M_o, y la distribución (2) es la primera que se alcanza en realidad. En esta etapa, la tensión en la superficie superior no debe exceder f_{ti} y la compresión en la superficie inferior no debe exceder f_{ci}, como se sugiere en la figura 19.14*a*.

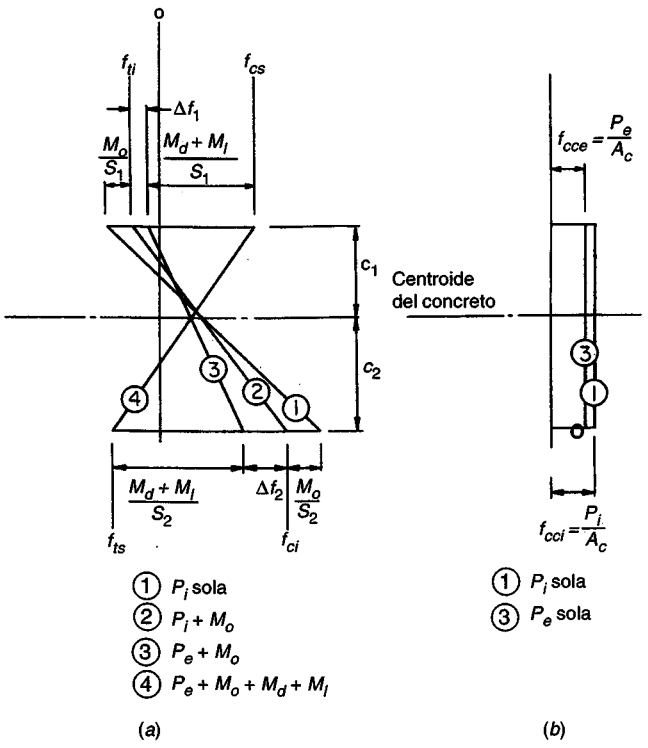


FIGURA 19.14
Distribuciones de esfuerzos de flexión en vigas con excentricidad variable: (*a*) sección de momento máximo; (*b*) sección en el apoyo.

Se supondrá que todas las pérdidas ocurren en esta etapa y que la distribución de esfuerzos cambia de modo gradual hasta la distribución (3). Las pérdidas producen una reducción de tensión en una cantidad Δf_1 en la superficie superior y una reducción de la compresión en una cantidad Δf_2 en la superficie inferior.

A medida que se introducen el momento de la carga muerta superpuesta M_d y el de la carga viva de servicio M_l, los esfuerzos de flexión asociados, al superponerse con los esfuerzos ya presentes, producen la distribución (4). En este estado, la tensión en la superficie inferior no debe ser mayor que f_{ts}, y la compresión en la parte superior de la sección no debe exceder f_{cs}, como aparece.

Los requisitos para los respectivos módulos de la sección S_1 y S_2 con relación a las superficies superior e inferior, son

$$S_1 \geq \frac{M_d + M_l}{f_{1r}} \qquad (a)$$

$$S_2 \geq \frac{M_d + M_l}{f_{2r}} \qquad (b)$$

donde los intervalos de esfuerzos disponibles f_{1r} y f_{2r} en las caras superior e inferior pueden calcularse a partir de los límites especificados de esfuerzos f_{ti}, f_{cs}, f_{ts} y f_{ci}, una vez que se conocen los cambios de esfuerzos Δf_1 y Δf_2, asociados con las pérdidas del preesfuerzo.

La relación de efectividad R se define como

$$R = \frac{P_e}{P_i} \qquad (19.18)$$

Así, la pérdida en la fuerza de preesfuerzo es

$$P_i - P_e = (1 - R)P_i \qquad (19.19)$$

Los cambios de esfuerzos en las caras superior e inferior, Δf_1 y Δf_2, a medida que ocurren las pérdidas, son iguales a $(1-R)$ veces los esfuerzos correspondientes debidos a la fuerza de preesfuerzo inicial P_i actuando sola:

$$\Delta f_1 = (1 - R)\left(f_{ti} + \frac{M_o}{S_1}\right) \tag{c}$$

$$\Delta f_2 = (1 - R)\left(-f_{ci} + \frac{M_o}{S_2}\right) \tag{d}$$

donde Δf_1 es una reducción de la tensión en la superficie superior y Δf_2 es una reducción de la compresión en la superficie inferior†. Así que, los intervalos disponibles de esfuerzos a medida que se aplican los momentos de las cargas superpuestas $M_d + M_l$ son

$$\begin{aligned} f_{1r} &= f_{ti} - \Delta f_1 - f_{cs} \\ &= Rf_{ti} - (1 - R)\frac{M_o}{S_1} - f_{cs} \end{aligned} \tag{e}$$

y

$$\begin{aligned} f_{2r} &= f_{ts} - f_{ci} - \Delta f_2 \\ &= f_{ts} - Rf_{ci} - (1 - R)\frac{M_o}{S_2} \end{aligned} \tag{f}$$

El valor mínimo aceptable de S_1 se establece entonces así:

$$S_1 \geq \frac{M_d + M_l}{Rf_{ti} - (1 - R)\dfrac{M_o}{S_1} - f_{cs}}$$

o

$$S_1 \geq \frac{(1 - R)M_o + M_d + M_l}{Rf_{ti} - f_{cs}} \tag{19.20}$$

De manera similar, el valor mínimo de S_2 es

$$S_2 \geq \frac{(1 - R)M_o + M_d + M_l}{f_{ts} - Rf_{ci}} \tag{19.21}$$

Es necesario seleccionar la sección transversal para proporcionar al menos estos valores de S_1 y S_2. Además, puesto que $I_c = S_1c_1 = S_2c_2$, el eje centroidal debe localizarse de modo que

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{S_2}{S_1} \tag{g}$$

o en términos de la altura total de la sección $h = c_1 + c_2$

$$\frac{c_1}{h} = \frac{S_2}{S_1 + S_2} \tag{19.22}$$

† Observe que los límites de esfuerzos, como f_{ti} y otros puntos específicos a lo largo del eje de esfuerzos, se consideran cantidades con signo, mientras que los cambios de esfuerzos como M_o/S_1 y Δf_2 se toman como valores absolutos.

A partir de la figura 19.14*a*, el esfuerzo centroidal en el concreto en las condiciones iniciales está determinado por

$$f_{cci} = f_{ti} - \frac{c_1}{h}(f_{ti} - f_{ci}) \tag{19.23}$$

La fuerza inicial de preesfuerzo se obtiene multiplicando el valor del esfuerzo centroidal del concreto por el área de la sección transversal de concreto A_c.

$$P_i = A_c f_{cci} \tag{19.24}$$

La excentricidad de la fuerza de preesfuerzo puede encontrarse teniendo en cuenta los esfuerzos de flexión impuestos por el momento flector $P_i e$. Con referencia a la figura 19.14, el esfuerzo de flexión en la superficie superior de la viga que resulta de la fuerza de preesfuerzo excéntrica actuando sola es

$$\frac{P_i e}{S_1} = (f_{ti} - f_{cci}) + \frac{M_o}{S_1} \tag{h}$$

a partir de lo cual, la excentricidad requerida es

$$e = (f_{ti} - f_{cci})\frac{S_1}{P_i} + \frac{M_o}{P_i} \tag{19.25}$$

Para resumir, el proceso de diseño para determinar la mejor sección transversal, la fuerza de preesfuerzo y la excentricidad requeridas con base en límites en los esfuerzos es el siguiente: los módulos elásticos de la sección que se requieren con respecto a las superficies superior e inferior del elemento se encuentran a partir de las ecuaciones (19.20) y (19.21) localizando el eje centroidal mediante la ecuación (19.22). Las dimensiones del concreto se seleccionan para satisfacer estos requisitos tan cerca como sea posible. El esfuerzo centroidal del concreto para esta sección ideal se determina mediante la ecuación (19.23), la fuerza inicial necesaria de preesfuerzo se encuentra con la ecuación (19.24) y su excentricidad mediante la ecuación (19.25).

En situaciones prácticas, la sección seleccionada de concreto tendría en muy pocos casos los valores requeridos exactos de S_1 y S_2, determinados con este método, y el centroide del concreto no estará en forma exacta en el nivel teóricamente ideal. El redondeo hacia arriba en las dimensiones del concreto, el proveer alas anchas por razones funcionales o la utilización de formas estandarizadas de la sección transversal llevarán normalmente a obtener un elemento cuyas propiedades de la sección exceden los requisitos mínimos. En tal caso, los esfuerzos en el concreto, a medida que el elemento pasa de un estado sin carga hacia otro en el que actúa la carga de servicio total, permanecerán dentro de los límites admisibles pero no se llegará a los esfuerzos límite exactos. Una cantidad infinita de combinaciones de fuerzas de preesfuerzo y excentricidades podrán satisfacer los requisitos. Por lo general, el diseño más económico es aquel que requiere el menor valor de la fuerza de preesfuerzo y la máxima excentricidad práctica.

Las distribuciones de esfuerzos de la figura 19.14*a*, en las cuales se basan las ecuaciones de diseño, son aplicables en la sección de momento máximo del elemento. Para otras secciones, M_o es menor y, en consecuencia, la excentricidad del preesfuerzo o la fuerza deben reducirse para no exceder los límites en los esfuerzos f_{ti} y f_{ci}. En muchos casos, la excentricidad del tendón se reduce hasta cero en las secciones en los apoyos, donde todos los momentos que genera la carga transversal son nulos; en este caso, se obtienen las distribuciones de esfuerzos de la figura 19.14*b*. El esfuerzo en el concreto es uniforme e igual al valor centroidal f_{cci} en condiciones de preesfuerzo inicial y a f_{cce} después de ocurridas las pérdidas.

Ejemplo 19.3. Diseño de una viga con tendones de excentricidad variable. Una viga postensada debe soportar una carga viva de 1000 lb/pie y una carga muerta superpuesta de 500 lb/pie, además de su peso propio, sobre una luz simple de 40 pies. Se utilizará concreto de densidad normal con una resis-

tencia de diseño de $f'_c = 6000$ lb/pulg^2. Se estima que en el momento de la transferencia, el concreto habrá alcanzado el 70 por ciento de su resistencia última, o sea, 4200 lb/pulg^2. Las pérdidas dependientes del tiempo pueden suponerse iguales al 15 por ciento del preesfuerzo inicial, con lo que se obtiene una relación de efectividad de 0.85. Determine las dimensiones requeridas para el concreto, la magnitud de la fuerza de preesfuerzo y la excentricidad del centroide del acero con base en los límites de esfuerzos del ACI establecidos en las secciones 19.4 y 19.5.

Solución. Con relación a la tabla 19.2, se obtienen los siguientes límites en los esfuerzos:

$$f_{ci} = -0.60 \times 4200 = 2520 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_{ti} = 3\sqrt{4200} = +195 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_{cs} = 0.60 \times 6000 = -3600 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_{ts} = 6\sqrt{6000} = +465 \text{ lb/pulg}^2$$

El peso propio de la viga principal se estimará igual a 250 lb/pie. Los momentos que produce la carga transversal son

$$M_o = \frac{1}{8} \times 0.250 \times 40^2 = 50 \text{ klb-pie}$$
$$M_d + M_l = \frac{1}{8} \times 1.500 \times 40^2 = 300 \text{ klb-pie}$$

Los módulos requeridos de la sección respecto a las superficies superior e inferior de la viga de concreto se encuentran a partir de las ecuaciones (19.20) y (19.21):

$$S_1 \geq \frac{(1-R)M_o + M_d + M_l}{Rf_{ti} - f_{cs}} = \frac{(0.15 \times 50 + 300)12{,}000}{0.85 \times 195 + 3600} = 980 \text{ pulg}^3$$
$$S_2 \geq \frac{(1-R)M_o + M_d + M_l}{f_{ts} - Rf_{ci}} = \frac{(0.15 \times 50 + 300)12{,}000}{465 + 0.85 \times 2520} = 1415 \text{ pulg}^3$$

Los valores obtenidos para S_1 y S_2 sugieren la selección de una sección asimétrica como la más apropiada. Sin embargo, se selecciona una sección simétrica por simplicidad y para garantizar un área de compresión suficiente para la resistencia a flexión. La sección en forma de I con altura de 28 pulg como aparece en la figura 19.15*a* cumplirá estos requisitos y tiene las siguientes propiedades:

$$I_c = 19{,}904 \text{ pulg}^4$$
$$S = 1422 \text{ pulg}^3$$
$$A_c = 240 \text{ pulg}^2$$
$$r^2 = 82.9 \text{ pulg}^2$$
$$w_o = 250 \text{ lb/pie lineal (como se supuso)}$$

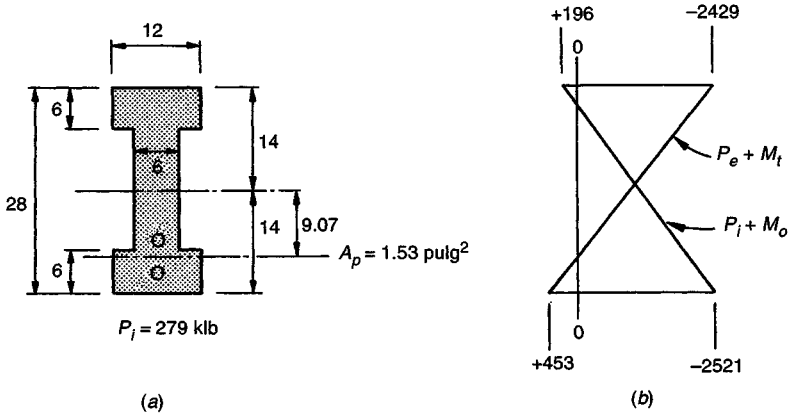


FIGURA 19.15
Ejemplo de diseño de una viga con tendones de excentricidad variable: (*a*) dimensiones de la sección transversal; (*b*) esfuerzos en el concreto en el centro de la luz.

En seguida, se determina el esfuerzo centroidal del concreto a partir de la ecuación (19.23):

$$f_{cci} = f_{ti} - \frac{c_1}{h}(f_{ti} - f_{ci}) = 195 - \frac{1}{2}(195 + 2520) = -1163 \text{ lb/pulg}^2$$

y a partir de la ecuación (19.24), la fuerza de preesfuerzo inicial es

$$P_i = A_c f_{cci} = 240 \times 1.163 = 279 \text{ klb}$$

A partir de la ecuación (19.25), la excentricidad requerida del tendón en la sección de máximo momento de la viga es

$$e = (f_{ti} - f_{cci})\frac{S_1}{P_i} + \frac{M_o}{P_i} = (195 + 1163)\frac{1422}{279{,}000} + \frac{50 \times 12{,}000}{279{,}000}$$
$$= 9.07 \text{ pulg}$$

Para las otras secciones a lo largo de la luz, la excentricidad se reducirá con el fin de lograr que los límites establecidos de esfuerzos en el concreto no sean sobrepasados.

La fuerza de preesfuerzo inicial requerida de 279 klb se suministrará mediante tendones conformados por torones de baja relajación grado 270, con un diámetro de $\frac{1}{2}$ pulg (ver la sección 2.16). La resistencia a la tensión mínima es $f_{pu} = 270$ klb/pulg^2 y la resistencia a la fluencia puede tomarse como $f_{py} = 0.90 \times 270 = 243$ klb/pulg^2. De acuerdo con el Código ACI (ver la sección 19.4), el esfuerzo admisible en el torón inmediatamente después de la transferencia no debe exceder $0.82f_{py} = 199$ klb/pulg^2 o $0.74f_{pu} = 200$ klb/pulg^2. El primer criterio controla en este caso. El área requerida de acero de preesfuerzo es

$$A_p = \frac{279}{199} = 1.40 \text{ pulg}^2$$

El área de la sección transversal de un torón de $\frac{1}{2}$ pulg de diámetro es 0.153 pulg^2; por tanto, la cantidad requerida de torones es

$$\text{Número de torones} = \frac{1.40}{0.153} = 9.2$$

Se utilizarán dos tendones de cinco torones, como se muestra en la figura 19.15*a*, cada uno sometido a una fuerza de 139.5 klb.

Es buena práctica verificar los cálculos para confirmar que los límites en los esfuerzos no se excedan en los estados críticos de carga. Los esfuerzos en el concreto, para las superficies superior e inferior, producidos en este caso por las cargas actuando separadamente son:

$$P_i: f_1 = -\frac{279{,}000}{240}\left(1 - \frac{9.07 \times 14}{82.9}\right) = +618 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -\frac{279{,}000}{240}\left(1 + \frac{9.07 \times 14}{82.9}\right) = -2943 \text{ lb/pulg}^2$$

$$P_e: f_1 = 0.85 \times 618 = 525 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = 0.85(-2943) = -2501 \text{ lb/pulg}^2$$

$$M_o: f_1 = -\frac{50 \times 12{,}000}{1422} = -422 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = +422 \text{ lb/pulg}^2$$

$$M_d + M_l: f_1 = -\frac{300 \times 12{,}000}{1422} = -2532 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = +2532 \text{ lb/pulg}^2$$

Así, cuando se aplica la fuerza de preesfuerzo inicial de 279 klb y actúa el peso propio de la viga, los esfuerzos superior e inferior en el concreto en el centro de la luz son, respectivamente:

$$f_1 = +618 - 422 = +196 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = -2943 + 422 = -2521 \text{ lb/pulg}^2$$

Cuando la fuerza de preesfuerzo se reduce hasta su valor efectivo de 237 klb y se aplica la carga de servicio total, los esfuerzos en el concreto son:

$$f_1 = +525 - 422 - 2532 = -2429 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = -2501 + 422 + 2532 = +453 \text{ lb/pulg}^2$$

Estas distribuciones límite de los esfuerzos se ilustran en la figura 19.15*b*. La comparación con los esfuerzos límite especificados confirma que el diseño es satisfactorio.

b. Vigas con excentricidad constante

El método de diseño expuesto en la sección anterior se basa en las condiciones de esfuerzos en la sección de máximo momento de la viga, con el valor máximo de momento M_o, que resulta al aplicar el peso propio de manera inmediata. Si P_i y e se mantuvieran constantes a lo largo de la luz, que con frecuencia es conveniente en la construcción preesforzada pretensada, entonces los esfuerzos límite f_{ti} y f_{ci}, se excederían en otras secciones a lo largo de la luz donde el valor de M_o es menor que su valor máximo. Para evitar esta situación, la excentricidad constante debe ser menor que la de la ecuación (19.25). Su valor máximo está determinado por las condiciones en los apoyos de una luz sencilla, donde el valor de M_o es cero.

La figura 19.16 ilustra las distribuciones de esfuerzos de flexión en las secciones de los apoyos y en el centro de la luz para una viga con excentricidad constante. En este caso, los esfuerzos f_{ti} y f_{ci} no deben excederse cuando el momento que genera el preesfuerzo excéntrico actúe solo, como ocurre en los apoyos. Los cambios de esfuerzos Δf_1 y Δf_2 después de que ocurren las pérdidas son iguales a $(1 - R)$ veces los esfuerzos en las superficies superior e inferior, respectivamente, ocasionados únicamente por el preesfuerzo inicial:

$$\Delta f_1 = (1 - R)(f_{ti}) \qquad (a)$$

$$\Delta f_2 = (1 - R)(-f_{ci}) \qquad (b)$$

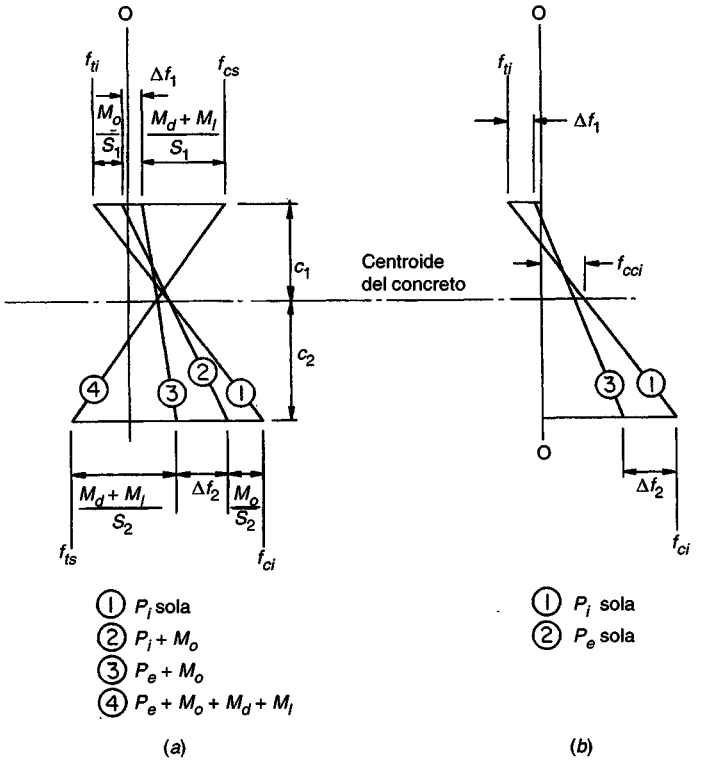


FIGURA 19.16
Distribuciones de esfuerzos de flexión en una viga con tendones de excentricidad constante: (*a*) sección de máximo momento; (*b*) sección en el apoyo.

En este caso, los intervalos disponibles de esfuerzos entre los esfuerzos límite, deben absorber el efecto de M_o, al igual que el de M_d y M_l, como se observa de la figura 19.16*a*, y son

$$\begin{aligned} F_{1r} &= f_{ti} - \Delta f_1 - f_{cs} \\ &= R f_{ti} - f_{cs} \end{aligned} \tag{c}$$

$$\begin{aligned} f_{2r} &= f_{ts} - f_{ci} - \Delta f_2 \\ &= f_{ts} - R f_{ci} \end{aligned} \tag{d}$$

y los requisitos referentes a los módulos de la sección son

$$S_1 \geq \frac{M_o + M_d + M_l}{R f_{ti} - f_{cs}} \tag{19.26}$$

$$S_2 \geq \frac{M_o + M_d + M_l}{f_{ts} - R f_{ci}} \tag{19.27}$$

El esfuerzo centroidal del concreto se encuentra con la ecuación (19.23) y la fuerza de preesfuerzo inicial mediante la ecuación (19.24) como antes. Sin embargo, la expresión para la excentricidad requerida es diferente. En este caso, con respecto a la figura 19.16*b*,

$$\frac{P_i e}{S_1} = f_{ti} - f_{cci} \tag{e}$$

a partir de lo cual la excentricidad requerida es

$$e = (f_{ti} - f_{cci}) \frac{S_1}{P_i} \tag{19.28}$$

Se observará una diferencia significativa entre las vigas con excentricidad variable y las que tienen excentricidad constante al comparar las ecuaciones (19.20) y (19.21) con las ecuaciones correspondientes (19.26) y (19.27). En el primer caso, el módulo de la sección que se requiere está controlado por los momentos superpuestos producidos por las cargas M_d y M_l. Casi todo el peso propio es soportado "gratis", es decir, sin aumentar los módulos de la sección o las fuerzas de preesfuerzo, mediante el simple recurso de incrementar la excentricidad a lo largo de la luz en una cantidad M_o/P_i. En el segundo caso, la excentricidad está controlada por las condiciones en los apoyos, donde M_o es cero, y el momento total M_o debido al peso propio debe incluirse al determinar el módulo de la sección. A pesar de esto, las vigas con excentricidad constante se utilizan a menudo por razones prácticas.

Ejemplo 19.4. Diseño de una viga con tendones de excentricidad constante. La viga del ejemplo anterior debe diseñarse utilizando tendones rectos con excentricidad constante. Los demás criterios de diseño son los mismos. En los apoyos se permite un esfuerzo de tensión temporal en el concreto de $6\sqrt{f'_{ci}} = 390$ lb/pulg^2.

Solución. Anticipando una viga un poco menos efectiva que la anterior, el estimativo de carga muerta se aumentará en este caso hasta 270 lb/pie lineal. El momento resultante M_o es 54 klb-pie. El momento debido a carga muerta superpuesta y carga viva es de 300 klb-pie como antes.

Utilizando las ecuaciones (19.26) y (19.27), los requisitos para los módulos de la sección son

$$S_1 \geq \frac{M_o + M_d + M_l}{R f_{ti} - f_{cs}} = \frac{(54 + 300)12{,}000}{0.85 \times 390 + 3600} = 1080 \text{ pulg}^3$$

$$S_2 \geq \frac{M_o + M_d + M_l}{f_{ts} - R f_{ci}} = \frac{(54 + 300)12{,}000}{465 + 0.85 \times 2520} = 1629 \text{ pulg}^3$$

De nuevo se seleccionará una sección simétrica. Las dimensiones de las alas y el ancho del alma se mantendrán inalteradas en comparación con el ejemplo anterior, pero en este caso se requiere una altura de viga de 30.5 pulg. Las dimensiones de la sección transversal aparecen en la figura 19.17*a*. Se obtienen las siguientes propiedades:

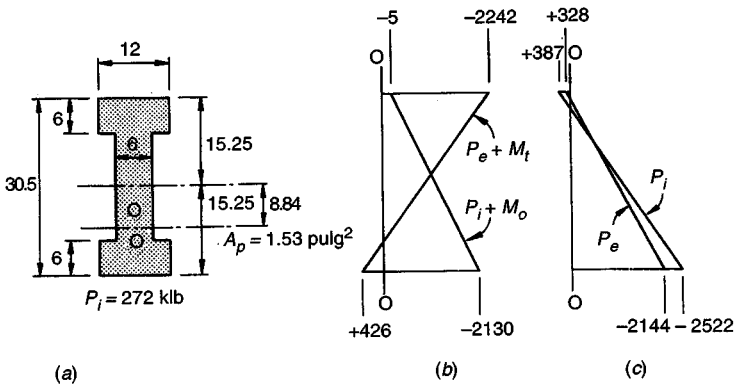


FIGURA 19.17
Ejemplo de diseño de una viga con tendones de excentricidad constante: (*a*) dimensiones de la sección transversal; (*b*) esfuerzos en el centro de la luz; (*c*) esfuerzos en los apoyos.

$$I_c = 25{,}207 \text{ pulg}^4$$
$$S = 1653 \text{ pulg}^3$$
$$A_c = 255 \text{ pulg}^2$$
$$r^2 = 98.9 \text{ pulg}^2$$
$$w_o = 266 \text{ lb/pie lineal (muy cerca al valor supuesto)}$$

El esfuerzo centroidal en el concreto, a partir de la ecuación (19.23), es

$$f_{cci} = f_{ti} - \frac{c_1}{h}(f_{ti} - f_{ci}) = 390 - \frac{1}{2}(390 + 2520) = -1065 \text{ lb/pulg}^2$$

y a partir de la ecuación (19.24), la fuerza de preesfuerzo inicial es

$$P_i = A_c f_{cci} = 255 \times 1.065 = 272 \text{ klb}$$

A partir de la ecuación (19.28), la excentricidad constante que se requiere es

$$e = (f_{ti} - f_{cci})\frac{S_1}{P_i} = (390 + 1065)\frac{1653}{272{,}000} = 8.84 \text{ pulg}$$

De nuevo se utilizarán dos tendones para suministrar la fuerza requerida, cada uno compuesto de múltiples torones de baja relajación grado 270, de $\frac{1}{2}$ pulg de diámetro. Considerando el máximo esfuerzo admisible en los torones o cables de 199 klb/pulg^2, el área de acero total requerida es

$$A_p = \frac{272}{199} = 1.37 \text{ pulg}^2$$

Se necesita un total de nueve torones. Por razones prácticas se utilizarán dos tendones como antes, pero en este caso sometidos a una fuerza de 136 klb.

Los cálculos se revisarán verificando los esfuerzos en el concreto en las partes superior e inferior de la viga para los estados críticos de carga. Las contribuciones de las componentes a los esfuerzos son:

$$P_i: f_1 = -\frac{272{,}000}{255}\left(1 - \frac{8.84 \times 15.25}{98.9}\right) = +387 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = -\frac{272{,}000}{255}\left(1 + \frac{8.84 \times 15.25}{98.9}\right) = -2522 \text{ lb/pulg}^2$$
$$P_e: f_1 = 0.85 \times 387 = +328 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = 0.85(-2522) = -2144 \text{ lb/pulg}^2$$
$$M_o: f_1 = -\frac{54 \times 12{,}000}{1653} = -392 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = +392 \text{ lb/pulg}^2$$
$$M_d + M_l: f_1 = -\frac{300 \times 12{,}000}{1653} = -2178 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = +2178 \text{ lb/pulg}^2$$

Al superponer las contribuciones apropiadas de esfuerzos se obtienen las distribuciones de esfuerzos en el concreto en el centro de la luz y en los apoyos que se ilustran en las figuras 19.17*b* y 19.17*c* respectivamente. Cuando la fuerza de preesfuerzo inicial de 272 klb actúa sola, como ocurre en los apoyos, los esfuerzos en las superficies superior e inferior son

$$f_1 = +387 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = -2522 \text{ lb/pulg}^2$$

Después de ocurridas las pérdidas, la fuerza de preesfuerzo se reduce a 231 klb y los esfuerzos en el apoyo se reducen en forma correspondiente. En el centro de la luz, el peso de la viga se superpone de modo inmediato y los esfuerzos que resultan de P_i más M_o son

$$f_1 = +387 - 392 = -5 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = -2522 + 392 = -2130 \text{ lb/pulg}^2$$

Cuando actúa la carga de servicio total junto con P_e, los esfuerzos en el centro de la luz son

$$f_1 = +328 - 392 - 2178 = -2242 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = -2144 + 392 + 2178 = +426 \text{ lb/pulg}^2$$

Si se comparan estos valores con los esfuerzos límite especificados, resulta evidente que el diseño es satisfactorio con respecto a los estados críticos de carga y a las secciones críticas.

19.10 SELECCIÓN DE LA FORMA

Una de las características especiales del diseño en concreto preesforzado es la libertad de seleccionar las proporciones y dimensiones de la sección transversal para ajustarse a los requisitos especiales del trabajo que se analiza. Se puede cambiar la altura del elemento, modificar el ancho del alma y variar los anchos y los espesores de las alas en forma independiente, para producir una viga con las proporciones casi ideales para determinado caso.

Algunas de las formas más comunes aparecen en la figura 19.18. Varias de éstas se han estandarizado y se producen en masa utilizando formaletas reutilizables de acero o fibra de vidrio; otras se dimensionan individualmente para trabajos grandes e importantes. La sección en doble T (ver la figura 19.18*a*) es probablemente la sección transversal más utilizada en la construcción preesforzada en los Estados Unidos. En ésta, se suministra una superficie plana entre 4 y 8 pies de ancho. El espesor de la losa y la altura del alma varían según los requerimientos. Luces hasta de 60 pies no son raras. La sección en forma de T sencilla (ver la figura 19.18*b*) resulta más apropiada para luces más largas, hasta de 120 pies, y para cargas más pesadas. La sección I (ver la figura 19.18*c*) se utiliza con frecuencia para luces de puentes y en vigas principales de cubiertas hasta de casi 120 pies,

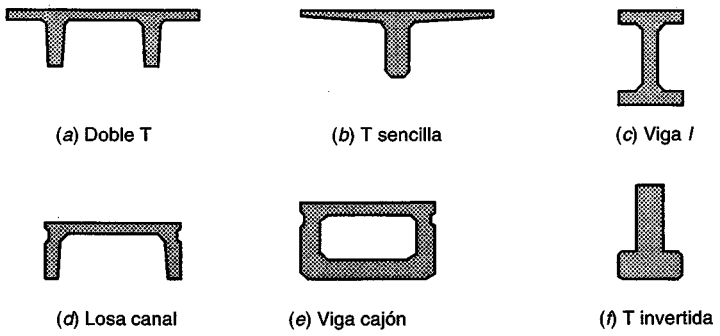


FIGURA 19.18
Secciones transversales típicas para vigas.

mientras que la losa canal (ver la figura 19.18*d*) es más adecuada para entrepisos de luces intermedias. La viga cajón (ver la figura 19.18*e*) resulta ventajosa para puentes de luces intermedias y largas. La sección T invertida (ver la figura 19.18*f*) proporciona bordes de apoyo para soportar los extremos de los elementos prefabricados del tablero que se extienden en la dirección perpendicular. Las plantas de prefabricación locales pueden suministrar catálogos de las formas disponibles.

Como se indicó anteriormente, la sección transversal puede ser simétrica o asimétrica. Una sección asimétrica es una buena selección (1) si los intervalos de esfuerzos disponibles f_{1r} y f_{2r} en las superficies superior e inferior no son los mismos; (2) si la viga debe suministrar una superficie plana y útil, al igual que ofrecer una capacidad de soporte de cargas; (3) si la viga se convierte en parte de una construcción compuesta, donde la losa vaciada en el sitio actúa junto con el alma prefabricada; o (4) si la viga debe proveer superficies de apoyo como en la figura 19.18*f*. Asimismo, las secciones en T proporcionan una resistencia a la flexión aumentada, puesto que el brazo interno del par resistente con la carga máxima de diseño es mayor que el de las secciones rectangulares.

En términos generales, las secciones en I, T y en cajón con almas y alas relativamente delgadas son más efectivas que los elementos con partes más gruesas. Sin embargo, varios factores limitan la ganancia en eficacia que se podría obtener de esta manera. Estos factores incluyen la inestabilidad de partes sobresalientes muy delgadas sometidas a compresión, la vulnerabilidad de partes delgadas expuestas a romperse durante el manejo (en caso de construcción prefabricada) y la dificultad práctica de vaciar concreto en elementos muy delgados. El diseñador también debe reconocer la necesidad de suministrar el espaciamiento y la protección de concreto adecuados para los tendones y anclajes, la importancia de los límites de la altura en la construcción y la necesidad de estabilidad lateral si la viga no está arriostrada contra pandeo por otros elementos (ver la referencia 19.14).

19.11 PERFILES DE LOS TENDONES

Las ecuaciones desarrolladas en la sección 19.9a para elementos con tendones de excentricidad variable establecen los requisitos para los módulos de la sección, la fuerza de preesfuerzo y la excentricidad en la sección de máximo momento del elemento. En otras secciones a lo largo de la luz, es necesario reducir la excentricidad del acero si no se desea exceder los límites en los esfuerzos del concreto para el estado en el que aún no se han aplicado las cargas (como alternativa, debe aumentarse la sección como se estableció en la sección 19.9b). De manera recíproca, existe una excentricidad mínima o un límite superior para el centroide del acero, para que los esfuerzos límite en el concreto no se excedan cuando la viga se encuentra en el estado de máxima carga de servicio.

Las ubicaciones límite para el centroide del acero de preesfuerzo en cualquier punto a lo largo de la luz se pueden establecer utilizando las ecuaciones (19.2) y (19.4), que dan los valores de los esfuerzos en el concreto, en las partes superior e inferior de la viga, para los respectivos estados sin carga y con carga de servicio. Los esfuerzos producidos por estos estados de carga deben compararse con los esfuerzos límite aplicables en un caso particular, como los límites de esfuerzos del Código ACI establecidos en la tabla 19.2. Esto permite obtener la excentricidad del tendón e como una función de la distancia x a lo largo de la luz.

Para indicar que tanto la excentricidad e como los momentos M_o o M_t son funciones de la distancia x desde el apoyo, éstos se escribirán como $e(x)$ y $M_o(x)$ o $M_t(x)$, respectivamente. Al plantear las desigualdades, resulta conveniente designar los esfuerzos de tensión como positivos y los esfuerzos de compresión como negativos. De esta manera, $+450 > -1350$ y $-600 > -1140$, por ejemplo.

Teniendo en cuenta inicialmente el estado sin carga, el esfuerzo de tensión en la parte superior de la viga no debe exceder f_{ti}. A partir de la ecuación (19.2*a*)

$$f_{ti} \geq -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{e(x)c_1}{r^2}\right) - \frac{M_o(x)}{S_1} \qquad (a)$$

Al despejar la máxima excentricidad, se obtiene

$$e(x) \leq \frac{f_{ti}S_1}{P_i} + \frac{S_1}{A_c} + \frac{M_o(x)}{P_i} \tag{19.29}$$

En la parte inferior de la viga sin carga, el esfuerzo no debe exceder la compresión inicial límite. A partir de la ecuación (19.2*b*)

$$f_{ci} \leq -\frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{e(x)c_2}{r^2}\right) + \frac{M_o(x)}{S_2} \tag{b}$$

por consiguiente, el segundo límite inferior para el centroide del acero es

$$e(x) \leq -\frac{f_{ci}S_2}{P_i} - \frac{S_2}{A_c} + \frac{M_o(x)}{P_i} \tag{19.30}$$

Si se tiene en cuenta ahora el elemento en el estado de máxima carga, pueden encontrarse los valores límite superiores para la excentricidad. A partir de la ecuación (19.4*a*)

$$f_{cs} \leq -\frac{P_e}{A_c}\left(1 - \frac{e(x)c_1}{r^2}\right) - \frac{M_t(x)}{S_1} \tag{c}$$

a partir de lo cual

$$e(x) \geq \frac{f_{cs}S_1}{P_e} + \frac{S_1}{A_c} + \frac{M_t(x)}{P_e} \tag{19.31}$$

y con la ecuación (19.4*b*)

$$f_{ts} \geq -\frac{P_e}{A_c}\left(1 + \frac{e(x)c_2}{r^2}\right) + \frac{M_t(x)}{S_2} \tag{d}$$

a partir de lo cual

$$e(x) \geq -\frac{f_{ts}S_2}{P_e} - \frac{S_2}{A_c} + \frac{M_t(x)}{P_e} \tag{19.32}$$

Con las ecuaciones (19.29) y (19.30) se establece el límite inferior para la excentricidad del tendón en puntos sucesivos a lo largo de la luz. Luego, con las ecuaciones (19.31) y (19.32) se establece el correspondiente límite superior; éste puede ser negativo indicando que, en ese sitio, el centroide del tendón puede estar por encima del centroide del concreto.

A menudo es conveniente dibujar la envolvente de los perfiles aceptables para el tendón, como se ha hecho en la figura 19.19 para un caso común en el cual tanto la carga muerta como la viva se encuentran uniformemente distribuidas. Cualquier centroide del tendón que caiga en forma completa dentro de la zona sombreada es satisfactorio desde el punto de vista de los límites de esfuerzos en el concreto. Debe hacerse énfasis en que sólo el centroide del tendón debe estar dentro de la zona sombreada; los cables individuales aparecen a menudo por fuera de esta zona.

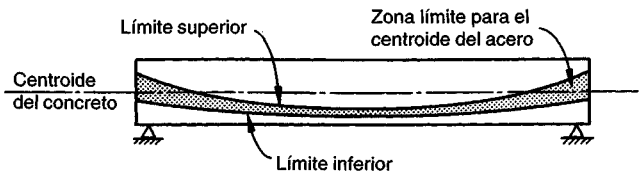


FIGURA 19.19
Zona límite típica para el centroide del acero de preesfuerzo.

El perfil del tendón utilizado en realidad es a menudo una curva parabólica o una catenaria en el caso de vigas postensadas. El ducto que contiene el acero de preesfuerzo se coloca con la forma deseada y se mantiene en esa posición amarrándolo con alambres al refuerzo transversal del alma, después de lo cual puede vaciarse el concreto. En vigas pretensadas, se utilizan con frecuencia los *tendones deflectados*. Los cables se sujetan hacia abajo en el centro, en los tercios o en los cuartos de la luz y hacia arriba en los extremos, para obtener una curva suave.

En casos prácticos, a menudo no es necesario elaborar el diagrama de la zona centroidal, como el de la figura 19.19. Al colocar el centroide en su ubicación conocida en el centro de la luz, en o cerca del centroide del concreto en los apoyos, y con una forma casi parabólica entre estos puntos de control, se asegura el cumplimiento de los requisitos de esfuerzos límite. Con vigas no prismáticas, con aquéllas en las cuales se emplea un eje centroidal curvo del concreto o con vigas continuas, los diagramas como el presentado en la figura 19.19 resultan de gran ayuda.

19.12 DISEÑO A FLEXIÓN CON BASE EN EL BALANCE DE CARGA

En la sección 19.2b se enfatizó que un cambio en la alineación de un tendón de preesfuerzo en una viga produce una fuerza vertical sobre la viga en ese sitio. El hecho de preesforzar un elemento con tendones curvos o deflectados tiene entonces el efecto de introducir un conjunto de cargas equivalentes, que pueden considerarse como otras cargas que actúan para encontrar los momentos o las deflexiones. Cada perfil particular de tendones produce su propio conjunto único de fuerzas equivalentes. Algunos perfiles típicos de tendones, con sus cargas equivalentes y diagramas correspondientes de momento se ilustraron en la figura 19.2. Ésta y la sección 19.2b deben revisarse cuidadosamente.

El concepto de carga equivalente ofrece un método alterno para determinar la fuerza de preesfuerzo y la excentricidad requeridas. La fuerza de preesfuerzo y el perfil del tendón pueden establecerse de manera que las cargas externas que van a actuar sean contrarrestadas exactamente por las fuerzas verticales producidas por el preesfuerzo. El resultado neto, para ese conjunto particular de cargas externas, es que la viga se somete sólo a compresión axial sin momento flector. La selección de la carga a balancear se deja a juicio del diseñador; con frecuencia, la carga que se selecciona es la suma del peso propio y de la carga muerta superpuesta.

El método de diseño descrito en esta sección fue introducido en los Estados Unidos por T. Y. Lin en 1963 y se conoce como el *método del balance de carga*. Los fundamentos del método se ilustrarán en el contexto de la viga simplemente apoyada y con carga uniforme de la figura 19.20*a*. La viga se debe diseñar para una carga balanceada que consta de su peso propio w_o, de la carga muerta superpuesta w_d y de una fracción de la carga viva designada como $k_b w_l$. Dado que la carga externa se distribuye de manera uniforme, resulta razonable adoptar un tendón de forma parabólica. Se puede demostrar que un tendón parabólico producirá una carga uniformemente distribuida hacia arriba igual a

$$w_p = \frac{8Py}{l^2} \tag{19.33}$$

donde P es la magnitud de la fuerza de preesfuerzo, y es la máxima flecha del tendón medida con respecto a una línea entre sus puntos extremos y l es la luz.

Si la carga hacia abajo iguala en forma exacta a la carga hacia arriba generada por el tendón, estas dos cargas se cancelan y no se producen esfuerzos flectores, como se indica en la figura 19.20*b*. Los esfuerzos de flexión que genera la excentricidad del preesfuerzo son iguales y opuestos a los esfuerzos de flexión producidos por las cargas externas. El esfuerzo neto resultante es una compresión uniforme f_a, igual a la producida por la fuerza axial $P \cos \theta$. Sin tener en cuenta los efectos dependientes del tiempo, la viga no presentará deflexiones verticales.

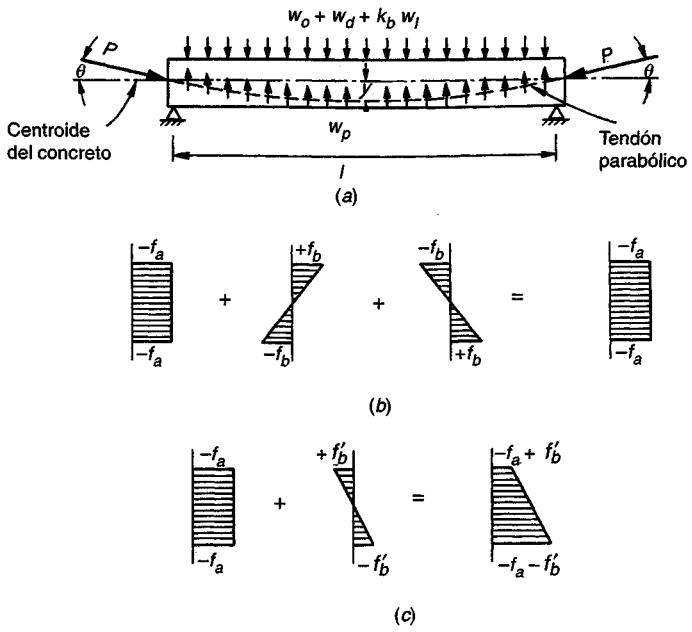


FIGURA 19.20
Balance de carga para una viga uniformemente cargada: (*a*) cargas externas y equivalentes; (*b*) esfuerzos en el concreto causados por los efectos axial y flector del preesfuerzo más la flexión producida por la carga externa balanceada; (*c*) esfuerzos en el concreto cuando se retira la carga $k_b w_l$.

Si la carga viva se retira o se incrementa, se presentarán esfuerzos de flexión y deflexiones producto de la parte *no balanceada* de la carga. Los esfuerzos que resultan de este estado de carga diferencial deben calcularse y superponerse a la compresión axial para obtener los esfuerzos netos en el estado no balanceado. Con referencia a la figura 19.20*c*, los esfuerzos de flexión f'_b que resultan al retirar parte de la carga viva, se superponen al esfuerzo de compresión uniforme f_a, que genera la combinación de la fuerza de preesfuerzo excéntrica y la carga total balanceada, para producir la distribución final de esfuerzos mostrada.

Cargas diferentes de las uniformemente distribuidas llevarán a la selección de otras configuraciones en el tendón. Por ejemplo, si la carga externa constara de una carga concentrada sencilla en el centro de la luz, se seleccionaría un tendón deflectado como el que se ilustra en la figura 19.20*a*, con excentricidad máxima en el centro de la luz y variando linealmente hasta una excentricidad nula en los apoyos. Para cargas concentradas aplicadas en los tercios, el diseñador seleccionaría un tendón deflectado en dichos puntos. Una viga en voladizo uniformemente cargada se esforzaría idealmente con un tendón en el cual la excentricidad varíe de manera parabólica, desde cero en el extremo libre hasta y en el apoyo empotrado, en cuyo caso la reacción hacia arriba del tendón sería

$$w_p = \frac{2Py}{l^2} \tag{19.34}$$

Es claro que, para luces sencillas diseñadas mediante el concepto del balance de carga, es necesario que el tendón tenga una excentricidad nula en los apoyos, puesto que los momentos ocasionados por las cargas superpuestas son nulos allí. Cualquier excentricidad en el tendón produciría un momento no balanceado (en sí una carga equivalente) igual a la componente horizontal de la fuerza de preesfuerzo multiplicada por su excentricidad. En los extremos simplemente apoyados debe mantenerse el requisito de la excentricidad nula.

En la práctica, el método del balance de carga para diseño se inicia con la selección de una sección transversal tentativa para la viga, con base en experiencia y buen juicio. A menudo se utiliza una relación apropiada entre luz y espesor. El perfil del tendón se selecciona utilizando la

máxima excentricidad disponible y luego se calcula la fuerza de preesfuerzo. El diseño tentativo se verifica para garantizar que los esfuerzos en el concreto están dentro de los límites admisibles con la carga viva totalmente ausente o aplicada en su totalidad, cuando los esfuerzos de flexión se superpongan a los esfuerzos de compresión axial. No existe seguridad con respecto a que la sección sea apropiada para estos estados de carga, ni que tendrá la resistencia adecuada cuando el elemento sea sobrecargado. Puede ser necesaria una revisión.

Se debe observar, además, que el hecho de obtener un esfuerzo de compresión uniforme en el concreto en el estado de carga balanceado no asegura que el elemento tendrá una deflexión nula en este estado. La razón para esto es que la distribución uniforme de esfuerzos se compone de dos partes: la correspondiente a la fuerza excéntrica de preesfuerzo y la de las cargas externas. La fuerza de preesfuerzo varía con el tiempo por la retracción de fraguado, el flujo plástico y la relajación, cambiando la deflexión vertical asociada con la fuerza de preesfuerzo. En forma concurrente, la viga presentará deflexiones por flujo plástico bajo el efecto combinado de la fuerza de preesfuerzo que disminuye y de las cargas externas, una parte de las cuales puede ser sostenida mientras que otra parte puede ser de corta duración. Sin embargo, si se lleva a cabo el balance de la carga con base sólo en la fuerza de preesfuerzo efectiva P_e más el peso propio y la carga muerta externa, el resultado puede ser una deflexión cercana a cero para esta combinación.

El método del balance de carga ofrece al ingeniero una herramienta útil. Para luces sencillas, el método lleva al diseñador a seleccionar un perfil razonable del tendón y enfoca la atención muy pronto en el problema de las deflexiones. Pero las ventajas más importantes son evidentes en el diseño de elementos preesforzados que están indeterminados, incluyendo tanto vigas continuas como losas en dos direcciones. Para estos casos, al menos para sólo una distribución de cargas, el elemento soporta únicamente compresión axial y no flexión. Esto simplifica el análisis.

Ejemplo 19.5. Diseño de una viga iniciando con el balance de cargas. Una viga postensada debe diseñarse para soportar una carga uniformemente distribuida sobre una luz de 30 pies, como se ilustra en la figura 19.21. Además de su peso propio, la viga debe sostener una carga muerta de 150 lb/pie lineal y una carga viva de servicio de 600 lb/pie lineal. Se alcanzará una resistencia del concreto de 4000 lb/pulg^2 a los 28 días; para el momento de la transferencia de la fuerza de preesfuerzo, la resistencia será de 3000 lb/pulg^2. Se supone que las pérdidas de preesfuerzo son de aproximada-

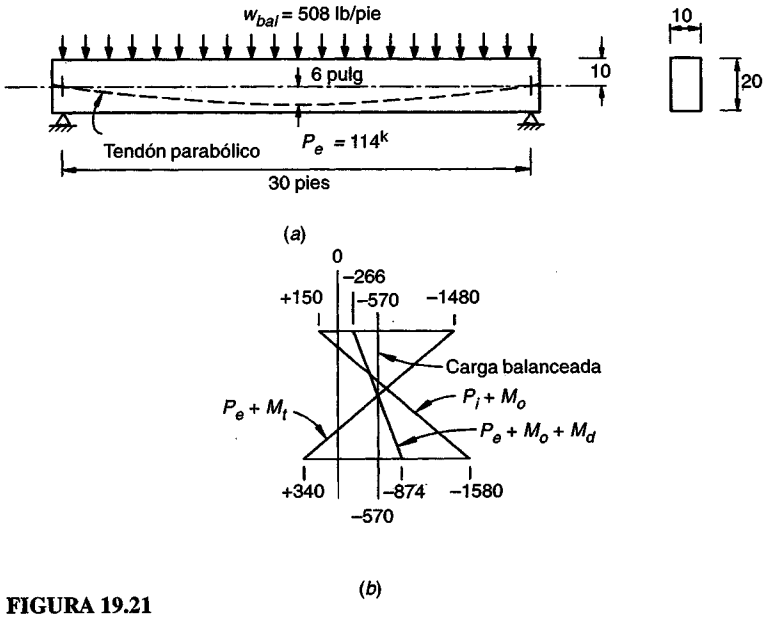


FIGURA 19.21
Ejemplo de diseño mediante el balance de cargas: (*a*) perfil de la viga y sección transversal; (*b*) esfuerzos de flexión en la sección de máximo momento.

mente el 20 por ciento de P_i. Con base en que aproximadamente un cuarto de la carga viva será sostenida durante un periodo sustancial, se utilizará un valor de k_b de 0.25 para determinar la carga balanceada.

Solución. Con base en una relación luz-espesor de 18, seleccionada en forma arbitraria, se escoge una sección tentativa de 20 pulg de altura total con un ancho de 10 pulg. El peso propio calculado de la viga es 208 lb/pie lineal y la carga seleccionada para balancear es

$$w_{bal} = w_o + w_d + k_b w_l = 208 + 150 + 150 = 508 \text{ lb/pie lineal}$$

Con base en un recubrimiento mínimo de concreto de 4 pulg, medido desde el centroide del acero hasta la cara inferior de la viga, la excentricidad máxima que se puede utilizar para la sección tentativa de 20 pulg es 6 pulg. Se utilizará un tendón parabólico para producir una reacción del tendón hacia arriba uniformemente distribuida. Para equilibrar la carga sostenida hacia abajo, la fuerza de preesfuerzo P_e después de pérdidas debe ser, de acuerdo con la ecuación (19.33)

$$P_e = \frac{w_{\text{bal}} l^2}{8y} = \frac{508 \times 900}{8 \times 0.5} = 114{,}000 \text{ lb}$$

y la correspondiente fuerza de preesfuerzo inicial es

$$P_i = \frac{P_e}{R} = \frac{114{,}000}{0.8} = 143{,}000 \text{ lb}$$

Para el estado de carga balanceado, el concreto se someterá a un esfuerzo de compresión uniforme de

$$f_{\text{bal}} = \frac{114{,}000}{200} = -570 \text{ lb/pulg}^2$$

como aparece en la figura 19.21*b*. En caso de que se retire la carga viva parcial de 150 lb/pie lineal, los esfuerzos que deben superponerse a f_{bal} son los que resultan de una carga neta *hacia arriba* de 150 lb/pie lineal. El módulo de la sección para la viga tentativa es igual a 667 pulg^3 y

$$M_{\text{no bal.}} = 150 \times \frac{900}{8} = 16{,}900 \text{ lb-pie}$$

Por tanto, los esfuerzos flectores no balanceados en las caras superior e inferior son

$$f_{\text{no bal.}} = 16{,}900 \times \frac{12}{667} = 304 \text{ lb/pulg}^2$$

Entonces, los esfuerzos netos son

$$f_1 = -570 + 304 = -266 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = -570 - 304 = -874 \text{ lb/pulg}^2$$

De modo similar, cuando actúa la carga viva *total*, los esfuerzos que deben superponerse son los que resultan de una carga neta *hacia abajo* de 450 lb/pie lineal. Los esfuerzos resultantes en el concreto con la carga de servicio total son

$$f_1 = -570 - 910 = -1480 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_2 = -570 + 910 = +340 \text{ lb/pulg}^2$$

En la figura 19.21*b* se ilustran los esfuerzos en el concreto sin carga viva y con la carga viva totalmente aplicada.

También es necesario investigar los esfuerzos para el estado inicial sin carga, cuando el elemento se somete a P_i más el momento que genera su peso propio.

$$M_o = 208 \times \frac{900}{8} = 23{,}400 \text{ lb-pie}$$

Por consiguiente, en el estado inicial:

$$f_1 = -\frac{143{,}000}{200}\left(1 - \frac{6 \times 10}{33.35}\right) - \frac{23{,}400 \times 12}{667} = +150 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_2 = -\frac{143{,}000}{200}\left(1 + \frac{6 \times 10}{33.35}\right) + \frac{23{,}400 \times 12}{667} = -1580 \text{ lb/pulg}^2$$

Los esfuerzos en los estados sin carga y con la carga de servicio total deben compararse con los valores permitidos por el código. Con $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f'_{ci} = 3000$ lb/pulg^2, los esfuerzos permitidos son:

$$f_{ti} = +165 \text{ lb/pulg}^2 \qquad f_{ts} = +380 \text{ lb/pulg}^2$$
$$f_{ci} = -1800 \text{ lb/pulg}^2 \qquad f_{cs} = -2400 \text{ lb/pulg}^2$$

Los esfuerzos reales, mostrados en la figura 19.21*b*, están dentro de estos límites y suficientemente cerca, y no se modificará la sección transversal tentativa de 10 × 20 pulg con base en los límites de esfuerzos.

Ahora debe verificarse la resistencia última a flexión de los elementos para asegurar que se proporciona un factor de seguridad adecuado contra el colapso. El valor requerido de P_i de 143,000 lb se suministrará utilizando cable hecho con torones grado 250, con $f_{pu} = 250{,}000$ lb/pulg^2 y $f_{py} = 212{,}000$ lb/pulg^2. Con referencia a la sección 19.4, el esfuerzo inicial inmediatamente después de la transferencia no debe exceder $0.74 \times 250{,}000 = 185{,}000$ lb/pulg^2 o $0.82 \times 212{,}000 = 174{,}000$ lb/pulg^2 que controla en este caso. De acuerdo con esto, el área requerida del tendón de acero es

$$A_p = 143{,}000/174{,}000 = 0.82 \text{ pulg}^2$$

Esta área se proporcionará utilizando ocho torones de $\frac{7}{16}$ pulg, con lo que se obtiene un área real de 0.864 pulg^2 (ver la tabla A.16). Los esfuerzos resultantes en los estados inicial y final son

$$f_{pi} = \frac{143{,}000}{0.864} = 166{,}000 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_{pe} = \frac{114{,}000}{0.864} = 132{,}000 \text{ lb/pulg}^2$$

Utilizando la ecuación aproximada del Código ACI para el esfuerzo del acero en la falla [ver la ecuación (19.6)], con $\rho_p = 0.864/160 = 0.0054$ y $\gamma_p = 0.40$ para los tendones corrientes grado 250, el esfuerzo f_{ps} está dado por:

$$f_{ps} = f_{pu}\left(1 - \frac{\gamma_p}{\beta_1}\frac{\rho_p f_{pu}}{f'_c}\right)$$
$$= 250\left(1 - \frac{0.40}{0.85}\frac{0.0054 \times 250}{4}\right)$$
$$= 210 \text{ klb/pulg}^2$$

Entonces,

$$a = \frac{A_{ps} f_{ps}}{0.85 f'_c b}$$
$$= \frac{0.864 \times 210}{0.85 \times 4 \times 10} = 5.34 \text{ pulg}^2$$

La resistencia nominal a flexión es

$$M_n = A_p f_{ps}\left(d - \frac{a}{2}\right) = 0.864 \times 210{,}000\left(16 - \frac{5.34}{2}\right)\frac{1}{12}$$
$$= 202{,}000 \text{ lb-pie}$$

Este valor debe reducirse mediante el coeficiente $\phi = 0.90$ como es usual para obtener la resistencia de diseño:

$$\phi M_n = 0.90 \times 202{,}000 = 182{,}000 \text{ lb-pie}$$

Se debe recordar que los coeficientes de carga del Código ACI en relación con las cargas muerta y viva son, respectivamente, 1.4 y 1.7. El factor de seguridad obtenido en el presente caso se evaluará con respecto al momento con la carga viva de servicio de 67,500 lb-pie, suponiendo que las cargas muertas pueden ser del orden de 1.4 veces los valores calculados, para ajustarse a los requisitos del Código ACI. De acuerdo con esto,

$$182 = 1.4(23.4 + 16.9) + F_l\,(67.5)$$
$$F_l = 1.86$$

Este valor excede el mínimo de 1.7 determinado por el Código ACI y el diseño se considera satisfactorio.

19.13 PÉRDIDAS DE PREESFUERZO

Como se analizó en la sección 19.6, la fuerza de preesfuerzo inicial P_i es menor inmediatamente después de la transferencia, que la fuerza aplicada con el gato P_j como consecuencia del acortamiento elástico del concreto, del deslizamiento en los anclajes y de las pérdidas por fricción a lo largo de los tendones. La fuerza se reduce aún más después de un periodo de varios meses o aun de años, por los cambios de longitud que resultan de la retracción de fraguado, del flujo plástico del concreto y de la relajación del acero sometido a altos esfuerzos; con el tiempo, éste alcanza su valor efectivo P_e. En las secciones anteriores de este capítulo, las pérdidas se tomaron en cuenta mediante la utilización de una relación de efectividad supuesta, $R = P_e/P_i$.

La estimación de las pérdidas se realiza a diferentes niveles. En la mayor parte de los casos, para el diseño práctico, no es necesario adelantar cálculos detallados de las pérdidas. Es posible suponer un valor de R, basado en la experiencia o en cualquiera de varias expresiones empíricas que se utilizan en forma amplia. Para casos en que se requiere mayor precisión, resulta necesario estimar las pérdidas por separado, teniendo en cuenta las condiciones especiales de geometría del elemento, propiedades del material y los métodos de construcción pertinentes. La precisión en la estimación de las pérdidas puede mejorarse aún más si se tiene en cuenta la interdependencia de las pérdidas dependientes del tiempo, utilizando la sumatoria de las pérdidas en una secuencia de intervalos discretos de tiempo. Estos métodos se analizarán brevemente en los siguientes párrafos.

a. Estimativos globales de las pérdidas

Desde los primeros desarrollos del concreto preesforzado se reconoció la necesidad de contar con expresiones aproximadas para estimar la pérdida de preesfuerzo en el diseño de rutina. Muchos miles de exitosas estructuras preesforzadas se han construido con base en estos estimativos y cuando los tamaños de los elementos, las luces, los materiales, los procedimientos de construcción, la cantidad de fuerza de preesfuerzo y las condiciones ambientales no están por fuera de lo corriente, este método es satisfactorio. Para estas condiciones, la American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO, referencia 19.15) recomienda los valores de la tabla 19.3. Las pérdidas por fricción no se incluyen en los valores para elementos postensados; éstas deben calcularse independientemente mediante las ecuaciones de la sección 19.13b.

Las pérdidas recomendadas por la AASHTO en la tabla 19.3 incluyen pérdidas por acortamiento elástico, flujo plástico, retracción de fraguado y relajación (ver más adelante). Así, si se van a comparar con los valores de R empleados para estimar las pérdidas en los ejemplos anteriores, que incluían sólo las pérdidas dependientes del tiempo por retracción de fraguado, flujo plástico y relajación, las pérdidas que genera el acortamiento elástico deben estimarse mediante los métodos de la sección 19.13b y deducirse del total.

TABLA 19.3
Estimativo de las pérdidas de preesfuerzo

Tipo de acero de preesfuerzo	Pérdida total, lb/pulg^2	
	f'_c = 4000 lb/pulg^2	f'_c = 5000 lb/pulg^2
Torón de pretensado	–	45,000
Alambre o torón de postensado[a]	32,000	33,000
Barras de postensado[a]	22,000	23,000

[a]Las pérdidas por fricción no se incluyen; éstas deben calcularse de acuerdo con la sección 19.13b.
Fuente: Tomada de la referencia 19.15.

b. Estimativo de pérdidas por separado

Para los casos en que los estimativos globales de las pérdidas resulten inadecuados, como por ejemplo, para elementos de proporciones no usuales, luces excepcionales o concreto liviano, se debe realizar un estimativo por separado de las pérdidas individuales. Este tipo de análisis se complica por la interdependencia de las pérdidas dependientes del tiempo. Por ejemplo, la relajación de esfuerzos en los tendones se afecta por los cambios de longitud que ocasiona el flujo plástico del concreto; la tasa de flujo plástico, a su vez, se altera por el cambio del esfuerzo en el tendón. En las siguientes seis subsecciones, las pérdidas se consideran como si ocurrieran en forma separada, aunque se incluyen ciertos ajustes arbitrarios para tener en cuenta la interdependencia de las pérdidas dependientes del tiempo. Para el caso en que se requiera un mayor refinamiento, se utiliza un método paso a paso, como el que se menciona en la sección 19.13c (ver también las referencias 19.16 y 19.17).

(1) Deslizamiento en los anclajes. A medida que la carga se transfiere a los dispositivos de anclaje en la construcción postensada, se presentará un leve movimiento hacia adentro del tendón, mientras que las cuñas se ajustan y el anclaje mismo se deforma al someterse a esfuerzo. La cantidad de movimiento variará de manera considerable según el tipo de anclaje y las técnicas de construcción. La mejor manera de determinar la cantidad de movimiento que genera el asentamiento y la deformación por esfuerzo asociada con cualquier tipo particular de anclaje es mediante ensayos. Una vez que se determine la cantidad ΔL, la pérdida de esfuerzo se calcula a partir de

$$\Delta f_{s,\text{deslizamiento}} = \frac{\Delta L}{L} E_s \tag{19.35}$$

Es importante observar que la cantidad de deslizamiento es casi independiente de la longitud del cable. Por esta razón, la pérdida de esfuerzo será grande en tendones cortos y relativamente pequeña en tendones largos. La consecuencia práctica de esto es que resulta más difícil postensar tendones cortos con algún grado de precisión.

(2) Acortamiento elástico del concreto. En elementos pretensados, a medida que la fuerza del tendón se transfiere de los contrafuertes fijos a la viga de concreto, se presentará una deformación de compresión elástica e instantánea en el concreto, que tiende a reducir el esfuerzo en el acero de preesfuerzo adherido. La pérdida de esfuerzo en el acero es

$$\Delta f_{s,\text{elástico}} = E_s \frac{f_c}{E_c} = n f_c \tag{19.36}$$

donde f_c es el esfuerzo en el concreto al mismo nivel del centroide del acero, inmediatamente después de aplicar el preesfuerzo:

$$f_c = -\frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{e^2}{r^2}\right) + \frac{M_o e}{I_c} \tag{19.37}$$

Si los tendones se colocan con alturas efectivas muy diferentes, la pérdida de esfuerzo debe evaluarse separadamente en cada uno de ellos.

Para calcular f_c con la ecuación (19.37), se utiliza la fuerza de preesfuerzo posterior a la ocurrencia de las pérdidas que se calculan. Por lo general, es apropiado estimar que esta fuerza es aproximadamente un 10 por ciento menor que P_j.

En elementos postensados, si todos los torones se tensionan a un mismo tiempo, no se presentará pérdida por acortamiento elástico, puesto que este acortamiento ocurrirá a medida que se aplica la fuerza del gato y antes de medir la fuerza de preesfuerzo. Por otra parte, si se tensionan varios torones en secuencia, la pérdida de esfuerzo en cada torón variará, siendo máxima en el primer torón tensionado y cero en el último. En la mayor parte de los casos, es suficientemente preciso calcular las pérdidas en el primer torón y aplicar la mitad de este valor a todos los torones.

(3) Pérdidas por fricción. Las pérdidas generadas por fricción a medida que el tendón se somete a esfuerzos en elementos postensados, se separan en dos partes por conveniencia: fricción por curvatura y fricción por desviaciones. La primera se debe a los dobleces intencionales en el perfil del tendón, como se especifica, y la segunda a la variación no intencional del tendón con respecto al perfil deseado. Es claro que incluso un ducto "recto" tendrá algún desalineamiento no intencional, de manera que siempre debe considerarse la fricción por desviaciones en trabajos postensados. La fricción por curvatura también debe tenerse en cuenta. La fuerza en el extremo del tendón donde se coloca el gato P_o, requerida para producir la fuerza P_x en cualquier punto x a lo largo del tendón, puede determinarse a partir de la expresión

$$P_o = P_x e^{Kl_x + \mu\alpha} \tag{19.38a}$$

donde e = base de logaritmos naturales
l_x = longitud del tendón desde el extremo del gato hasta el punto x
α = cambio angular del tendón desde el extremo del gato hasta el punto x, en radianes
K = coeficiente de fricción por desviaciones, lb/lb por pie
μ = coeficiente de fricción por curvatura

Ha habido bastante investigación con respecto a las pérdidas por fricción en construcción preesforzada, en particular con relación a los valores de K y μ. Estos valores varían en forma apreciable dependiendo de los métodos de construcción y de los materiales utilizados. Los valores de la tabla 19.4, tomados del comentario del Código ACI, son una guía.

Si se acepta la aproximación de que la presión normal en el ducto que produce la fuerza de fricción resulta de la tensión inicial no disminuida alrededor de toda la curva, se obtiene la siguiente expresión simplificada para la pérdida de tensión:

$$P_o = P_x(1 + Kl_x + \mu\alpha) \tag{19.38b}$$

donde α es el ángulo entre las tangentes en los extremos. El Código ACI permite la utilización de la forma simplificada si el valor de $Kl_x + \mu\alpha$ no es mayor que 0.3.

La pérdida de preesfuerzo para la longitud total del tendón se calcula por segmentos, suponiendo que cada segmento consta bien sea de un arco circular o de una longitud de tangente.

TABLA 19.4
Coeficientes de fricción para tendones postensados

Tipo de tendón	Coeficiente por desviación K, por pie	Coeficiente por curvatura μ
Tendones inyectados en conducto metálico		
Tendones de alambre	0.0010-0.0015	0.15-0.25
Barras de alta resistencia	0.0001-0.0006	0.08-0.30
Torones de siete hilos	0.0005-0.0020	0.15-0.25
Tendones no adheridos		
Tendones de alambre cubiertos con masilla	0.0010-0.0020	0.05-0.15
Torones de siete hilos cubiertos con masilla	0.0010-0.0020	0.05-0.15
Tendones preengrasados de alambre	0.0003-0.0020	0.05-0.15
Torones preengrasados de siete hilos	0.0003-0.0020	0.05-0.15

(4) Flujo plástico del concreto. El acortamiento del concreto al someterse a carga sostenida se analizó en la sección 2.8, y se puede expresar en términos del coeficiente de flujo plástico C_c. El acortamiento por flujo plástico puede ser varias veces mayor que el acortamiento elástico inicial y es evidente que producirá una pérdida en la fuerza de preesfuerzo. La pérdida de esfuerzo se calcula a partir de

$$\Delta f_{s,\text{flujo plástico}} = C_c n f_c \tag{19.39}$$

En la tabla 2.1 se presentan los valores de C_c para diferentes resistencias de concreto en condiciones promedio de humedad.

El esfuerzo en el concreto f_c que debe utilizarse en la ecuación (19.39), es el que se presenta al mismo nivel del centroide del acero, cuando están actuando la fuerza de preesfuerzo excéntrica más todas las cargas sostenidas. Si se utiliza la ecuación (19.37) el momento M_o se debe remplazar por el momento que generan todas las cargas muertas más el de cualquier porción de la carga viva que pueda considerarse sostenida.

Observe que la fuerza de preesfuerzo que produce el flujo plástico no es constante, sino que disminuye con el paso del tiempo por la relajación del acero, la retracción de fraguado del concreto y los cambios de longitud asociados con el flujo plástico mismo. Para tener en cuenta estos efectos, se recomienda suponer que la fuerza de preesfuerzo que produce el flujo plástico es un 10 por ciento menor que el valor inicial P_i.

(5) Retracción de fraguado del concreto. Es claro que la disminución en la longitud de un elemento por retracción de fraguado del concreto será tan perjudicial como los cambios de longitud ocasionados por esfuerzos, flujo plástico y otras causas. Como se analizó en la sección 2.11, la deformación por retracción de fraguado ϵ_{sh} puede variar aproximadamente entre 0.0004 y 0.0008. Si no se dispone de datos específicos, puede utilizarse un valor típico de 0.0006. La pérdida de esfuerzo en el acero resultante de la retracción de fraguado es

$$\Delta f_{s,\text{retracción}} = \epsilon_{sh} E_s \tag{19.40}$$

Sólo es necesario tener en cuenta la parte de la retracción de fraguado que ocurre después de la transferencia de la fuerza de preesfuerzo al concreto. Para elementos pretensados, la transferencia se realiza por lo regular apenas 24 horas después de vaciar el concreto y casi toda la retracción ocurre después de este momento. Sin embargo, las vigas postensadas rara vez se someten a esfuerzos antes de siete días y, con frecuencia, tardan mucho más. De manera aproximada, el 15 por ciento de la retracción de fraguado total puede ocurrir a la edad de siete días, en condiciones usuales, y cerca del 40 por ciento a la edad de 28 días.

(6) Relajación del acero. El fenómeno de la relajación, similar al del flujo plástico, se analizó en la sección 2.14. La pérdida en los esfuerzos por relajación variará según el esfuerzo en el acero y puede estimarse utilizando la ecuación (2.11). Para tener en cuenta la reducción gradual del esfuerzo en el acero que resulta de los efectos combinados del flujo plástico, de la retracción de fraguado y de la relajación, el cálculo de ésta se basa en una fuerza de preesfuerzo 10 por ciento menor que P_i.

Es interesante observar que la mayor parte de las pérdidas por relajación ocurren poco después de haber estirado el acero. Para esfuerzos de $0.80f_{pu}$ y mayores, aun un periodo corto de aplicación de cargas producirá una relajación sustancial y esto, a su vez, reducirá la relajación que se presenta posteriormente para un nivel más bajo de esfuerzos. La tasa de relajación puede entonces acelerarse en forma artificial aplicando un sobretensionamiento temporal. Esta técnica ha sido utilizada algunas veces para reducir las pérdidas.

c. Estimativo de las pérdidas mediante el método del intervalo de tiempo

Los cálculos de pérdidas de los párrafos anteriores reconocen la interdependencia de las pérdidas por flujo plástico, por retracción de fraguado y por relajación de manera aproximada, reduciendo arbitrariamente en un 10 por ciento la fuerza inicial de preesfuerzo P_i para obtener la fuerza de cálculo de las pérdidas por flujo plástico y por relajación. Para casos en que se requiera mayor precisión, las pérdidas pueden calcularse para intervalos discretos a lo largo del periodo de interés. La fuerza de preesfuerzo que produce pérdidas durante cualquier intervalo se toma igual al valor al final del intervalo de tiempo precedente, teniendo en cuenta las pérdidas que generan todas las causas hasta ese momento. La precisión puede mejorarse hasta el grado deseado, disminuyendo la duración y aumentando la cantidad de intervalos.

El Committee on Prestress Losses of the Prestressed Concrete Institute desarrolló un método paso a paso que utiliza sólo una cantidad limitada de intervalos de tiempo y que, en consecuencia, es adecuado para los casos corrientes (ver la referencia 19.16).

19.14 REFUERZO A CORTANTE, A TENSIÓN DIAGONAL Y EN EL ALMA

En vigas de concreto preesforzado sometidas a cargas de servicio, existen dos factores que disminuyen en forma considerable la intensidad de los esfuerzos de tensión diagonal, en comparación con los que existirían si la fuerza de preesfuerzo no estuviera presente. El primero de éstos resulta de la combinación de esfuerzos longitudinales de compresión y de esfuerzos cortantes. En la figura 19.22*a* se presenta una viga corriente de concreto reforzada a tensión y sometida a carga. Los esfuerzos que actúan sobre un pequeño elemento de la viga tomado muy cerca del eje neutro y del

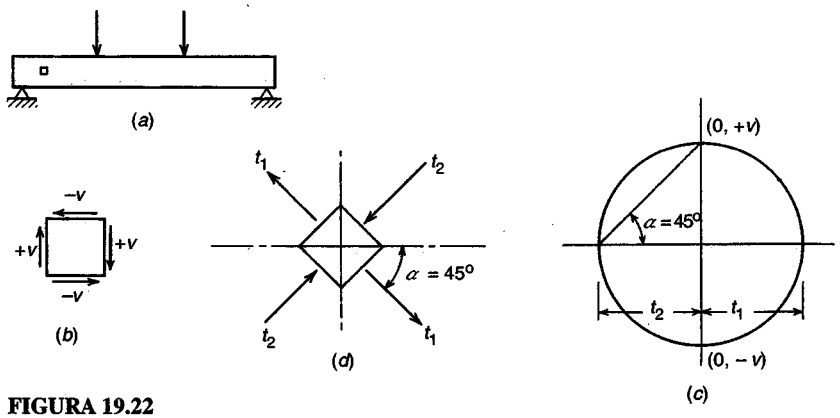


FIGURA 19.22
Análisis de esfuerzos principales en una viga de concreto reforzado.

apoyo se ilustran en la parte (*b*). Mediante el círculo de esfuerzos de Mohr (*c*) se encuentra que los esfuerzos principales actúan a 45° del eje de la viga (*d*) y son numéricamente iguales a la intensidad de los esfuerzos cortantes; así que,

$$t_1 = t_2 = v \tag{a}$$

Suponga ahora que la misma viga con las mismas cargas se somete a un esfuerzo de precompresión con una magnitud *c*, como se indica en la figura 19.23*a* y *b*. A partir del círculo de Mohr (ver la figura 19.23*c*), el esfuerzo de tensión principal es

$$t_1 = -\frac{c}{2} + \sqrt{v^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \tag{b}$$

y la dirección de la tensión principal con respecto al eje de la viga es

$$\tan 2\alpha = \frac{2v}{c} \tag{c}$$

como aparece en la figura 19.23*d*.

La comparación de la ecuación (*a*) con la (*b*), y de la figura 19.22*c*, con la figura 19.23*c* demuestra que con la misma intensidad de esfuerzos cortantes, la tensión principal en la viga preesforzada se reduce de manera sustancial.

El segundo factor que trabaja para reducir la intensidad de la tensión diagonal con las cargas de servicio resulta de la pendiente de los tendones. Normalmente, esta pendiente es tal que produce un cortante por las fuerzas de preesfuerzo, en dirección opuesta a la del cortante generado por la carga. La magnitud de este *contracortante* es $V_p = P_e \operatorname{sen} \theta$, donde θ es la pendiente del tendón en la sección considerada (ver la figura 19.8).

Sin embargo, es importante observar que, a pesar de estas características de las vigas preesforzadas para el estado de cargas de servicio, una investigación de los esfuerzos de tensión diagonal con las cargas de servicio no garantiza un factor adecuado de seguridad contra la falla. En la figura 19.23*c*, es evidente que una disminución relativamente pequeña en los esfuerzos de compresión y un aumento en los esfuerzos cortantes, que pueden ocurrir cuando la viga se sobrecargue, producirá un incremento desproporcionado en la tensión principal resultante. Además de este efecto, si el contracortante de los tendones inclinados se utiliza para reducir el cortante de diseño, su contribución no aumenta en forma directa con la carga sino con mucha más lentitud (ver la

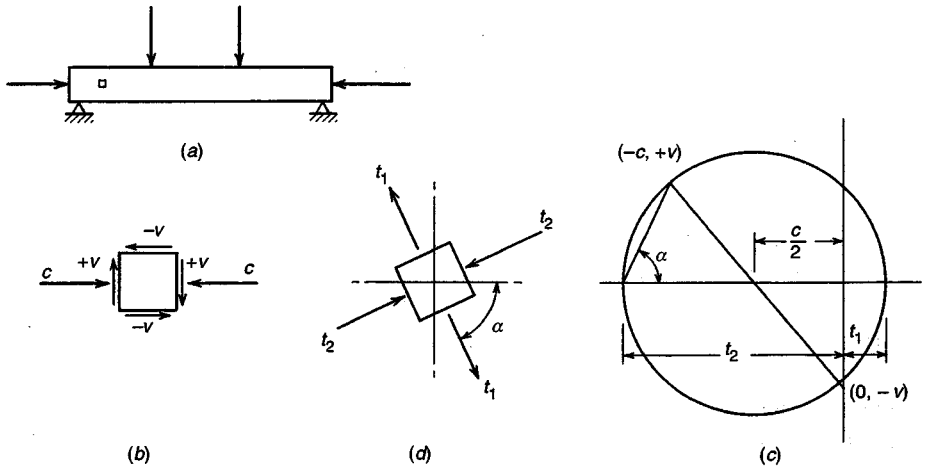


FIGURA 19.23
Análisis de esfuerzos principales en una viga de concreto preeforzado.

sección 19.7). En consecuencia, un pequeño aumento en el cortante total puede generar un gran incremento en el cortante neto para el cual debe diseñarse la viga. Por estas dos razones, en vigas preesforzadas es necesario basar el diseño a tensión diagonal en cargas mayoradas en vez de cargas de servicio. El estudio de los esfuerzos principales en la viga preesforzada que no está fisurada es importante sólo para estimar la carga con que se forma la primera grieta diagonal.

Con cargas cercanas a la de falla, una viga preesforzada se encuentra por lo general extensamente fisurada y se comporta en forma muy parecida a una viga corriente de concreto reforzado. De acuerdo con esto, muchos de los procedimientos y ecuaciones desarrollados en la sección 4.5 para el diseño del refuerzo en el alma de vigas no preesforzadas, pueden aplicarse igualmente a vigas preesforzadas. El diseño a cortante se basa en la relación

$$V_u \leq \phi V_n \tag{19.41}$$

donde V_u es la fuerza cortante total aplicada a la sección por las cargas mayoradas y V_n es la resistencia nominal a cortante, igual a la suma de las contribuciones del concreto y del refuerzo en el alma:

$$V_n = V_c + V_s \tag{19.42}$$

El coeficiente de reducción de resistencia ϕ se toma igual a 0.85 para cortante.

Para calcular el cortante para cargas mayoradas V_u, la primera sección crítica se supone localizada a una distancia $h/2$ de la cara del apoyo, y las secciones localizadas a distancias menores que $h/2$ se diseñan para el cortante calculado a $h/2$.

La fuerza cortante V_c que resiste el concreto después de que ocurre el agrietamiento se toma igual al cortante generado por la primera grieta diagonal. En los ensayos realizados en vigas de concreto preesforzado se han observado dos tipos de grietas diagonales:

1. **Grietas por cortante y flexión**, que se presentan a un cortante nominal V_{ci}, inician como grietas de flexión casi verticales en la cara a tensión de la viga y luego se propagan diagonalmente hacia arriba (bajo la influencia de la tensión diagonal), en dirección a la cara a compresión. Éstas son comunes en vigas con una fuerza de preesfuerzo relativamente baja.
2. **Grietas por cortante en el alma**, que ocurren a un cortante nominal V_{cw} inician en el alma por la alta tensión diagonal y luego se propagan en forma diagonal tanto hacia arriba como hacia abajo. Éstas se presentan a menudo en vigas con almas delgadas sometidas a altas fuerzas de preesfuerzo.

Con base en investigaciones experimentales extensas, se estableció que el cortante que produce el agrietamiento por cortante y flexión puede determinarse mediante la expresión

$$V_{ci} = 0.6\sqrt{f'_c}b_w d + V_{cr,o+d+l} \tag{a}$$

donde $V_{cr,o+d+l}$ es la fuerza cortante producida por la carga total, a la cual se forma la grieta de flexión en la sección que se estudia, y $0.6\sqrt{f'_c}b_w d$ representa una fuerza cortante adicional requerida para transformar la grieta de flexión en una grieta inclinada.

Aunque el peso propio es por lo general una carga uniformemente distribuida, las cargas muerta y viva superpuestas pueden tener cualquier distribución. En consecuencia, es conveniente separar el cortante total en V_o producido por la carga de la viga (sin coeficiente de carga) y V_{cr}, la fuerza cortante adicional, producto de las cargas muerta y viva superpuestas, correspondientes al agrietamiento por flexión. Entonces,

$$V_{ci} = 0.6\sqrt{f'_c}b_w d + V_o + V_{cr} \tag{b}$$

El cortante V_{cr} por cargas superpuestas se encuentra convenientemente a partir de

$$V_{cr} = \frac{V_{d+l}}{M_{d+l}} M_{cr} \qquad (c)$$

donde V_{d+l}/M_{d+l}, la relación entre el cortante y el momento para las cargas muerta y viva superpuestas, permanece constante a medida que la carga aumenta hasta la carga de agrietamiento, y

$$M_{cr} = \frac{I_c}{c_2}(6\sqrt{f_c'} + f_{2pe} - f_{2o}) \qquad (19.43)$$

donde c_2 = distancia desde el centroide del concreto hasta la cara a tensión
f_{2pe} = esfuerzo de compresión en la cara a tensión que resulta de la fuerza efectiva de preesfuerzo actuando sola
f_{2o} = esfuerzo en la fibra inferior por el peso propio de la viga†

El primer término en el paréntesis es un estimativo conservador del módulo de rotura. El esfuerzo en la fibra inferior por el peso propio se resta en este caso porque se considera en forma independiente en la ecuación (*b*). Así, la ecuación (*b*) se transforma en

$$V_{ci} = 0.6\sqrt{f_c'} b_w d + V_o + \frac{V_{d+l}}{M_{d+l}} M_{cr} \qquad (19.44)$$

Los ensayos indican que no es necesario que V_{ci} sea menor que $1.7\sqrt{f_c'} b_w d$. El valor de d no necesita tomarse menor que $0.80h$ para ésta y para todas las ecuaciones relacionadas con cortante, de acuerdo con el Código ACI, a menos que se indique de manera específica otra cosa.

La fuerza cortante que produce el agrietamiento por cortante en el alma se determina a partir de un cálculo exacto de los esfuerzos principales, en el cual el esfuerzo principal de tensión se hace igual a la capacidad a tensión directa del concreto (tomada conservadoramente $4\sqrt{f_c'}$ de acuerdo con el Código ACI). Como alternativa, el Código ACI permite la utilización de la expresión aproximada

$$V_{cw} = (3.5\sqrt{f_c'} + 0.3f_{pc}) b_w d + V_p \qquad (19.45)$$

en la cual f_{pc} es el esfuerzo de compresión en el concreto después de pérdidas, en el centroide de la sección de concreto (o en la unión del alma y del ala cuando el centroide cae dentro del ala), y V_p es la componente vertical de la fuerza efectiva de preesfuerzo.

Después de calcular V_{ci} y V_{cw}, el valor de V_c (la resistencia a cortante proporcionada por el concreto) se toma igual al menor de estos dos valores.

El cálculo de M_{cr}, V_{ci} y V_{cw} para una viga preesforzada es un asunto tedioso porque muchos de los parámetros varían a lo largo del eje del elemento. Para cálculos a mano, las cantidades requeridas pueden encontrarse a intervalos discretos a lo largo de la luz, como a $l/2$, $l/3$, $l/6$, y a $h/2$ de la cara del apoyo, y los estribos se colocan con los espaciamientos correspondientes. También pueden utilizarse hojas electrónicas para cálculos en computador.

Para abreviar los cálculos requeridos, el Código ACI incluye como una alternativa conservadora al procedimiento descrito antes, una ecuación para determinar de modo directo la resistencia a cortante del concreto V_c:

$$V_c = \left(0.6\sqrt{f_c'} + 700\frac{V_u d}{M_u}\right) b_w d \qquad (19.46)$$

† Todos los esfuerzos están expresados en valor absoluto de acuerdo con la convención del ACI.

en la cual M_u es el momento flector presente de manera simultánea con la fuerza cortante V_u, pero $V_u d/M_u$ no debe tomarse mayor que 1.0. Cuando se utilice esta ecuación, no es necesario que V_c se tome menor que $2\sqrt{f'_c}b_w d$ ni mayor que $5\sqrt{f'_c}b_w d$. Aunque la ecuación (19.46) es tentadoramente fácil de utilizar y puede ser adecuada para elementos de menor importancia cargados uniformemente, su utilización puede producir diseños bastante costosos para vigas I de luces medianas y largas, y para construcción compuesta (ver la referencia 19.18).

Cuando se utiliza refuerzo a cortante perpendicular al eje de la viga, su contribución a la resistencia a cortante de una viga preesforzada es

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \tag{19.47}$$

la misma que para un elemento no preesforzado. De acuerdo con el Código ACI, el valor de V_s no debe tomarse mayor que $2\sqrt{f'_c}b_w d$.

La resistencia nominal total a cortante V_n se determina sumando las contribuciones del acero y del concreto, como se indicó en la ecuación (19.42):

$$V_n = \frac{A_v f_y d}{s} + V_c \tag{19.48}$$

Entonces, a partir de la ecuación (19.41),

$$V_u = \phi V_n = \phi(V_s + V_c)$$

a partir de lo cual,

$$V_u = \phi\left(\frac{A_v f_y d}{s} + V_c\right) \tag{19.49}$$

El área de la sección transversal requerida para un estribo, A_v, se calcula con una transposición conveniente de la ecuación (19.49).

$$A_v = \frac{(V_u - \phi V_c)s}{\phi f_y d} \tag{19.50}$$

En el diseño práctico, el ingeniero seleccionará normalmente un tamaño tentativo para el estribo, para el cual encontrará el espaciamiento requerido. Una forma más conveniente de formular esta última ecuación es

$$s = \frac{\phi A_v f_y d}{V_u - \phi V_c} \tag{19.51}$$

En todos los elementos de concreto preesforzado debe suministrarse al menos cierta área mínima de refuerzo a cortante, cuando la fuerza cortante total mayorada sea mayor que la mitad de la resistencia a cortante ϕV_c proporcionada por el concreto. De acuerdo con el Código ACI, se hacen excepciones para losas y zapatas, para entrepisos construidos con viguetas de concreto y para ciertas vigas de muy poca altura. El área mínima de refuerzo a cortante que debe proveerse en todos los demás casos debe tomarse igual al menor de

$$A_v = 50\frac{b_w s}{f_y} \tag{19.52}$$

y

$$A_v = \frac{A_p}{80}\frac{f_{pu}}{f_y}\frac{s}{d}\sqrt{\frac{d}{b_w}} \tag{19.53}$$

en las cuales A_p es el área de la sección transversal del acero de preesfuerzo, f_{pu} es la resistencia última a la tensión de! acero de preesfuerzo, y todos los demás términos son como se definieron previamente.

El Código ACI contiene ciertas restricciones relacionadas con el espaciamiento máximo del refuerzo en el alma para garantizar que cualquier grieta diagonal potencial quedará atravesada por una cantidad mínima de acero en el alma. Para elementos preesforzados, este espaciamiento máximo no debe exceder al menor de $0.75h$ o 24 pulg. Si el valor de V_s excede $4\sqrt{f'_c}\,b_w d$, estos límites se reducen a la mitad.

Ejemplo 19.6. La viga I asimétrica de la figura 19.24 soporta una fuerza efectiva de preesfuerzo de 288 klb, una carga muerta superpuesta de 345 lb/pie lineal y una carga viva de servicio de 900 lb/pie lineal, además de su peso propio de 255 lb/pie lineal, en una luz sencilla de 50 pies. En la sección de momento máximo, la altura efectiva del acero principal es 24.5 pulg (excentricidad 11.4 pulg). Los alambres se deflectan hacia arriba a 15 pies de los apoyos y la excentricidad se reduce linealmente hasta cero en los apoyos. Si se utiliza concreto con una resistencia $f'_c = 5000$ lb/pulg^2, estribos con $f_y = 40{,}000$ lb/pulg^2 y si los alambres de preesfuerzo tienen una resistencia $f_{pu} = 275$ klb/pulg^2, ¿cuál es el espaciamiento requerido para los estribos en un punto a 10 pies del apoyo?

Solución. Para una sección transversal de las dimensiones determinadas, se confirma que $I_c = 24{,}200$ pulg^4 y $r^2 = I_c/A_c = 99$ pulg^2. A una distancia de 10 pies del centro de los apoyos, la excentricidad del tendón es

$$e = 11.4 \times \frac{10}{15} = 7.6 \text{ pulg}$$

que corresponde a una altura efectiva d desde la cara de compresión de 20.7 pulg. De acuerdo con el Código ACI, se utilizará el mayor valor $d = 0.80 \times 29 = 23.2$ pulg. Los cálculos de V_{ci} se basan en las ecuaciones (19.43) y (19.44). El esfuerzo en la fibra inferior a causa del preesfuerzo efectivo actuando solo es

$$f_{2pe} = -\frac{P_e}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) = -\frac{288{,}000}{245}\left(1 + \frac{7.6 \times 15.9}{99}\right) = -2600 \text{ lb/pulg}^2$$

El momento y el cortante en la sección debidos al peso propio de la viga son, respectivamente,

$$M_{o,10} = \frac{w_o x}{2}(l - x) = 0.255 \times 5 \times 40 = 51 \text{ klb-pie}$$

$$V_{o,10} = w_o\left(\frac{l}{2} - x\right) = 0.255 \times 15 = 3.8 \text{ klb}$$

y el esfuerzo en la fibra inferior por esta carga es

$$f_{2o} = \frac{51 \times 12{,}000 \times 15.9}{24{,}200} = 402 \text{ lb/pulg}^2$$

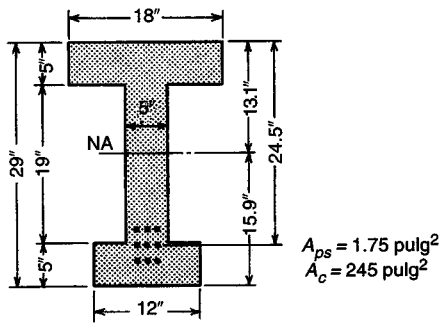


FIGURA 19.24
Viga postensada del ejemplo 19.6.

Entonces, a partir de la ecuación (19.43),

$$M_{cr} = \frac{24{,}200(425 + 2600 - 402)}{15.9 \times 12} = 333{,}000 \text{ lb-pie}$$

La relación entre el cortante y el momento de las cargas superpuestas en esta sección es

$$\frac{V_{d+l}}{M_{d+l}} = \frac{l - 2x}{x(l - x)} = \frac{30}{400} = 0.075 \text{ pie}^{-1}$$

La ecuación (19.44) se utiliza entonces para determinar la fuerza cortante para la cual puede esperarse la formación de las grietas por cortante y flexión:

$$V_{ci} = [0.6\sqrt{5000}(5 \times 23.2) + 3800 + 0.075 \times 330{,}000] \times \frac{1}{1000} = 33.5 \text{ klb}$$

El límite inferior de $1.7\sqrt{5000}\,(5{\times}23.2)/1000 = 13.9$ klb no controla en este caso.

El cálculo de V_{cw} se basa en la ecuación (19.45). La pendiente θ de los tendones en la sección que se analiza es tal que sen $\theta \approx \tan \theta = 11.4/(15 \times 12) = 0.063$. En consecuencia, la componente vertical de la fuerza efectiva de preesfuerzo es $V_p = 0.063 \times 288 = 18.1$ klb. El esfuerzo de compresión en el concreto en el centroide de la sección es

$$f_{pc} = \frac{288{,}000}{245} = 1170 \text{ lb/pulg}^2$$

La ecuación (19.45) puede utilizarse ahora para encontrar el cortante en el que deben formarse las grietas de cortante en el alma:

$$V_{cw} = [(3.5\sqrt{5000} + 0.3 \times 1170)5 \times 23.2 + 18{,}100] \times \frac{1}{1000} = 87.5 \text{ klb}$$

En este caso,

$$V_c = V_{ci} = 33.5 \text{ klb}$$

En la sección analizada, la fuerza cortante total con las cargas mayoradas es

$$V_u = 1.4 \times 0.600 \times 15 + 1.7 \times 0.900 \times 15 = 35.6 \text{ klb}$$

Cuando se utilizan estribos No. 3 en forma de U, para los cuales $A_v = 2 \times 0.11 = 0.22$ pulg^2, el espaciamiento requerido se encuentra a partir de la ecuación (19.51) y es igual a

$$s = \frac{0.85 \times 0.22 \times 40{,}000 \times 23.2}{35{,}600 - 0.85 \times 33{,}500} = 25 \text{ pulg}$$

Luego se aplica la ecuación (19.53) para establecer el criterio de máximo espaciamiento

$$0.22 = \frac{1.75}{80} \times \frac{275}{40} \times \frac{s}{23.2\sqrt{\frac{23.2}{5}}} = 0.014s$$

$$s = 15.7 \text{ pulg}$$

Los otros criterios para espaciamiento máximo, $3/4 \times 29 = 22$ pulg y 24 pulg, no controlan en este caso. Se utilizarán estribos abiertos en forma de U, colocados cada 15 pulg.

Por comparación, el cortante en el concreto se calculará con base en la ecuación (19.46). La relación V_u/M_u es 0.075, y

$$V_c = \left(0.6\sqrt{5000} + 700 \times \frac{0.075}{12} \times 23.2\right)(5 \times 23.2) \times \frac{1}{1000} = 16.7 \text{ klb}$$

Los límites inferior y superior, $2\sqrt{5000}\,(5{\times}23.2)/1000 = 16.4$ klb y $2\sqrt{5000}\,(5{\times}23.2)/1000 = 41.0$ klb y no controlan en este caso. Entonces, con base en el valor de V_c obtenido a partir de la ecuación (19.46), el espaciamiento requerido por los estribos No. 3 en forma de U es

$$s = \frac{0.85 \times 0.22 \times 40{,}000 \times 23.2}{35{,}600 - 0.85 \times 16{,}700} = 8 \text{ pulg}$$

Para este caso, el de una viga con sección en I de luz intermedia, se requiere más de tres veces el acero en el alma en el sitio investigado si se utiliza la expresión alterna que permite obtener el valor de V_c en forma directa.

19.15 ESFUERZO DE ADHERENCIA, LONGITUD DE TRANSFERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO

Existen dos fuentes independientes de esfuerzos de adherencia en vigas de concreto preesforzado: (1) adherencia por flexión, que se presenta en la construcción pretensada entre los tendones y el concreto, y en la construcción postensada inyectada entre los tendones y la lechada, y entre el conducto (si existe) y el concreto, y (2) adherencia por transferencia del preesfuerzo, aplicable por lo general sólo a elementos pretensados.

a. Adherencia por flexión

Los esfuerzos de adherencia por flexión surgen por los cambios de tensión a lo largo del tendón que resultan de las diferencias en los momentos flectores en secciones adyacentes. Son proporcionales a la tasa de cambio del momento flector y, por tanto, a la fuerza cortante, en determinada sección a lo largo de la luz. En secciones de concreto no fisuradas, el esfuerzo de adherencia por fricción es muy bajo; después del agrietamiento, es mayor en un orden de magnitud. Sin embargo, en el diseño de vigas de concreto preesforzado no es necesario tener en cuenta el esfuerzo de adherencia por flexión siempre y cuando se suministren anclajes apropiados para el tendón en los extremos, bien sea mediante anclaje mecánico (postensado) o empotramiento del torón (pretensado).

b. Longitud de transferencia y longitud de desarrollo

En vigas pretensadas, una vez que se libera la fuerza externa de los gatos, la fuerza de preesfuerzo se transfiere desde el acero hasta el concreto en las zonas cercanas a los extremos del elemento, mediante adherencia a lo largo de una distancia conocida como *longitud de transferencia*. La longitud de transferencia depende de varios factores, que incluyen el esfuerzo en el acero, la configuración de la sección transversal del acero (es decir, torones *versus* alambres), la condición de la superficie del acero y la velocidad con que se descarga la fuerza del gato. Con base en ensayos realizados sobre torones de preesfuerzo (ver la referencia 19.19), el preesfuerzo efectivo f_{pe} en el acero actúa a lo largo de una longitud de transferencia desde el extremo del elemento igual a

$$l_t = \frac{f_{pe}}{3} d_b \qquad (a)$$

donde l_t = longitud de transferencia, pulg
d_b = diámetro nominal del torón, pulg
f_{pe} = preesfuerzo efectivo, klb/pulg^2

Los mismos ensayos indican que la distancia adicional necesaria para desarrollar la resistencia a la falla del acero, más allá de la longitud de transferencia original, se representa bastante bien mediante la expresión

$$l'_t = (f_{ps} - f_{pe}) d_b \qquad (b)$$

donde la cantidad entre paréntesis es el incremento de esfuerzo por encima del nivel efectivo de preesfuerzo (en unidades de klb/pulg^2) necesario para alcanzar el esfuerzo del acero calculado en la falla f_{ps}. Así que, la longitud de desarrollo total en la falla es

$$l_d = l_t + l_t' \tag{c}$$

o

$$l_d = \left(f_{ps} - \frac{2}{3} f_{pe}\right) d_b \tag{19.54}$$

El Código ACI no exige que se verifique el esfuerzo de adherencia por flexión en los elementos pretensados ni en los postensados, pero requiere que se proporcione la longitud total de desarrollo dada por la ecuación (19.54), para los torones pretensados, más allá de la sección crítica a flexión. La verificación puede limitarse a las secciones transversales más cercanas a cada uno de los extremos del elemento; en éstas se necesita el desarrollo de la resistencia total a flexión bajo la carga última especificada.

19.16 DISEÑO DE LA ZONA DE ANCLAJE

En vigas de concreto preesforzado, la fuerza de preesfuerzo se introduce como una concentración de carga que actúa sobre una fracción relativamente pequeña de la altura total del elemento. En vigas postensadas con anclaje mecánico, la carga se aplica en la cara extrema mientras que en vigas pretensadas se introduce un poco más gradualmente a lo largo de la longitud de transferencia. En cualquier caso, la distribución de esfuerzos de compresión en el concreto se vuelve lineal, ajustándose a lo dispuesto por la excentricidad global de las fuerzas aplicadas, sólo después de una distancia desde el extremo aproximadamente igual a la altura de la viga.

Esta transición de esfuerzos longitudinales de compresión, de concentrados a distribuidos linealmente, genera esfuerzos transversales de tensión (verticales) que pueden producir agrietamiento longitudinal del elemento. El patrón y la magnitud de los esfuerzos en el concreto dependen de la localización y distribución de las fuerzas concentradas que aplican los tendones. Se han realizado numerosos estudios utilizando los métodos de elasticidad clásica, fotoelasticidad y análisis mediante elementos finitos y algunos resultados típicos se presentan en la figura 19.25. En este caso la viga se carga uniformemente a lo largo de una altura igual a $h/8$, con una excentricidad de $3h/8$. Se dibujan

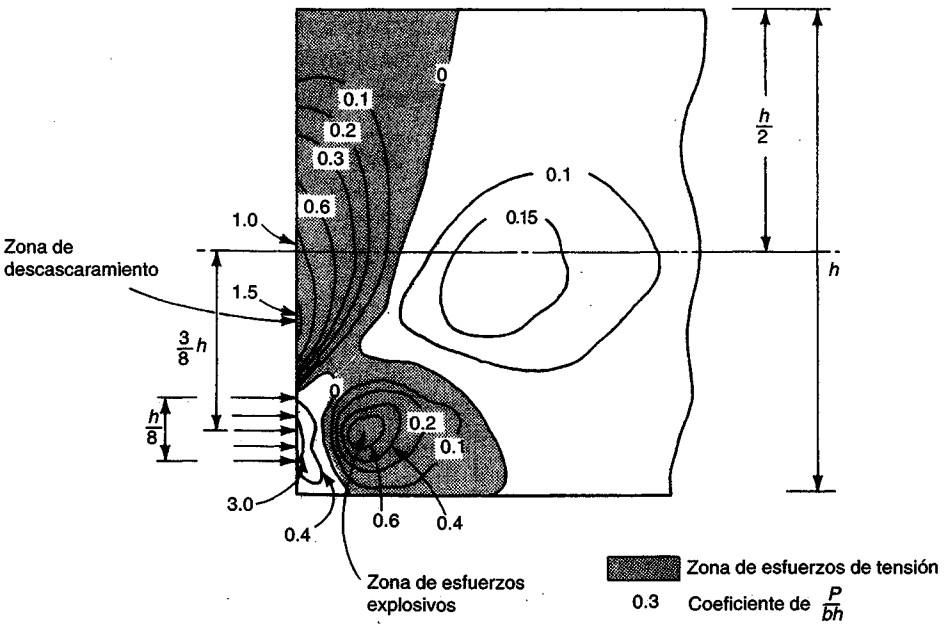


FIGURA 19.25
Contornos de esfuerzos verticales iguales (*adaptada de la referencia 19.14*).

líneas de contorno que unen los puntos de igual tensión vertical, con coeficientes que expresan la relación entre el esfuerzo vertical y la compresión longitudinal promedio. Comúnmente, se presentan grandes esfuerzos de carácter *explosivo* a lo largo del eje de la carga y a una distancia corta dentro de la zona extrema, y grandes esfuerzos de *descascaramiento* en la cara cargada.

En muchas vigas I preesforzadas y postensadas se suministran bloques extremos sólidos, como aparecen en la figura 19.26. Aunque éstos son a menudo necesarios para acomodar los dispositivos de anclaje en el extremo, en realidad son poco útiles para reducir la tensión transversal o para evitar el agrietamiento.

El acero de refuerzo para los esfuerzos de las zonas extremas puede constar de barras verticales de diámetro relativamente pequeño y poco espaciamiento, que deben estar bien ancladas en las partes superior e inferior del elemento. Por lo general, se utilizan estribos cerrados con barras horizontales auxiliares por dentro de los dobleces a 90°.

Un diseño racional del refuerzo en las zonas extremas debe reconocer la posibilidad de que ocurra agrietamiento horizontal. Si se proporciona el refuerzo apropiado que restrinja la longitud de las grietas a unas pocas pulgadas y el ancho de las mismas a 0.01 pulg o menos, estas grietas no serán perjudiciales para el comportamiento de la viga con las cargas de servicio o en estados de sobrecarga. Se debe observar que los esfuerzos en las zonas extremas, en vigas pretensadas y en vigas postensadas adheridas, no aumentan en proporción a las cargas. El esfuerzo de falla f_{ps} en el tendón en el momento de falla de la viga se alcanza únicamente en la sección de máximo momento.

Con base en ensayos publicados en la referencia 19.20, se propuso una ecuación muy sencilla para el diseño del refuerzo en las zonas extremas de *elementos pretensados*:

$$A_t = 0.021\frac{P_i h}{f_s l_t} \tag{19.55}$$

donde A_t = área total necesaria de la sección transversal de estribos, pulg^2
P_i = fuerza inicial de preesfuerzo, lb
h = altura total del elemento, pulg
f_s = esfuerzo admisible en los estribos, lb/pulg^2
l_t = longitud de transferencia, pulg

Mediante ensayos se ha encontrado que un esfuerzo admisible de f_s = 20,000 lb/pulg^2 produce anchos de grieta aceptablemente pequeños. El refuerzo requerido con un área total A_t debe distribuirse a lo largo de una longitud igual a $h/5$, medida desde la cara extrema de la viga, y para un control más efectivo del agrietamiento, el primer estribo debe colocarse tan cerca de la cara extrema como sea práctico. En la referencia 19.20 se recomienda suministrar refuerzo vertical de acuerdo con la ecuación (19.55) en *todos* los elementos pretensados, a menos que los ensayos o la experiencia indiquen que el agrietamiento no se presenta para las cargas de servicio o los estados de sobrecarga.

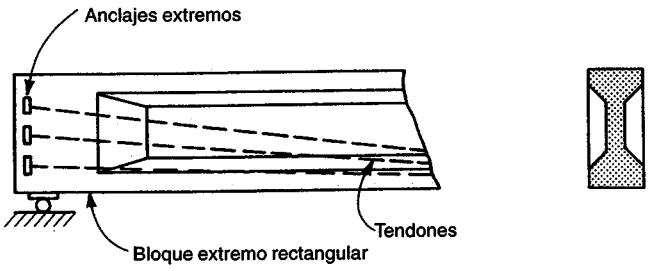
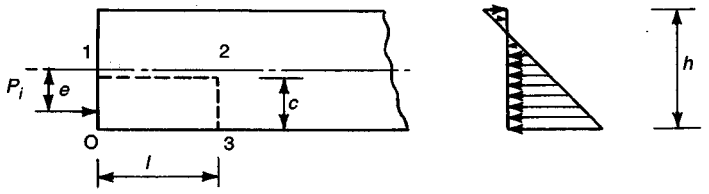


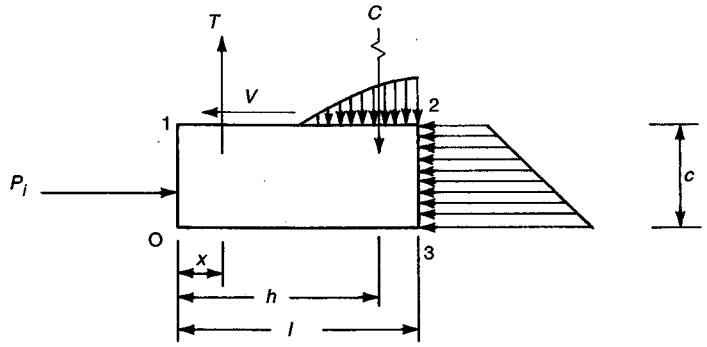
FIGURA 19.26
Viga I postensada con un bloque extremo rectangular.

Para *elementos postensados*, el refuerzo en las zonas extremas se diseña por lo general con base en un análisis de equilibrio de la zona de anclaje fisurada (ver la referencia 19.21). La figura 19.27*a* ilustra la zona extrema de una viga postensada, con preesfuerzo inicial P_i aplicado con una excentricidad e. A cierta distancia l del extremo, la distribución de esfuerzos de compresión es lineal. La figura 19.27*b* presenta las fuerzas y los esfuerzos que actúan sobre el cuerpo libre 0-1-2-3 limitado por los bordes de los elementos, por una grieta horizontal supuesta y por la cara extrema interna de la zona de anclaje.

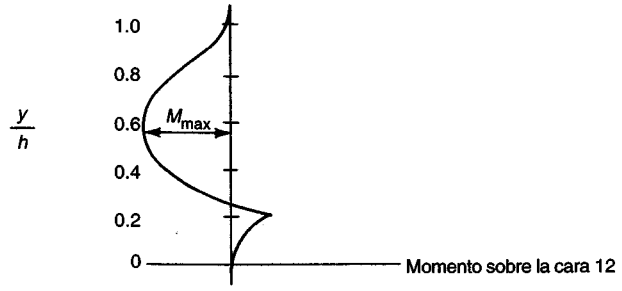
En general, las fuerzas horizontales producirán tanto un momento como una fuerza cortante en la cara 1-2. El cortante es resistido por el entrelazamiento de agregados y el momento resistente necesario lo provee la fuerza de tensión T del refuerzo y la resultante a compresión C la da el concreto, que se supone que actúa a una distancia h de la cara del extremo. La altura c del cuerpo libre, determinada por el nivel de la grieta, se establece a partir de la condición de que el momento generado por las fuerzas horizontales será máximo en el nivel donde se forma la grieta. En casos prácticos, los momentos se calculan para diferentes incrementos de la altura, empezando en la parte inferior de la viga, y se dibujan como una función de la distancia desde la parte inferior. En la figura 19.27*c* se ilustran resultados típicos.



(*a*) Extremo de la viga que indica la ubicación del cuerpo libre



(*b*) Fuerzas sobre el cuerpo libre



(*c*) Variación del momento con la altura

FIGURA 19.27
Análisis de la zona extrema de una viga postensada: (*a*) extremo de la viga que indica el cuerpo libre; (*b*) fuerzas sobre el cuerpo libre; (*c*) variación del momento con la altura.

A partir de este análisis se puede encontrar el área total requerida de acero de refuerzo:

$$A_t = \frac{M_{\max}}{f_s(h - x)} \tag{19.56}$$

donde f_s es el esfuerzo admisible los estribos (por lo general tomado como 20,000 lb/pulg^2), x es la distancia en pulgadas desde la cara extrema hasta el centroide del acero, y los otros términos son como se definieron previamente. En vigas postensadas deben proporcionarse estribos a lo largo de una distancia igual a $h/2$ desde la cara extrema para resistir la tensión calculada.

Además de los esfuerzos verticales de tensión que producen resquebrajamiento, la gran concentración de compresión longitudinal bajo las platinas de apoyo de los anclajes puede producir daños en las zonas extremas de vigas postensadas. En general, el subcontratista encargado del postensionamiento proporciona refuerzo especial en esta zona, más comúnmente en la forma de espiral, concéntrico con el anclaje del tendón y localizado directamente contra la platina de contacto (ver la referencia 19.22). Este refuerzo, cuya conveniencia la establece el fabricante mediante ensayos, mejora la resistencia del concreto por confinamiento, induciendo compresión triaxial. Para sistemas particulares debe buscarse la información específica.

De manera alternativa, la platina de contacto se puede dimensionar de modo que los esfuerzos de contacto sean adecuadamente bajos. El comentario del Código ACI 1995 hace referencia a ecuaciones que aparecieron por última vez en el comentario de 1983. De acuerdo con esta edición, el esfuerzo de contacto en el concreto, cuando actúa la fuerza inicial de preesfuerzo P_i, no debe exceder

$$f_b = 0.8 f'_{ci}\sqrt{\frac{A_2}{A_1} - 0.2} \quad \text{y} \quad \leq 1.25 f'_{ci} \tag{19.57a}$$

Después de tener en cuenta las pérdidas de preesfuerzo, el esfuerzo de contacto cuando actúa la carga P_e no debe exceder

$$f_b = 0.6 f'_c\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \quad \text{y} \quad \leq f'_c \tag{19.57b}$$

En estas ecuaciones, A_1 es el área de contacto de la platina de anclaje y A_2 es el área máxima de la porción de la superficie de anclaje geométricamente similar y concéntrica con el área de la platina de anclaje.

Ejemplo 19.7. Diseño del refuerzo en la zona extrema de una viga postensada. Debe diseñarse el refuerzo en la zona extrema de la viga postensada rectangular que aparece en la figura 19.28*a*. Se aplica una fuerza de preesfuerzo inicial P_i de 250 klb mediante dos tendones que tienen una excentricidad de 10.5 pulg, produciendo esfuerzos longitudinales en el concreto que varían linealmente desde 2153 lb/pulg^2 a compresión en la parte inferior hasta 764 lb/pulg^2 a tensión en la parte superior. Se utilizarán estribos verticales cerrados, como se ilustra en la figura 19.28*b*, trabajando a un esfuerzo admisible de 20,000 lb/pulg^2.

Solución. Para propósitos del cálculo, la viga se dividirá en intervalos de 3 pulg de altura y se supondrá que el esfuerzo en el concreto, en el centro de cada intervalo, actúa uniformemente en toda la altura de este intervalo. Los valores están determinados en la figura 19.28*c*. Los momentos producidos por estos esfuerzos y por las fuerzas concentradas de los tendones se calculan a intervalos de 3 pulg, considerando positivos los momentos que actúan en el sentido de las agujas del reloj. Los resultados se determinan en la tabla 19.5 y aparecen dibujados en la figura 19.28*d*. Se observa que se obtiene un momento máximo de 388 klb-pulg actuando a una distancia de 15 pulg por encima de la parte inferior de la viga de tal manera que produce tensión cerca de la cara extrema (zona de descascaramiento).

Se supondrá que el centroide de las fuerzas de los estribos en una distancia igual a $h/2$ desde la cara extrema está a $x = 8$ pulg. Entonces, a partir de la ecuación (19.56), el área transversal requerida de refuerzo de la zona extrema es

$$A_t = \frac{388{,}000}{20{,}000(30 - 8)} = 0.88 \text{ pulg}^2$$

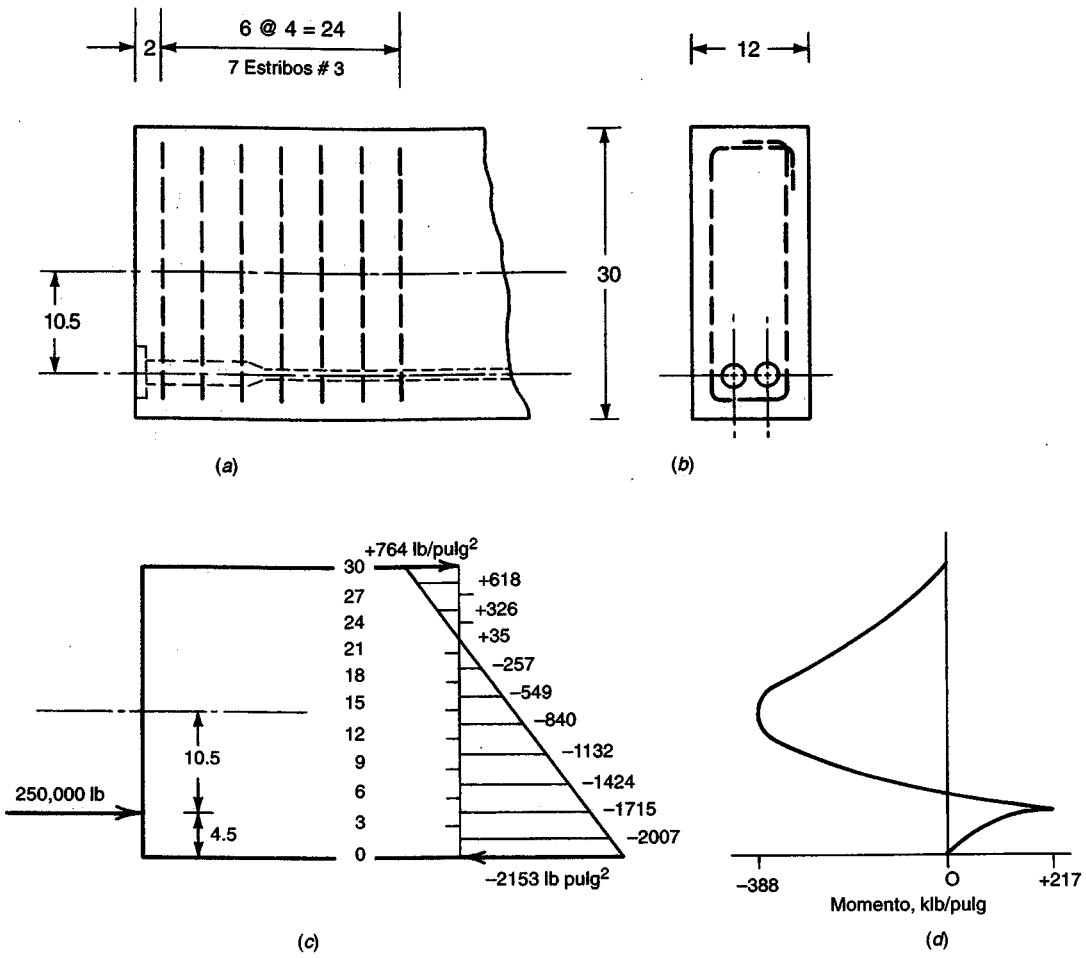


FIGURA 19.28
Diseño del refuerzo en la zona de anclaje: (*a*) zona extrema; (*b*) sección transversal; (*c*) fuerzas y esfuerzos; (*d*) momentos.

TABLA 19.5
Momentos en la sección horizontal del ejemplo de diseño de la zona extrema

Distancia desde la parte inferior, pulg	Momento de los esfuerzos en el concreto, klb-pulg	Momento de las fuerzas de preesfuerzo, klb-pulg	Momento neto, klb-pulg
0	0	0	0
3	108	0	108
4.5	217	0	217
6	418	−375	43
9	897	−1125	−228
12	1514	−1875	−361
15	2237	−2625	−388
18	3035	−3375	−340
21	3877	−4125	−248
24	4731	−4875	−144
27	5566	−5625	−59
30	6349	−6375	−26

Cuatro estribos cerrados No. 3 en forma de aro suministran un área de $4 \times 0.11 \times 2 = 0.88$ pulg^2, exactamente igual a la requerida. El primer estribo se colocará a 2 pulg de la cara extrema, seguido por tres estribos espaciados a 4 pulg dentro de la distancia $h/2 = 15$ pulg, como aparece en la figura 19.28*a*. Esto sitúa el centroide del acero a 8 pulg de la cara extrema, como se supuso.

Un segundo momento máximo, con signo opuesto y con un valor de 217 klb-pulg, se indica en la figura 19.28*d* con una tensión asociada al nivel de la fuerza de preesfuerzo y a cierta distancia hacia adentro desde la cara extrema (zona explosiva). La fuerza de tensión

$$T = \frac{217{,}000}{22} = 9860 \text{ lb}$$

puede absorberse mediante tres estribos adicionales, proporcionando un total de siete estribos No. 3, espaciados a 4 pulg. Se suministra entonces el refuerzo en la zona extrema expuesto en la figura 19.28*a*, a lo largo de una distancia aproximadamente igual a h desde la cara extrema. No se muestra el acero especial en espiral que coloca quien suministra los tendones y que está ubicado directamente contra el anclaje del tendón y concéntricamente con éste.

19.17 DEFLEXIÓN

La deflexión de las vigas esbeltas y relativamente flexibles que se pueden construir mediante la utilización del preesfuerzo debe estimarse cuidadosamente. Muchos elementos, satisfactorios desde todos los otros puntos de vista, han demostrado ser inservibles por su deformación excesiva. En algunos casos, el valor absoluto de la deflexión es excesivo. A menudo, la deformación diferencial entre elementos adyacentes (por ejemplo, unidades prefabricadas para tableros de cubiertas) es la que genera problemas. Con bastante frecuencia las dificultades que ocurren están asociadas con la deflexión hacia arriba producida por la carga sostenida de preesfuerzo. Tales dificultades se evitan con una consideración adecuada en el diseño.

Cuando se aplica por primera vez la fuerza de preesfuerzo, una viga presentará normalmente una contraflecha hacia arriba. Con el transcurso del tiempo, la retracción de fraguado y el flujo plástico del concreto producirán una reducción gradual de la fuerza de preesfuerzo; a pesar de esto, la deflexión hacia arriba aumentará por lo general a causa del flujo plástico diferencial, que afecta más las fibras inferiores sometidas a altos esfuerzos que las superiores. Con la aplicación de las cargas muerta y viva superpuestas, esta deflexión hacia arriba se balanceará parcial o totalmente y se obtendrá una deflexión nula o una deflexión hacia abajo. Es claro que, al calcular esta deformación, debe prestarse atención especial a la duración de la carga.

El estimativo de la deflexión puede realizarse con diferentes niveles de precisión, según la naturaleza e importancia del trabajo. En algunos casos es suficiente aplicar unos límites a la relación luz-altura, con base en las experiencias pasadas. En general, es necesario calcular las deflexiones (de acuerdo con el Código ACI, es preciso calcularlas para todos los elementos preesforzados). El método aproximado que se describe en este numeral resultará suficientemente preciso para la mayoría de los propósitos. En circunstancias especiales, donde es importante obtener la mejor información posible con relación a la deflexión en todos los estados importantes de carga, como en puentes de luces largas, el único método satisfactorio consiste en utilizar un procedimiento de sumas basado en incrementos de las deflexiones en intervalos discretos de tiempo, como se describe en las referencias 19.1, 19.23 y 19.24. De esta manera, pueden tenerse en cuenta los cambios dependientes del tiempo de la fuerza de preesfuerzo, las propiedades de los materiales y las cargas hasta el grado de precisión que se desee.

Normalmente, las deflexiones de principal interés son las que ocurren en el estado inicial, cuando la viga se somete al preesfuerzo inicial P_i y a su peso propio, y para una o más combinaciones de carga de servicio, cuando la fuerza de preesfuerzo se reduce al valor efectivo P_e a causa de las pérdidas. Las deflexiones cambian por el flujo plástico que ocurre con la fuerza de preesfuerzo sostenida y con todas las demás cargas sostenidas.

La deflexión a corto plazo Δ_{pi}, producto de la fuerza de preesfuerzo inicial P_i, puede determinarse con base en la variación del momento de preesfuerzo a lo largo de la luz, utilizando los principios del área de momentos. Para vigas estáticamente determinadas, las ordenadas del diagrama de momentos que resulta de la fuerza de preesfuerzo excéntrica son directamente proporcionales a la excentricidad de la línea del centroide del acero con respecto al centroide del concreto. En vigas indeterminadas, la excentricidad se debe medir hasta la línea de empuje en vez del centroide del acero (ver la referencia 19.1). En cualquier caso, el efecto del preesfuerzo también puede tratarse en términos de cargas equivalentes y las deflexiones se pueden hallar con las ecuaciones corrientes.

La deflexión hacia abajo Δ_o, por el peso propio de la viga, que es por lo general uniformemente distribuido, se encuentra mediante los métodos convencionales. Así que, la deflexión neta obtenida inmediatamente después del preesfuerzo es

$$\Delta = -\Delta_{pi} + \Delta_o \tag{19.58}$$

donde el signo negativo indica un desplazamiento hacia arriba.

Las deflexiones a largo plazo debidas al preesfuerzo ocurren a medida que la fuerza se reduce en forma gradual de P_i a P_e. Esto puede tenerse en cuenta de manera aproximada, suponiendo que el flujo plástico ocurre con una fuerza de preesfuerzo constante igual al promedio de los valores inicial y final. Consecuentemente con este supuesto, la deflexión total que resulta del solo preesfuerzo es

$$\Delta = -\Delta_{pe} - \frac{\Delta_{pi} + \Delta_{pe}}{2} C_c \tag{19.59}$$

donde

$$\Delta_{pe} = \Delta_{pi} \frac{P_e}{P_i}$$

y C_c es el coeficiente de flujo plástico para el concreto (ver la tabla 2.1).

La deflexión a largo plazo por el peso propio se incrementa también por el flujo plástico y se obtiene aplicando en forma directa el coeficiente de flujo plástico al valor instantáneo. Entonces, la deflexión total del elemento, después de las pérdidas y de las deflexiones por flujo plástico, cuando actúan el preesfuerzo efectivo y el peso propio, es

$$\Delta = -\Delta_{pe} - \frac{\Delta_{pi} + \Delta_{pe}}{2} C_c + \Delta_o(1 + C_c) \tag{19.60}$$

La deflexión producto de las cargas superpuestas puede ahora adicionarse, introduciendo el coeficiente de flujo plástico para tener en cuenta el efecto a largo plazo de las cargas sostenidas, con el fin de obtener la deflexión neta para la carga de servicio completa:

$$\Delta = -\Delta_{pe} - \frac{\Delta_{pi} + \Delta_{pe}}{2} C_c + (\Delta_o + \Delta_d)(1 + C_c) + \Delta_l \tag{19.61}$$

donde Δ_d y Δ_l son las deflexiones instantáneas generadas por las cargas muerta y viva superpuestas, respectivamente.

Puesto que los elementos permanecen práctica o totalmente no fisurados para los niveles de carga característicos de interés, los cálculos pueden basarse en las propiedades de la sección de concreto no fisurada. Si la tensión en la fibra inferior excede el módulo de rotura con la carga a la cual se va a encontrar la deflexión, los cálculos deben basarse en una curva bilineal carga-deformación, o la equivalente, cuyas pendientes se relacionan con el momento de inercia de las secciones transformadas no fisurada y fisurada.

Por lo general se utiliza un *momento efectivo de inercia* basado en un promedio ponderado de los momentos de inercia de las secciones no fisurada y fisurada (ver las referencias 19.1, 19.23 y 19.24).

Ejemplo 19.8. La viga T simplemente apoyada de 40 pies que aparece en la figura 19.29 se preesfuerza con una fuerza de 314 klb, utilizando un tendón parabólico que tiene una excentricidad de 3 pulg por encima del centroide del concreto en los apoyos y 7.9 pulg por debajo del centroide en el centro de la luz. Después de que ocurren las pérdidas dependientes del tiempo, este preesfuerzo se reduce a 267 klb. Además de su peso propio de 330 lb/pie lineal, la viga principal debe soportar una carga viva superpuesta de corta duración de 900 lb/pie lineal. Estime la deflexión para todos los estados críticos de carga. El coeficiente de flujo plástico $C_c = 2.0$, $E_c = 4 \times 10^6$ lb/pulg^2 y el módulo de rotura = 580 lb/pulg^2.

Solución. Se confirma que el esfuerzo en la fibra inferior, cuando la viga soporta la carga máxima que debe analizarse, es 80 lb/pulg^2 a compresión. Por tanto, todos los cálculos de deflexiones pueden basarse en el momento de inercia de la sección bruta de concreto, $I_c = 15{,}800$ pulg^4. Resulta conveniente calcular por separado la deflexión que generan el preesfuerzo y la carga sobre la viga, para superponer más tarde los resultados. Con las excentricidades del perfil del tendón mostradas en la figura 19.29*b*, la aplicación de $P_i = 314$ klb produce los momentos que aparecen en la figura 19.29*c* (los momentos están dados en unidades de lb-pulg). Aplicando el segundo teorema del área de momentos, se toman los momentos del diagrama *M/EI* entre el centro de la luz y el apoyo, con respecto al apoyo, para obtener el desplazamiento vertical deseado entre estos dos puntos, de la siguiente manera:

$$\Delta_{pi} = \frac{-(3.42 \times 10^6 \times 240 \times \frac{2}{3} \times 240 \times \frac{5}{8}) + (0.942 \times 10^6 \times 240 \times 120)}{4 \times 10^6 \times 15{,}800} = -0.87 \text{ pulg}$$

el signo negativo indica una deflexión hacia arriba por el solo preesfuerzo inicial. La deflexión hacia abajo, a causa del peso propio de la viga, se calcula mediante la ecuación

$$\Delta_o = \frac{5wl^4}{384EI} = \frac{5 \times 330 \times 40^4 \times 12^4}{384 \times 12 \times 4 \times 10^6 \times 15{,}800} = +0.30 \text{ pulg}$$

Cuando estos dos resultados se superponen, la deflexión neta hacia arriba, cuando actúan conjuntamente el preesfuerzo inicial y el peso de la viga, es

$$-\Delta_{pi} + \Delta_o = -0.87 + 0.30 = -0.57 \text{ pulg}$$

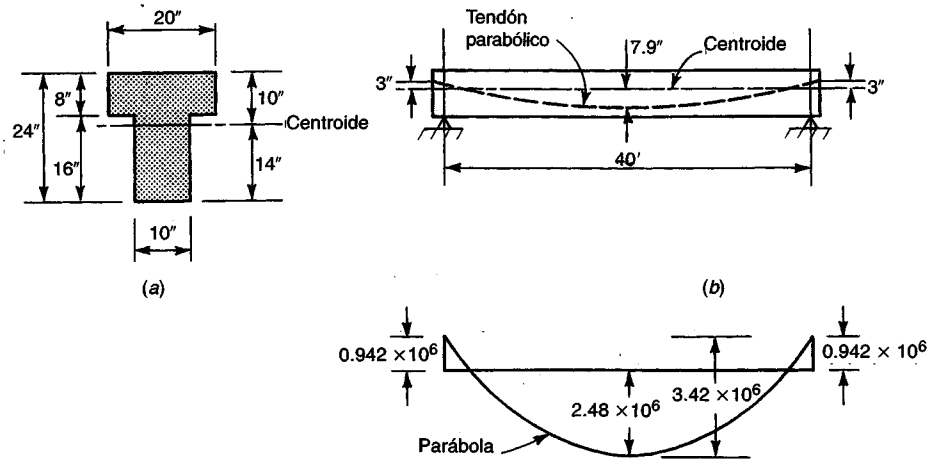


FIGURA 19.29
Viga T del ejemplo 19.8: (*a*) sección transversal; (*b*) perfil del tendón; (*c*) momento causado por la fuerza de preesfuerzo.

La retracción de fraguado y el flujo plástico del concreto producen una reducción gradual de la fuerza de preesfuerzo desde $P_i = 314$ klb hasta $P_e = 267$ klb y reducen en forma proporcional el momento flector ocasionado por el preesfuerzo. Sin embargo, el flujo plástico del concreto actúa para incrementar tanto la componente de deflexión hacia arriba, por la fuerza de preesfuerzo, como la componente de deflexión hacia abajo por la carga sobre la viga. La deflexión neta, después de que ocurren estos cambios, se encuentra a partir de la ecuación (19.60), con $\Delta_{pe} = -0.87 \times 267/314 = -0.74$ pulg:

$$\Delta = -0.74 - \frac{0.87 + 0.74}{2} \times 2.0 + 0.30(1 + 2.0)$$
$$= -0.74 - 1.61 + 0.90 = -1.45 \text{ pulg}$$

A pesar de la pérdida de preesfuerzo, la deflexión hacia arriba es considerablemente mayor que antes. Finalmente, a medida que se aplica la carga superpuesta de corta duración de 900 lb/pie lineal, la deflexión neta es

$$\Delta = -1.45 + 0.30\left(\frac{900}{330}\right) = -0.63 \text{ pulg}$$

Así, se obtiene una deflexión neta hacia arriba de aproximadamente 1/750 veces la luz, cuando el elemento soporta su carga superpuesta total.

REFERENCIAS

19.1. A. H. Nilson, *Design of Prestressed Concrete*, 2d ed., John Wiley, New York, 1987.
19.2. A. E. Naaman, *Prestressed Concrete Analysis and Design*, McGraw-Hill, New York, 1982.
19.3. T. Y. Lin and N. H. Burns, *Design of Prestressed Concrete Structures*, 3 ed., John Wiley, New York, 1981.
19.4. J. R. Libby, *Modern Prestressed Concrete*, 3d ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1984.
19.5. E. G. Nawy, *Prestressed Concrete*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
19.6. M. P. Collins and D. Mitchell, *Prestressed Concrete Structures*, Prentice Hall, Englewood Cliff, NJ, 1991.
19.7. *Post-Tensioning Manual*, 5th ed., Post-Tensioning Institute, Phoenix, Arizona, 1990.
19.8. *PCI Design Handbook*, 4th ed., Precast/Prestressed Concrete Institute, Chicago, Illinois, 1992.
19.9. P. W. Abeles, "Design of Partially Prestressed Concrete Beams", *J. ACI*, vol. 64, No. 10, 1967, pp. 669-677.
19.10. A. H. Nilson, "Discussion of Design of Partially Prestressed Concrete Beams' by P. W. Abeles" (referencia 19.9), *J. ACI*, vol. 65, No. 4, 1968, pp. 345-347.
19.11. P. W. Abeles and B. K. Bardhan-Roy, *Prestressed Concrete Designer's Handbook*, 3d ed., Cement and Concrete Association, London, 1981.
19.12. CEB-FIP Joint Committee, "International Recommendations for the Design and Construction of Prestressed Concrete Structures", Cement and Concrete Association, London, 1970.
19.13. "Code of Practice for the Structural Use of Concrete", CP 110, British Standards Institution, London, 1972.
19.14. Y. Guyon, *Limit State Design of Prestressed Concrete*, vols. 1 y 2, John Wiley, New York, 1972.
19.15. "Standard Specifications for Highway Bridges", 15th ed., American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, 1992.
19.16. "Recommendations for Estimating Prestress Losses", reported by PCI Committee on Prestress Losses, *J. Prestressed Concr. Inst.*, vol. 20, No. 4, 1975, pp. 43-75.
19.17. P. Zia, H. K. Preston, N. L. Scott, and E. B. Workman, "Estimating Prestress Losses", *Concr. Int.*, vol. 1, No. 6, 1979, pp. 32-38.
19.18. J. G. MacGregor and J. M. Hanson, "Proposed Changes in Shear Provisions for Reinforced and Prestressed Concrete Beams", *J. ACI*, vol. 66, No. 4, 1969, pp. 276-288.
19.19. N. W. Hanson and P. W. Kaar, "Flexural Bond Test of Pretensioned Prestressed Beams", *J. ACI*, vol. 30, No. 7, 1959, pp. 783-802.
19.20. W. T. Marshall and A. H. Mattock, "Control of Horizontal Cracking in the Ends of Pretensioned Prestressed Concrete Girders", *J. Prestressed Concr. Inst.*, vol. 5, No. 5, 1962, pp. 56-74.
19.21. P. Gergely and M. A. Sozen, "Design of Anchorage Zone Reinforcement in Prestressed Concrete Beams", *J. Prestressed Concr. Inst.*, vol. 12, No. 2, 1967, pp. 63-75.
19.22. W. C. Stone and J. E. Breen, "Design of Post-Tensioned Girder Anchorage Zones", *J. Prestressed Concr. Inst.*, vol. 29, No. 2, 1984, pp. 28-61.
19.23. "Deflection of Prestressed Concrete Members", Report by ACI Committee 435, *J. ACI*, vol. 60, No. 12, 1963, pp. 1697-1728.
19.24. D. E. Branson, *Deformation of Concrete Structures*, McGraw-Hill, New York, 1977.

PROBLEMAS

19.1. Una viga rectangular de concreto con ancho $b = 11$ pulg y altura total $h = 28$ pulg se postensiona utilizando un tendón parabólico sencillo que tiene una excentricidad de 7.8 pulg en el centro de la luz y de 0 pulg en el apoyo simple. La fuerza de preesfuerzo inicial es $P_i = 334$ klb y la relación de efectividad es $R = 0.84$. El elemento debe soportar las respectivas cargas muerta y viva superpuestas de 300 lb/pie lineal y 1000 lb/pie lineal, uniformemente distribuidas a lo largo de la luz de 40 pies. La resistencia especificada del concreto es $f'_c = 5000$ lb/pulg^2 y al momento de la transferencia $f'_{ci} = 4000$ lb/pulg^2. Determine las distribuciones de esfuerzos de flexión en el concreto en el centro de la luz (a) para las condiciones iniciales antes de aplicar la carga superpuesta y (b) para la carga de servicio total. Compare con los esfuerzos límite dados por el Código ACI.

19.2. Una viga preesforzada pretensada tiene una sección transversal rectangular de 6 pulg de ancho y 20 pulg de altura total. Se construye utilizando concreto de densidad normal con una resistencia de diseño $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y una resistencia en el momento de la transferencia de $f'_{ci} = 3000$ lb/pulg^2. Los límites en los esfuerzos son los siguientes: $f_{ti} = 165$ lb/pulg^2, $f_{ci} = -1800$ lb/pulg^2, $f_{ts} = 380$ lb/pulg^2 y $f_{cs} = -1800$ lb/pulg^2. La relación de efectividad R puede suponerse igual a 0.80. Para estas condiciones, determine la fuerza de preesfuerzo inicial P_i y la excentricidad e para maximizar el momento de las cargas superpuestas $M_d + M_l$ que se pueden soportar sin exceder los esfuerzos límite. ¿Qué carga uniformemente distribuida puede soportarse en una luz sencilla de 30 pies? ¿Qué perfil de tendón recomendaría usted?

19.3. Una viga pretensada debe soportar una carga muerta superpuesta de 600 lb/pie lineal y una carga viva de servicio de 1200 lb/pie lineal sobre una luz sencilla de 55 pies. Se utilizará una sección I simétrica con $b = 0.5h$. El espesor de las alas es $h_f = 0.2h$ y el ancho del alma es $b_w = 0.4b$. El elemento se preesforzará utilizando torones grado 270. Las pérdidas dependientes del tiempo se estiman en un 20 por ciento de P_i. Se utilizará concreto de densidad normal con $f'_c = 5000$ lb/pulg^2 y $f'_{ci} = 3000$ lb/pulg^2.

(a) Utilizando torones rectos, determine las dimensiones para el concreto, la fuerza de preesfuerzo y la excentricidad requeridas. Seleccione la cantidad y el tamaño apropiados de los tendones y muestre en un esquema su ubicación en la sección.

(b) Revise el diseño de la parte (a) utilizando tendones doblados en los tercios de la luz con una excentricidad reducida hasta cero en los apoyos.

(c) Comente sus resultados. En ambos casos deben aplicarse los límites de esfuerzos del Código ACI. Puede suponer que las deflexiones no son críticas y que es admisible un esfuerzo de tensión de $12\sqrt{f'_c}$ para la carga de servicio total.

19.4. Determine el espaciamiento requerido de estribos No. 3 en la sección transversal de una viga sometida a un cortante para cargas mayoradas V_u de 35.55 klb y un momento M_u de 474 klb-pie. El ancho del alma es $b_w = 5$ pulg, la altura efectiva es $d = 24$ pulg y la altura total es $h = 30$ pulg. La contribución al cortante por parte del concreto puede basarse en la relación aproximada de la ecuación (19.46). Utilice $f_y = 40{,}000$ lb/pulg^2 para el acero de los estribos y tome $f'_c = 5000$ lb/pulg^2.

19.5. Una viga I simétrica preesforzada con una altura total de 48 pulg, ancho del ala de 24 pulg, espesor del ala de 9.6 pulg y espesor del alma de 9.6 pulg va a salvar una luz de 70 pies. Se postensiona utilizando 18 torones grado 270 de media pulg de diámetro en un solo tendón con un perfil parabólico, con $e = 18$ pulg en el centro de la luz y cero en los apoyos (la curva puede aproximarse a un arco circular para el cálculo de las pérdidas). La fuerza del gato es $P_j = 618$ klb. Calcule las pérdidas producidas por el deslizamiento, el acortamiento elástico, la fricción, el flujo plástico, la retracción de fraguado y la relajación. Exprese sus resultados en forma tabular, como porcentajes del preesfuerzo inicial P_i. Puede suponer que los efectos del flujo plástico ocurren bajo la combinación de la fuerza de preesfuerzo y el peso propio. La viga se preesfuerza cuando el concreto tiene siete días de edad. El deslizamiento en el anclaje es = 0.25 pulg, el coeficiente de fricción del torón = 0.20, el coeficiente de fricción por desviación = 0.0010, el coeficiente de flujo plástico = 2.35. Las propiedades del elemento son las siguientes: $A_c = 737$ pulg^2, $I_c = 192{,}000$ pulg^4, $c_1 = c_2 = 24$ pulg, $f'_c = 5000$ lb/pulg^2, $E_c = 4{,}000{,}000$ lb/pulg^2, $E_s = 27{,}000{,}000$ lb/pulg^2, $w_c = 150$ lb/pie^3 y $C_c = 2.65$.

19.6. La viga T de concreto expuesta en la figura P19.6 se postensiona con una fuerza inicial $P_i = 229$ klb, la cual se reduce después de un año hasta un valor efectivo de $P_e = 183$ klb. Además de su peso propio, la viga soportará una carga viva superpuesta de corta duración de 21.5 klb en el centro de la luz. Utilizando el método aproximado de la sección 19.17, determine (a) la deflexión inicial para la viga sin carga y (b) la deflexión después de un año de estar cargada. Se conocen los siguientes datos: $A_c = 450$ pulg^2, $c_1 = 8$ pulg, $I_c = 24{,}600$ pulg^4, $E_c = 3{,}500{,}000$ lb/pulg^2, $C_c = 2.5$.

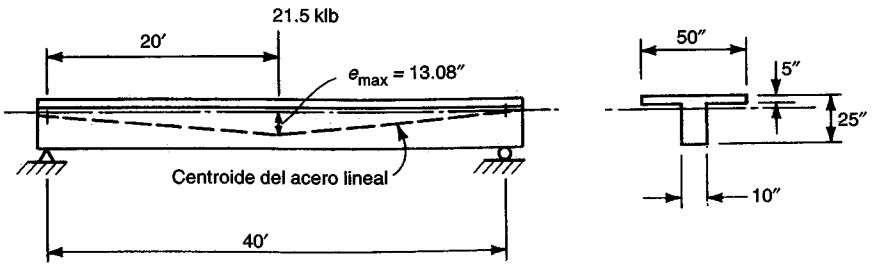


FIGURA P19.6

CAPÍTULO

20 DISEÑO SÍSMICO

20.1 INTRODUCCIÓN

Los terremotos son el resultado de un movimiento súbito de las placas tectónicas en la superficie terrestre. El movimiento ocurre en las líneas de falla, y la energía liberada se transmite a través de la tierra en forma de ondas que producen movimientos del terreno a muchas millas de distancia del epicentro. Las regiones adyacentes a las líneas de fallas activas son las más propensas a experimentar terremotos. El mapa de zonificación sísmica de los Estados Unidos que se muestra en la figura 20.1 se basa en registros históricos y toma en cuenta la frecuencia esperada y la intensidad de los terremotos en cada zona del país. Las zonas sísmicas desde la 0 hasta la 4 representan en forma progresiva severidades crecientes de intensidad sísmica esperada.

Desde el punto de vista de las estructuras, los terremotos consisten en movimientos aleatorios horizontales y verticales en la superficie de la tierra. A medida que el terreno se mueve, la inercia tiende a mantener la estructura en su sitio original (ver la figura 20.2), lo cual conlleva a la imposición de desplazamientos y de fuerzas que pueden tener resultados catastróficos. El propósito del diseño sísmico es dimensionar las estructuras de manera que éstas puedan resistir los desplazamientos y las fuerzas inducidas por el movimiento del terreno.

Históricamente, en Norteamérica el diseño sísmico ha hecho énfasis en el movimiento horizontal del terreno debido a que la componente horizontal de un terremoto excede en general la componente vertical y a que las estructuras son por lo general mucho más rígidas y resistentes para la respuesta ante cargas verticales en comparación con su respuesta ante cargas horizontales. La experiencia ha demostrado que las componentes horizontales son las más destructivas. Para el diseño estructural, la intensidad de un terremoto se describe en términos de la aceleración del terreno como una fracción de la aceleración de la gravedad, es decir, 0.1, 0.2 ó 0.3 g. Aunque la aceleración pico es un parámetro de diseño decisivo, las características de frecuencia y la duración de un terremoto son también importantes; mientras más cercana sea la frecuencia del terremoto a la frecuencia natural de una estructura y mientras mayor sea la duración del terremoto, mayor será el potencial de daño.

Considerando un comportamiento elástico, las estructuras sometidas a un sismo de magnitud considerable sufrirán también grandes desplazamientos. Sin embargo, en Norteamérica (ver la

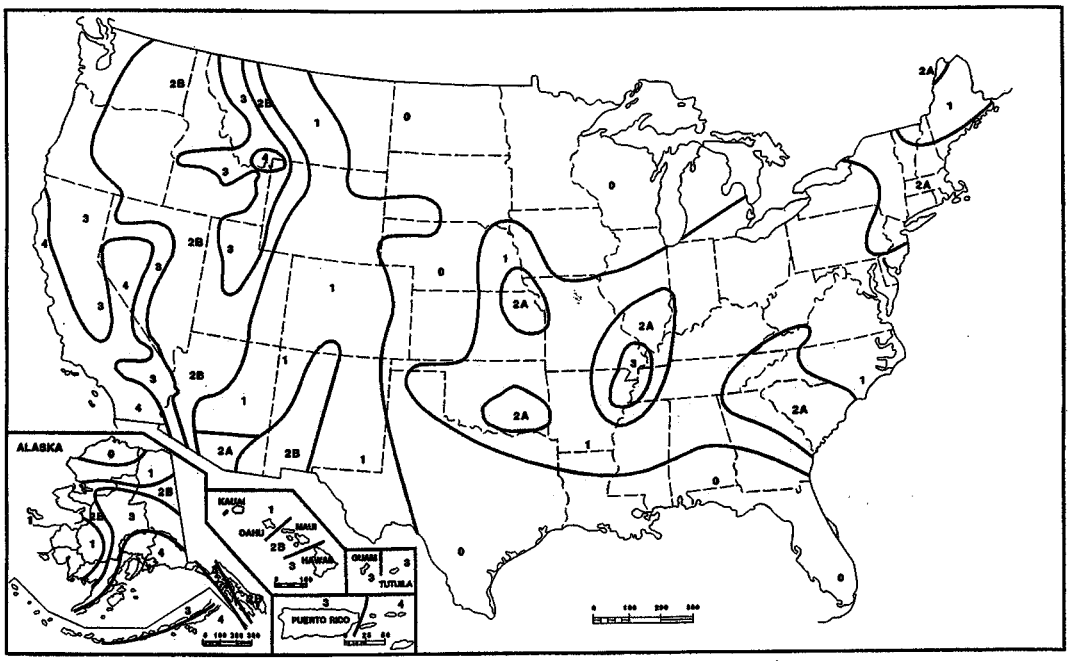


FIGURA 20.1
Mapa de zonificación sísmica de Estados Unidos (*reproducido, con permiso, de la referencia 20.1*).

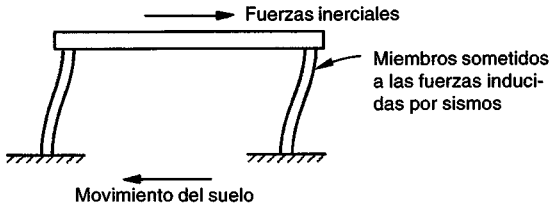


FIGURA 20.2
Estructura sometida al movimiento del terreno.

referencia 20.1) la práctica exige que el diseño de las estructuras se realice apenas para una fracción de las fuerzas asociadas con estos desplazamientos. Las fuerzas de diseño relativamente bajas se justifican con la observación de que edificios diseñados para fuerzas pequeñas se han comportado de manera satisfactoria y que las estructuras disipan una cantidad de energía significativa a medida que el material fluye y se comporta inelásticamente. Sin embargo, este comportamiento no lineal se traduce por lo general en desplazamientos aún mayores, lo cual puede dar lugar a daño no estructural de consideración y a una gran demanda de ductilidad. Por otro lado, los desplazamientos pueden llegar a ser de una magnitud tal que la resistencia de la estructura se vea afectada por consideraciones de estabilidad, tal como se discutió para las columnas esbeltas en el capítulo 9.

Por lo anterior, los diseñadores de estructuras que puedan estar sometidas a terremotos, se enfrentan a las siguientes posibilidades: (*a*) proporcionar una rigidez y una resistencia adecuadas para limitar la respuesta de las estructuras al rango elástico o (*b*) proporcionar estructuras de menor resistencia, a costos iniciales presumiblemente menores, que tengan la capacidad de soportar deformaciones inelásticas grandes manteniendo su capacidad de soportar carga.

20.2 RESPUESTA ESTRUCTURAL

La seguridad de una estructura sometida a carga sísmica se fundamenta en la comprensión del diseñador con respecto a la respuesta de la estructura al movimiento del terreno. Durante muchos

años la meta del diseño sismorresistente en Norteamérica era construir edificios que soportaran *sismos moderados sin daño y sismos severos sin colapso.* Los códigos de construcción han sufrido modificaciones frecuentes a medida que sismos de magnitud considerable han demostrado las debilidades en los criterios de diseños existentes.

El diseño sismorresistente se diferencia del diseño para cargas gravitacionales y de viento en la mayor sensibilidad relativa de las fuerzas inducidas por el sismo a la geometría de la estructura. Sin un diseño cuidadoso, las fuerzas y los desplazamientos pueden concentrarse en partes de la estructura incapaces de proporcionar la resistencia o ductilidad adecuadas. El hecho de rigidizar un elemento para un tipo de carga puede incrementar las fuerzas en el elemento y cambiar el modo de falla de dúctil a frágil.

a. Consideraciones estructurales

Mientras más cercana sea la frecuencia del movimiento del terreno a algunas de las frecuencias naturales de la estructura, mayor será la probabilidad de que ésta experimente el fenómeno de resonancia, lo que resulta en un aumento tanto de los desplazamientos como del daño. Por tanto, la respuesta sísmica depende fuertemente de las propiedades geométricas de la estructura, especialmente su altura. Edificios altos responden con más fuerza a movimientos del terreno de largo periodo (baja frecuencia) mientras que edificios pequeños responden más fuertemente a movimientos del terreno de corto periodo (alta frecuencia). La figura 20.3 muestra las formas de los modos de vibración principales de un pórtico estructural típico de tres pisos. La contribución relativa de cada modo al desplazamiento lateral de la estructura depende de las características de frecuencia del movimiento del terreno. El primer modo (ver la figura 20.3*a*) proporciona usualmente la mayor contribución al desplazamiento lateral. Mientras más alta sea la estructura, más susceptible será a los efectos de modos de vibración superiores, lo cual es aditivo a los efectos de los modos inferiores y tiene por lo general una mayor influencia en los pisos superiores. En cualquier circunstancia, mientras mayor sea la duración del terremoto mayor será su potencial de producir daño.

La configuración de una estructura también tiene un efecto importante en su respuesta ante los sismos. Estructuras con discontinuidades en la rigidez o en la geometría pueden verse sometidas a desplazamientos o fuerzas indeseablemente altas. Por ejemplo, la discontinuidad en muros de cortante, muros de relleno o aun muros de fachada en un nivel de piso particular, tal como se muestra en la figura 20.4, tendrá el resultado de concentrar el desplazamiento en el piso abierto o "blando". Este alto desplazamiento requiere, a su vez, una buena cantidad de ductilidad para que la estructura no falle. Este tipo de diseño no se recomienda, y los elementos rigidizantes deben

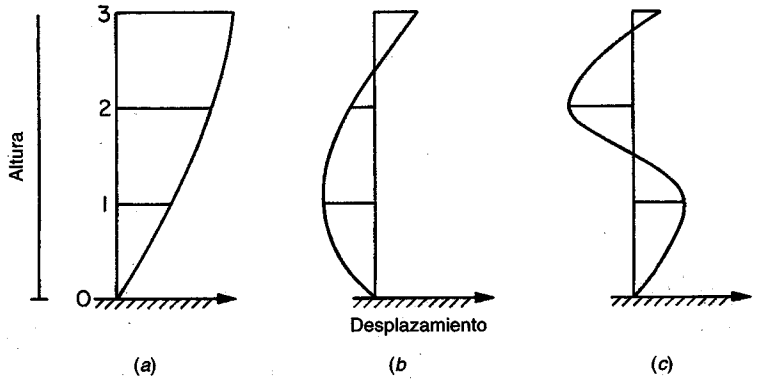


FIGURA 20.3
Formas modales de un edificio de tres pisos: (*a*) primer modo; (*b*) segundo modo; (*c*) tercer modo (*adaptado de la referencia 20.3*).

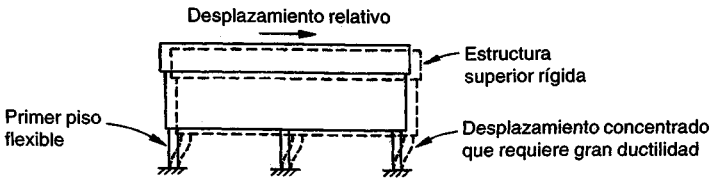


FIGURA 20.4
Primer piso blando que soporta una estructura superior más rígida.

prolongarse hasta la cimentación. Los problemas asociados con un piso blando se ilustran en la figura 20.5, la cual muestra una edificación después del terremoto de Armenia (Colombia) de 1999. La alta "demanda" de ductilidad no podía ser satisfecha por las columnas de la derecha las cuales tenían cantidades muy bajas de refuerzo transversal; aun las columnas del centro, con refuerzo transversal significativo, se comportaron mal debido a que tal refuerzo no se prolongaba dentro de la unión, lo que llevó a la formación de rótulas en los extremos de las columnas. La figura 20.6 ilustra irregularidades geométricas verticales y en planta, las cuales resultan en torsión inducida por el movimiento del terreno.

Dentro de una estructura, los elementos más rígidos tienden a absorber una porción mayor de la carga. Cuando se combina un pórtico con un muro de cortante esto puede tener el efecto positivo de reducir los desplazamientos de la estructura y de disminuir tanto los daños estructurales como los no estructurales. Sin embargo, cuando los efectos de elementos de mayor rigidez tales como muros de relleno en mampostería no se consideran en el diseño, pueden presentarse resultados inesperados y con frecuencia no deseados.

Finalmente, cualquier análisis relacionado con consideraciones estructurales sería incompleto si no se hiciera énfasis en la necesidad de proporcionar una separación adecuada entre las estructuras. Los desplazamientos laterales pueden resultar en contactos entre las estructuras durante el terremoto, ocasionando daños de consideración debido al golpeteo. La referencia 20.1 especifica espaciamientos requeridos para garantizar que las estructuras adyacentes no entren en contacto como resultado del movimiento sísmico inducido.



FIGURA 20.5
Daño a edificación como resultado del sismo de la ciudad de Armenia, Colombia.

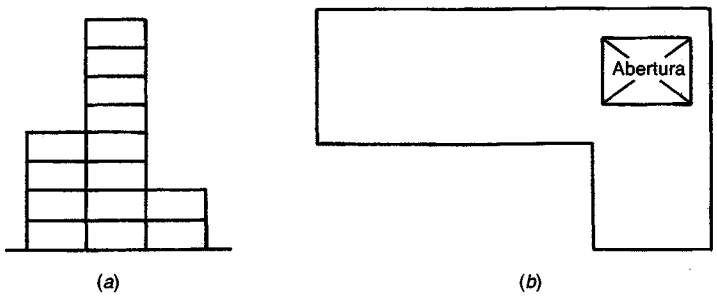


FIGURA 20.6
Estructura con (*a*) irregularidad geométrica vertical y (*b*) irregularidad en planta (*adaptada de la referencia 20.3*).

b. Consideraciones sobre los elementos

Los elementos diseñados para cargas sísmicas deben comportarse de una manera dúctil y deben disipar energía de manera que no comprometan la resistencia de la estructura. Para lograr este objetivo, es necesario considerar tanto el diseño global como los detalles estructurales.

El principal método para garantizar ductilidad en elementos sometidos a cortante y flexión es proporcionar confinamiento al concreto. Esto puede lograrse mediante "estribos" cerrados o refuerzo en espiral, los cuales encierran el núcleo de vigas y columnas. Los criterios específicos se discuten en las secciones 20.4, 20.5 y 20.6. Cuando están confinadas, las vigas y las columnas pueden soportar flexión cíclica no lineal manteniendo su resistencia a la flexión sin el deterioro que causaría el agrietamiento por tensión diagonal. La formación de rótulas dúctiles permite a los pórticos de concreto reforzado disipar energía.

El diseño sísmico de pórticos exitoso exige que las estructuras se dimensionen de manera que las rótulas ocurran en los sitios en que menos se vea comprometida la resistencia. Para un pórtico que deba soportar desplazamientos laterales, tal como se muestra en la figura 20.7*a*, la capacidad a flexión de los elementos en una unión (ver la figura 20.7*b*) debe ser tal que las columnas sean más

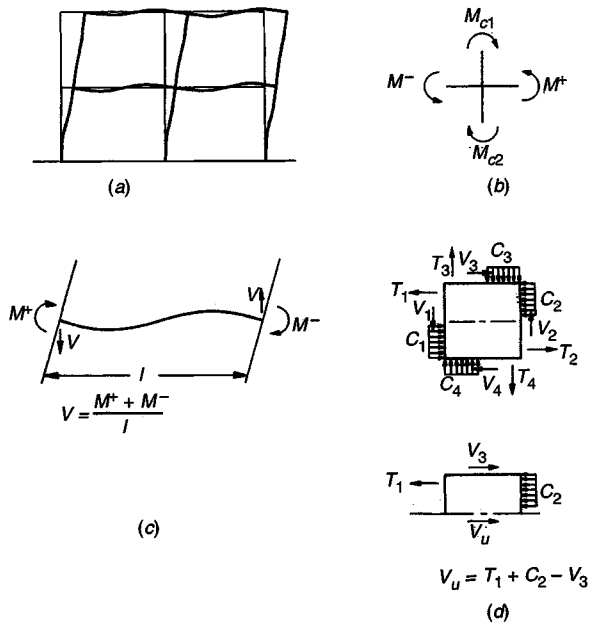


FIGURA 20.7
Pórtico sometido a carga lateral: (*a*) forma deflectada; (*b*) momentos actuantes en unión viga-columna; (*c*) forma deflectada y fuerzas actuantes en una viga; (*d*) fuerzas actuantes en el interior de una unión debidas a la carga lateral.

fuertes que las vigas; de esta manera, se formarán rótulas en las vigas en lugar de en las columnas minimizando así la porción de la estructura afectada por el comportamiento no lineal y manteniendo en forma global la capacidad de soporte de cargas verticales. Por estas razones, el enfoque de "viga débil-columna fuerte" se utiliza para diseñar pórticos de concreto reforzado sometidos a cargas sísmicas.

Cuando se forman rótulas en una viga, o en casos extremos dentro de la longitud de una columna, los momentos en los extremos del elemento que están gobernados por la resistencia a la flexión, determinan el cortante que debe ser soportado como se ilustra en la figura 20.7*c*. El cortante V, correspondiente a una falla a flexión en los dos extremos de una viga o columna es,

$$V = \frac{M^+ + M^-}{l} \tag{20.1}$$

donde M^+ y M^- = capacidades a flexión en los extremos del elemento
l = luz libre entre apoyos

Debe verificarse que el elemento sea adecuado para resistir el cortante V adicionalmente al cortante que resulta de las cargas muertas y vivas de gravedad. Se adicionará refuerzo transversal según se requiera. Para elementos con una capacidad a cortante no adecuada, la respuesta estará gobernada por la formación de grietas diagonales en lugar de rótulas dúctiles, obteniéndose así una reducción sustancial en la capacidad de disipación de energía del elemento.

Si se utilizan elementos cortos en un pórtico, éstos pueden resultar involuntariamente fuertes a flexión en comparación con su capacidad a cortante. Un ejemplo serían las columnas en una estructura con vigas de altura considerable o con muros "no estructurales" y con aberturas que exponen una porción de la columna a la carga lateral total. El resultado es una zona blanda local que responde sufriendo una falla por cortante.

El desplazamiento lateral de un pórtico somete a las uniones viga-columna a altos esfuerzos cortantes debido al cambio de flexión positiva a negativa de los elementos a flexión entre un lado de la unión y el otro, como se muestra en la figura 20.7*d*. La unión debe ser capaz de soportar los altos esfuerzos cortantes y permitir el cambio en los esfuerzos de la barra desde tensión hasta compresión entre las caras de la unión. Esta transferencia de cortante y de adherencia se dificulta por la congestión del refuerzo dentro de la unión. Por esta razón, los diseñadores deben verificar que las uniones no sólo tengan la resistencia adecuada sino que se puedan construir. Los sistemas en dos direcciones sin vigas son especialmente vulnerables debido a la baja ductilidad de las intersecciones losa-columna.

Las referencias 20.3, 20.4, 20.5, 20.6 y 20.7 presentan análisis adicionales con relación al diseño sísmico.

20.3 CRITERIOS PARA CARGAS SÍSMICAS

El principal documento de diseño en los Estados Unidos para zonas con alto riesgo sísmico es el Uniform Building Code (ver la referencia 20.1), el cual incorpora los criterios de diseño desarrollados por la Structural Engineers Association of California (ver la referencia 20.8). El mapa de zonificación sísmica que se muestra en la figura 20.1 ha sido tomado del Uniform Building Code (UBC).

El UBC permite el diseño de las estructuras considerando unas cargas laterales estáticas equivalentes o mediante un análisis de la respuesta dinámica de la estructura en el tiempo. El método utilizado para determinar las cargas depende de la zona sísmica y del tipo de estructura. El UBC clasifica el más simple entre dos posibles métodos de carga estática equivalente bajo el criterio de "fuerzas o cargas laterales mínimas de diseño", mientras que el más complejo de los métodos de carga estática equivalente, al igual que los análisis de respuesta en el tiempo, se especifican bajo "procedimientos de carga lateral dinámica".

a. Procedimientos de carga lateral mínima de diseño

Los procedimientos de carga lateral mínima de diseño del código UBC se utilizan para todas las estructuras en la zona sísmica 1, "para estructuras de ocupación estándar" en la zona sísmica 2 y para estructuras regulares de menos de 240 pies de altura y estructuras irregulares de no más de cinco pisos o 65 pies de altura en las zonas 3 y 4. Los procedimientos se utilizan también para estructuras que tengan una porción superior más flexible soportada por una porción inferior más rígida, si se satisfacen ciertos criterios específicos en cuanto a geometría y a rigidez. Para todas las demás estructuras deben utilizarse los procedimientos de carga lateral dinámica.

Los procedimientos de carga lateral mínima de diseño consideran el cálculo de una carga lateral total, definida como el cortante de diseño en la base, el cual se distribuye posteriormente en toda la altura del edificio. El cortante de diseño en la base, V, se calcula en una dirección dada de acuerdo con la ecuación

$$V = \frac{ZIC}{R_w} W \tag{20.2}$$

donde W= carga muerta sísmica total (carga muerta total más la porción aplicable de otras cargas)

R_w = coeficiente numérico que depende del sistema estructural. Los valores de R_w para estructuras de concreto varían de 4 a 12, con base en la habilidad del sistema estructural para soportar la carga sísmica y para disipar energía

Z = factor de zona sísmica = 0.075 para la zona 1, 0.15 para la zona 2A, 0.20 para la zona 2B, 0.30 para la zona 3 y 0.40 para la zona 4

I = factor de importancia = 1.25 ó 1.00, dependiendo de la categoría de ocupación

C = coeficiente basado en el coeficiente de sitio, S, y en el periodo de la estructura, T

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} \tag{20.3}$$

donde S depende del tipo de perfil de suelo y es igual a 1.0, 1.2, 1.5 ó 2.0 a medida que el perfil de suelo cambia desde condiciones tipo roca o suelo rígido (1.0) hasta arcillas blandas (2.0). De acuerdo con el UBC el periodo T se calcula utilizando uno de dos métodos. Se presenta únicamente el más simple de los dos.

$$T = C_t(h_n)^{3/4} \tag{20.4}$$

donde h_n = altura de la estructura en pies por encima del nivel de la base

C_t = 0.030 para pórticos de concreto reforzado resistentes a momento y pórticos arriostrados excéntricamente, y 0.020 para todos los otros edificios de concreto reforzado. Alternativamente, C_t para estructuras con muros de cortante en concreto o mampostería puede tomarse como $0.1/\sqrt{A_c}$, donde A_c es el área efectiva combinada en pie^2 de los muros de cortante en el primer piso de la estructura, calculada como

$$A_c = \Sigma A_e[0.2 + (D_e/h_n)^2] \tag{20.5}$$

donde A_e = área de la sección transversal mínima de un plano horizontal de un muro de cortante

D_e = longitud del muro de cortante en dirección paralela a las fuerzas aplicadas

h_n = altura del muro de cortante

D_e/h_n= en la ecuación (20.5) no debe exceder 0.9.

El cortante total de diseño en la base, V, se distribuye en la altura de la estructura de acuerdo con las ecuaciones (20.6), (20.7) y (20.8).

$$V = F_t + \sum_{i=1}^{n} F_i \tag{20.6}$$

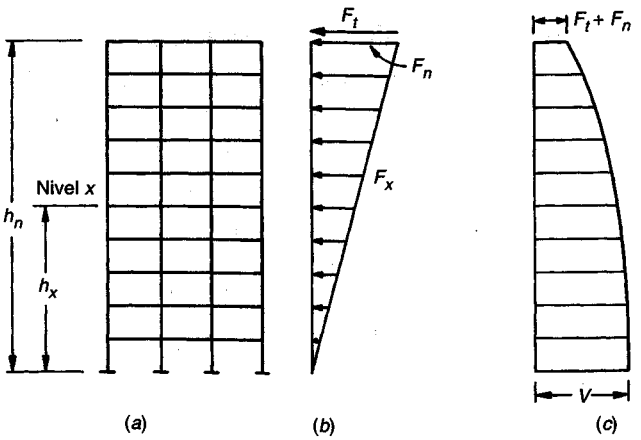


FIGURA 20.8
Fuerzas basadas en los procedimientos de carga lateral mínima de diseño de UBC (ver la referencia 20.1): (*a*) estructura; (*b*) distribución de las cargas laterales en la altura; (*c*) cortantes de piso.

donde F_t es la fuerza concentrada aplicada en la parte superior de la estructura

$$F_t = 0.07TV \leq 0.25V \qquad (20.7)$$
$$= 0 \text{ para } T \leq 0.7 \text{ sec}$$

La porción restante del cortante en la base se distribuye en la altura de la estructura incluyendo el nivel superior, n, de acuerdo con la expresión

$$F_x = \frac{(V - F_t)w_x h_x}{\sum_{i=1}^{n} w_i h_i} \qquad (20.8)$$

donde $w_x, w_i =$ porción de W en los niveles x e i
$h_x, h_i =$ altura hasta los niveles x e i

El cortante de diseño en cualquier piso, V_x, es igual a la suma de las fuerzas F_t y F_x por encima de ese piso. Para un edificio con una distribución de masa uniforme en la altura, las cargas laterales y los cortantes de piso se distribuyen como se muestra en la figura 20.8.

En cada nivel, V_x se distribuye en proporción a las rigideces de los elementos en el sistema vertical de resistencia a las cargas laterales. Para considerar las irregularidades no intencionales del edificio que pueden causar un momento de torsión horizontal, se aplica una excentricidad mínima del 5 por ciento si los elementos verticales de resistencia a fuerzas laterales están conectados mediante un sistema de piso que es rígido en su propio plano.

Además, el criterio descrito anteriormente, el UBC, incluye pautas para considerar los efectos de volcamiento y proporciona límites en las derivas de piso. Adicionalmente, deben considerarse los efectos $P\Delta$ (como se discutió en el capítulo 9) y tenerse en cuenta los efectos de cargas hacia arriba en el diseño de componentes horizontales en voladizo y elementos preforzados.

b. Procedimientos de carga lateral dinámica

Los procedimientos de carga lateral dinámica del UBC incluyen el uso de (*a*) respuesta espectral, la cual proporciona la máxima respuesta (usualmente aceleración) como una función del periodo o periodos de la estructura o (*b*) análisis de respuesta estructural en el tiempo basados en un movimiento de diseño en el terreno supuesto para el sitio particular. Ambos procedimientos exigen el desarrollo de un modelo matemático de la estructura para representar la distribución espacial de masas y rigideces. Los espectros de respuesta se utilizan para calcular fuerzas máximas obtenidas

para cada uno de los modos de vibración que van a tener una "contribución significativa a la respuesta estructural total" (ver la referencia 20.1). Debido a que estas fuerzas no actúan siempre en la misma dirección, tal como lo muestra la figura 20.3, las fuerzas máximas se promedian de manera estadística [usualmente valiéndose de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (ver la referencia 20.5)] para obtener las cargas laterales estáticas equivalentes para aplicar en el diseño. Cuando se utilizan análisis de respuesta en el tiempo, las fuerzas del diseño se obtienen directamente a partir de los análisis. Tanto los procedimientos de espectros de respuesta como los de respuesta en el tiempo proporcionan una representación más realista de las fuerzas sísmicas inducidas en una estructura que los procedimientos de carga lateral mínima de diseño. Los detalles de estos métodos se presentan en la referencia 20.1. La referencia 20.3 proporciona ejemplos que ilustran la aplicación de los procedimientos de diseño mínimo y de carga lateral dinámica.

20.4 DISPOSICIONES ESPECIALES DEL CÓDIGO ACI PARA EL DISEÑO SÍSMICO

Los criterios para el diseño sísmico están incluidos en el *Special Provisions for Seismic Design*, capítulo 21 del Código ACI (ver la referencia 20.9). El objetivo principal de las disposiciones especiales es garantizar una adecuada capacidad bajo los desplazamientos inelásticos oscilantes producidos por la carga sísmica. Las disposiciones cumplen con este objetivo exigiendo al diseñador proveer confinamiento para el concreto y capacidad de rotación inelástica. Las disposiciones se aplican a pórticos, muros, diafragmas y cerchas en zonas de "amenaza sísmica alta", correspondientes a las zonas 3 y 4 del UBC y a pórticos, incluyendo sistemas de losa en dos direcciones, en zonas de "amenaza sísmica moderada" correspondientes a la zona 2 del UBC. No se establecen requisitos especiales para estructuras sometidas a amenaza sísmica baja o nula.

Las disposiciones especiales del Código ACI se basan en muchas de las observaciones hechas anteriormente en este capítulo. Debe considerarse el efecto de elementos no estructurales en la respuesta global de la estructura, al igual que la respuesta de los elementos no estructurales mismos. También deben tenerse en cuenta los elementos estructurales que no están específicamente dimensionados para soportar cargas sísmicas.

Los factores de carga utilizados para las cargas sísmicas están dados en el Código ACI 9.2.3 y se resumen en la tabla 1.2 (de este libro); éstos se diferencian ligeramente de aquéllos requeridos por el UBC. Los coeficientes de reducción de resistencia utilizados en el diseño sísmico se especifican en el Código ACI 9.3.4. Estos factores corresponden a aquéllos utilizados para diseño no sísmico (tabla 1.3), con requisitos adicionales referentes a $\phi = 0.6$ para cortante, si la capacidad a cortante nominal de un elemento es menor que el cortante basado en la resistencia a flexión nominal [ver la ecuación (20.1)], y $\phi = 0.85$ para las uniones.

Para garantizar una adecuada ductilidad y capacidad bajo rotación inelástica, el Código ACI 21.2.4 especifica una resistencia del concreto mínima de 3000 lb/pulg^2. Para concreto con agregados ligeros, se establece un *límite superior* en la resistencia del concreto de 4000 lb/pulg^2; este límite se basa en una falta de evidencia experimental para concretos ligeros con resistencias mayores.

Según el Código ACI 21.2.5, el acero de refuerzo debe cumplir la norma ASTM A706 (ver la tabla 2.3). Dicha norma especifica aceros grado 60 con una resistencia máxima a la fluencia de 78 klb/pulg^2 y una resistencia mínima a la tensión igual a 80 klb/pulg^2. La resistencia de la tensión real debe ser al menos 1.25 veces la resistencia a la fluencia real. Adicionalmente al refuerzo fabricado bajo la norma ASTM A706, el Código permite la utilización de refuerzo grado 40 y 60 que cumpla con los requisitos de la norma ASTM A615, siempre y cuando la resistencia a la fluencia real no exceda la fluencia especificada en más de 18 klb/pulg^2 y que la resistencia a la tensión real exceda la resistencia a la fluencia real en al menos 25 por ciento. Los límites superiores en la resistencia de la fluencia se utilizan para limitar la máxima capacidad a momento de la sección debido a la dependencia del cortante inducido por el sismo de la capacidad a momento (ver la ecuación 20.1). La relación mínima de la resistencia a la tensión y la resistencia a la fluencia ayuda a suministrar una capacidad

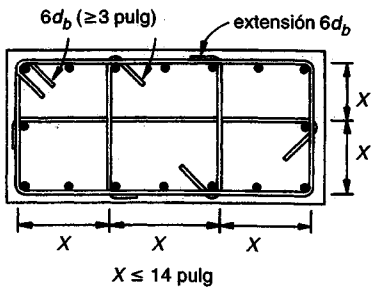


FIGURA 20.9
Ejemplos de refuerzo transversal en columnas; los amarres suplementarios consecutivos que se anclan a las mismas barras longitudinales deben tener ganchos a 90° en lados opuestos de la columna (*adaptado de la referencia 20.10*).

adecuada de rotación inelástica. Evidencia reportada en la referencia 20.11 indica que un incremento en la relación de momentos últimos a momentos de fluencia resulta en un incremento de la capacidad de deformación no lineal de elementos a flexión.

El confinamiento del concreto se proporciona mediante refuerzo transversal consistente en estribos, aros y amarres suplementarios. Para garantizar un anclaje adecuado, se utiliza un gancho sísmico [con un doblez no menor de 135° y una extensión de seis diámetros de barra (pero no menos de tres pulgadas) que agarra el refuerzo longitudinal y se proyecta al interior del estribo o aro] para estribos, aros y amarres suplementarios. Los aros que se muestran en las figuras 7.11*a*, *c*-*f* y 20.9 son estribos cerrados que pueden estar formados por varios elementos de refuerzo, cada uno con ganchos sísmicos en sus dos extremos o amarres continuos con ganchos sísmicos en los dos extremos. Un amarre suplementario (ver la figura 20.9) es una barra de refuerzo continua con un gancho sísmico en uno de los extremos, y con un gancho con un doblés de no menos de 90° y una extensión de al menos seis diámetros de barra en el otro extremo. Los ganchos en los amarres suplementarios deben anclarse a barras de refuerzo longitudinales de la periferia.

En las siguientes secciones se analizan los requisitos del Código ACI para pórticos, muros, diafragmas y cerchas sometidas a cargas sísmicas. Las secciones 20.5 y 20.6 describen los criterios generales de diseño y de despiece para elementos en estructuras diseñadas para zonas de amenaza sísmica alta. En la sección 20.7 se presentan requerimientos específicos de resistencia al cortante. La sección 20.8 describe los requisitos para pórticos en zonas de amenaza sísmica moderada.

20.5 DISPOSICIONES DEL CÓDIGO ACI PARA PÓRTICOS

El capítulo 21 del Código ACI hace referencia a cuatro tipos de elementos en estructuras aporticadas sometidas a amenaza sísmica alta: elementos a flexión, elementos sometidos a cargas de flexión y axiales, uniones y elementos no diseñados para resistir fuerzas sísmicas. Los sistemas de losa en dos direcciones sin vigas están prohibidos como estructuras de resistencia a cargas laterales en zonas de amenaza sísmica alta.

a. Elementos a flexión

De acuerdo con el Código ACI 21.3.1, los elementos a flexión se definen como elementos estructurales que resisten las fuerzas inducidas por el sismo pero que tienen una carga axial de compresión mayorada que no excede a $A_g f'_c/10$, donde A_g es el área bruta de la sección transversal. Los elementos deben tener una relación luz libre a espesor efectivo de al menos 4, una relación ancho a espesor de al menos 0.3 y un ancho del alma de no menos de 10 pulgadas ni más que el ancho del apoyo más $\frac{3}{4}$ del espesor del elemento a flexión a cada lado del apoyo. La relación mínima luz libre a espesor ayuda a garantizar que el comportamiento del elemento bajo las inversiones de carga inelástica esté gobernado por la resistencia a flexión en lugar de la resistencia a cortante. Las dimensiones mínimas del alma ayudan a garantizar

un confinamiento adecuado para el concreto, mientras que el ancho con relación al apoyo (por lo general una columna) está limitado para proporcionar una adecuada transferencia de momentos entre las vigas y las columnas.

De acuerdo con el Código ACI 21.3.2, se requiere una cantidad mínima de acero a flexión en la parte superior y en la parte inferior de las vigas. $A_{s,\min}$ no debe ser menor que el valor dado por la ecuación (3.40) pero no necesita ser mayor que $\frac{4}{3}$ del valor requerido por análisis, con un mínimo de dos barras de refuerzo, arriba y abajo, a lo largo de todo el elemento. Adicionalmente, la capacidad a momento positivo en la cara de las columnas debe ser al menos la mitad de la resistencia al momento negativo en la misma sección y la resistencia a momentos positiva o negativa en cualquier sección de un elemento no puede ser menor que $\frac{1}{4}$ de la máxima resistencia a momento en cualquiera de los extremos del elemento. Estos criterios están diseñados para garantizar un comportamiento dúctil de todo el elemento, aunque el requerimiento mínimo de dos barras de refuerzo en la parte superior y en la inferior está basado principalmente en requisitos de construcción. Se establece una cuantía de refuerzo máxima de 0.025 para limitar los problemas relacionados con la congestión del acero y para asegurar un tamaño adecuado de los elementos para soportar el cortante que está gobernado por la capacidad a flexión del elemento [ver la ecuación (20.1)].

Para obtener un comportamiento dúctil, se limita la ubicación de los empalmes por traslapo; éstos no pueden utilizarse dentro de las uniones, a menos de dos veces el espesor del elemento medido desde la cara de una unión o en cualquier otro lugar donde se espere fluencia por flexión como resultado de los desplazamientos laterales del pórtico. Los empalmes por traslapo deben encerrarse mediante aros o espirales con un espaciamiento máximo de $\frac{1}{4}$ del espesor efectivo o 4 pulgadas. Se pueden utilizar conexiones soldadas o mecánicas siempre y cuando en cada sección se empalmen como máximo la mitad de las barras en forma alternada en cada capa de refuerzo y que los empalmes en barras adyacentes estén escalonados al menos 24 pulgadas.

En pórticos resistentes a fuerzas inducidas por el sismo se requiere refuerzo transversal a lo largo de los elementos a flexión. De acuerdo con el Código ACI 21.3.3, debe utilizarse refuerzo transversal en la forma de aros a lo largo de una longitud igual a dos veces el espesor del elemento medida desde la cara del elemento de soporte hasta el centro de la luz, en los dos extremos del elemento a flexión y a lo largo de longitudes de dos veces el espesor del elemento a ambos lados de las secciones donde la fluencia a flexión pueda llegar a ocurrir en relación con los desplazamientos laterales inelásticos del pórtico. El primer aro debe localizarse a no más de dos pulgadas desde la cara del elemento de apoyo, y el espaciamiento máximo de los aros no debe exceder $\frac{1}{4}$ del espesor efectivo, ocho veces el diámetro de la barra longitudinal más pequeña, 24 veces el diámetro de las barras de los aros, o 12 pulgadas.

Para proporcionar un apoyo adecuado a las barras longitudinales en el perímetro de un elemento a flexión cuando las barras están sometidas a compresión debido a la rotación inelástica, el Código ACI 21.3.3 exige distribuir aros de manera que cualquier esquina y barras longitudinales alternas estén provistas de apoyo lateral mediante amarres, de acuerdo con el Código ACI 7.10.5.3. Las figuras 8.1 y 20.9 ilustran una distribución que cumple con estos criterios. Cuando no se requieren aros, deben proporcionarse estribos con ganchos sísmicos en los dos extremos a lo largo del elemento, con un espaciamiento máximo igual a la mitad del espesor efectivo. Los aros pueden conformarse mediante una barra de refuerzo simple o mediante dos barras de refuerzo consistentes en un estribo con ganchos sísmicos en los dos extremos y un amarre suplementario. En las figuras 7.11*a*, *c-f* y 20.9, se presentan ejemplos de aros de refuerzo.

b. Elementos sometidos a cargas de flexión y axiales

Para ayudar a garantizar la factibilidad constructiva y un confinamiento adecuado del concreto, el Código ACI 21.4.1 exige que los elementos en pórticos diseñados para resistir fuerzas inducidas por el sismo y que tengan una carga axial mayorada que exceda $A_g f'_c/10$, deben (*a*) tener una

dimensión mínima de la sección transversal de al menos 12 pulgadas medida sobre una línea recta que pase a través del centroide geométrico y (*b*) tener una relación de la dimensión más corta de la sección transversal y la dimensión perpendicular de al menos 0.4.

Para obtener un diseño de "viga débil-columna fuerte", el Código ACI 21.4.2 exige que las resistencias a flexión de diseño de las columnas que lleguen hasta una unión excedan las resistencias a flexión de diseño de las vigas que lleguen a la misma unión en al menos el 20 por ciento. Este requisito se expresa como

$$\Sigma M_e \geq \frac{6}{5} \Sigma M_g \tag{20.9}$$

donde ΣM_e = suma de los momentos en el centro de la unión, correspondientes a las resistencias a flexión de diseño de las columnas que lleguen hasta la unión. Los valores de M_e están basados en la carga axial mayorada, consistente con la dirección de las fuerzas laterales, que resulta en la menor resistencia a flexión

ΣM_g = la suma de los momentos, en el centro de la unión, correspondientes a las resistencias a flexión de diseño de las vigas que llegan hasta la unión

Como se muestra en la figura 20.7*b*, las resistencias a flexión se suman de manera que los momentos en las columnas se oponen a los momentos en las vigas. La ecuación (20.9) debe satisfacerse para momentos en vigas que actúan sobre la unión, tanto en dirección de las agujas del reloj como en dirección contraria.

Si la ecuación (ver la 20.9) no se cumple para momentos en vigas que actúan en las dos direcciones, las columnas deben cumplir todos los requisitos del Código ACI 21.4.4 (descritas más adelante) con respecto al refuerzo transversal pero no pueden considerarse como elementos que proporcionen resistencia o rigidez a la estructura, si estas adiciones ayudan a soportar la carga inducida por el sismo. Sin embargo, si la rigidez de las columnas aumenta el cortante de diseño en la base o los efectos de la torsión, éstas deben incluirse en el análisis pero aun así no deben considerarse como participantes en la capacidad estructural.

De acuerdo con el Código ACI 21.4.3, la cuantía de refuerzo de la columna basada en la sección transversal bruta, ρ_g, debe cumplir el requisito: $0.01 \leq \rho_g \leq 0.06$. Los empalmes soldados o las conexiones mecánicas en las columnas deben satisfacer los mismos requisitos especificados para elementos a flexión, mientras que los empalmes por traslapo deben diseñarse a tensión y se permiten sólo dentro de la mitad central de las columnas.

El Código ACI 21.4.4 especifica el uso de refuerzo transversal mínimo a lo largo de una longitud l_o medida a partir de la cara de la unión y a ambos lados de cualquier sección donde pueda presentarse fluencia por flexión debido al desplazamiento lateral inelástico del pórtico. La longitud l_o no debe ser menor que (*a*) el espesor del elemento en la cara de la unión o en la sección donde la fluencia de flexión pueda llegar a presentarse, (*b*) $\frac{1}{6}$ de la luz libre del elemento o (*c*) 18 pulgadas.

El refuerzo transversal mínimo se especifica en términos de la relación de volumen de dicho refuerzo al volumen del núcleo confinado por el refuerzo (medido fuera-a-fuera del acero de confinamiento), ρ_s, para refuerzo en espiral o aros circulares como

$$\rho_s = 0.12 \frac{f'_c}{f_{yh}} \tag{20.10}$$

no menos que lo especificado en la ecuación (8.5), donde f_{yh} es la resistencia a la fluencia especificada del refuerzo transversal.

Para proporcionar un confinamiento similar mediante el uso de aros de refuerzo rectangulares, el Código ACI 21.4.4 exige un área de la sección transversal total mínima del refuerzo transversal A_{sh} a lo largo de la longitud del refuerzo longitudinal.

$$A_{sh} = 0.3 \frac{s h_c f'_c}{f_{yh}} \left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) \tag{20.11}$$

pero no menos que

$$A_{sh} = 0.09\frac{sh_c f'_c}{f_{yh}} \qquad (20.12)$$

donde A_{ch} = área de la sección transversal del núcleo de la columna medido fuera-a- fuera del refuerzo transversal
s = espaciamiento del refuerzo transversal
h_c = dimensiones de la sección transversal del núcleo de la columna, medido centro-a-centro del refuerzo de confinamiento

Las ecuaciones (20.11) y (8.5) no necesitan cumplirse si el núcleo del elemento actuando solo proporciona la resistencia adecuada para resistir los efectos sísmicos. De acuerdo con el Código ACI 21.4.4, el espaciamiento del refuerzo transversal dentro de la longitud l_o no debe exceder $\frac{1}{4}$ de la dimensión mínima del elemento o 4 pulgadas, y los amarres suplementarios o ramas de los aros que se traslapan no deben estar espaciados a más de cuatro pulgadas como se muestra en la figura 20.9.

Para zonas por fuera de l_o, cuando no se proporcione el refuerzo transversal mínimo definido anteriormente, el espaciamiento del refuerzo en espiral o de los aros no debe exceder seis veces el diámetro de las barras longitudinales de la columna o 6 pulgadas.

Para considerar las mayores demandas de ductilidad impuestas sobre columnas que soportan elementos rígidos (ver las figuras 20.4 y 20.5), el Código especifica que, para tales columnas, los requisitos de refuerzo transversal mínimo deben satisfacerse a través de *la totalidad de la altura de la columna* y que el refuerzo transversal debe prolongarse hasta el elemento rígido discontinuo por al menos la longitud de desarrollo o del refuerzo longitudinal mayor para el caso de muros y en al menos 12 pulgadas dentro de la cimentación.

Ejemplo 20.1. Resistencias a la flexión relativa de elementos en una unión y refuerzo transversal mínimo en columnas. La unión exterior que se muestra en la figura 20.10 es parte de un pórtico de concreto reforzado diseñado para resistir cargas sísmicas. Se muestran las dimensiones de la sección de los elementos y el refuerzo. La altura entre pisos es de 12 pies. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. La carga axial mayorada máxima en la columna superior que llega hasta la unión es 1551 klb y la carga axial mayorada máxima en la columna inferior es 1645 klb. Determine si las resistencias a flexión de diseño de las columnas exceden a aquéllas de las vigas en al menos 20 por ciento tal como lo requiere la ecuación (20.9), y establecer el refuerzo transversal mínimo requerido a lo largo de la longitud l_o en las columnas.

Solución. Será suficiente la verificación de las resistencias a flexión relativas de las vigas continuas del pórtico ya que éste es claramente el caso que controla para la unión. Adicionalmente, debido a que el refuerzo en las vigas es el mismo a ambos lados de la unión, una comparación simple será suficiente para los momentos en la viga en dirección de las agujas del reloj y en dirección contraria.

La resistencia a flexión negativa de diseño de la viga en la unión está gobernada por el acero superior, cinco barras No. 10, $A_s = 6.33$ pulg^2. La fuerza de fluencia en el acero es

$$A_s f_y = 6.33 \times 60 = 380 \text{ klb}$$

El espesor efectivo es $d = 36.0 - 1.5 - 0.5 - 1.27/2 = 33.4$ pulg y con una profundidad del bloque de esfuerzo de $a = 380/(0.85 \times 4 \times 27) = 4.14$ pulg, el momento de diseño es

$$M_g = \phi M_n = 0.9\frac{380}{12}\left(33.4 - \frac{4.14}{2}\right) = 893 \text{ klb/pie}$$

La resistencia a flexión de diseño positiva para la viga en la unión se determina mediante el acero inferior, cinco barras No. 9, $A_s = 5.00$ pulg^2. La fuerza de fluencia en el acero es

$$A_s f_y = 5.00 \times 60 = 300 \text{ klb}$$

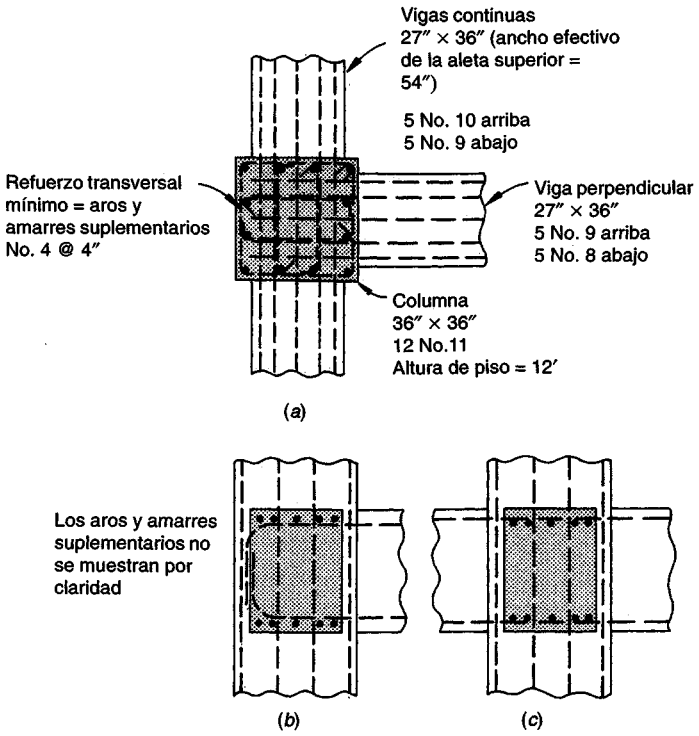


FIGURA 20.10
Unión viga-columna exterior de los ejemplos 20.1 y 20.2: (*a*) vista en planta; (*b*) sección transversal a través de las vigas continuas; (*c*) sección transversal a través de la viga perpendicular. Observe que no se muestra el refuerzo de confinamiento excepto para los aros y amarres suplementarios de la columna mostrados en (*a*).

El espesor efectivo es $d = 36.0 - 1.5 - 0.5 - 1.128/2 = 33.4$ pulg y, con una profundidad del bloque de esfuerzos de $a = 300/(0.85 \times 4 \times 54) = 1.63$ pulg, el momento de diseño es

$$M_g = \phi M_n = 0.9\frac{300}{12}\left(33.4 - \frac{1.63}{2}\right) = 733 \text{ klb/pie}$$

Las resistencias a flexión de diseño mínimas de las columnas en este ejemplo dependen de las cargas axiales mayoradas máximas, que son 1551 y 1645 klb para las columnas superior e inferior respectivamente. Para las columnas de 36 × 36 pulg, esto resulta en

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{1551}{1296} = 1.20 \text{ klb/pulg}^2 \text{ columna superior}$$

$$\frac{P_u}{A_g} = \frac{1645}{1296} = 1.27 \text{ klb/pulg}^2 \text{ columna inferior}$$

Con un refuerzo total de 12 barras No. 11, $A_{st} = 18.75$ pulg^2 y la cuantía de refuerzo $\rho_g = 18.75/1296 = 0.0145$. Utilizando un recubrimiento medido hasta el centro de las barras de tres pulgadas, $\gamma = (36 - 6)/36 = 0.83$, los gráficos A.7 y A.8 en el apéndice A son apropiados para determinar la capacidad a flexión.

Para la columna superior,

$$\frac{M_e}{A_g h} = \frac{\phi M_n}{A_g h} = 0.45 \text{ klb/pulg}^2$$

$$M_e = 0.45 \times 1296 \times \frac{36}{12} = 1750 \text{ klb/pie}$$

Para la columna inferior,

$$\frac{M_e}{A_g h} = \frac{\phi M_n}{A_g h} = 0.44 \text{ klb/pulg}^2$$

$$M_e = 0.44 \times 1296 \times \frac{36}{12} = 1710 \text{ klb/pie}$$

Verificando las capacidades relativas a flexión,

$$\Sigma M_e = 1750 + 1710 = 3460 \text{ klb/pie}$$

$$\Sigma M_g = 893 + 733 = 1626 \text{ klb/pie}$$

Mediante inspección, $\Sigma M_e \geq \frac{6}{5}\Sigma M_g$

Se requiere refuerzo transversal mínimo a lo largo de una longitud l_o a cada uno de los lados de la unión. De acuerdo con el Código ACI 21.4.4, l_o es la mayor de (*a*) el espesor h = 36 pulg, (*b*) $\frac{1}{6}$ de la luz libre = (12 × 12 − 36)/6 = 18 pulg, o (*c*) 18 pulg. Debido a que cada esquina y cada barra longitudinal alterna deben tener un soporte lateral, y debido a que el espaciamiento de los amarres suplementarios y de las ramas de los aros está limitado a un máximo de 14 pulgadas dentro del plano del refuerzo transversal, se utilizará el esquema que se muestra en la figura 20.10*a*. El espaciamiento máximo del refuerzo transversal está limitado al menor entre $\frac{1}{4}$ de la dimensión mínima del elemento = 36/4 = 9 pulg, o 4 pulg.

Utilizando barras No. 4, la dimensión de la sección transversal del núcleo de columna, medido centro-a-centro del acero de confinamiento, es h_c = 32.5 pulg, y el área de la sección transversal del núcleo de columna, medida fuera-a-fuera del acero de confinamiento es A_{ch} = 33 × 33 = 1089 pulg^2.

Para f_{yh} = 60 klb/pulg^2 el área total de refuerzo transversal con un espaciamiento de 4 pulg es la mayor entre las ecuaciones (20.11) y (20.12).

$$A_{sh} = 0.3\frac{4 \times 32.5 \times 4}{60}\left(\frac{1296}{1089} - 1\right) = 0.49 \text{ pulg}^2$$

$$A_{sh} = 0.09\frac{4 \times 32.5 \times 4}{60} = 0.78 \text{ pulg}^2$$

El requisito de 0.78 pulg^2 se satisface mediante cuatro ramas de barra No. 4.

c. Uniones y desarrollo del refuerzo

El diseño de las uniones viga-columna se presenta en la sección 10.2. En la figura 10.4 se ilustran las fuerzas que actúan sobre una unión sometida a cargas laterales. El cortante mayorado que actúa en una unión es

$$\begin{aligned} V_u &= T_1 + C_2 - V_{col} \\ &= T_1 + T_2 - V_{col} \end{aligned} \qquad (20.13)$$

donde T_1 = la fuerza de tensión en el acero de la viga para el momento negativo a un lado de la unión

T_2 = la fuerza de tensión en el acero de la viga para momento positivo en un lado de la unión

C_2 = la fuerza de compresión que contrarresta T_2

V_{col} = la cortante en la columna en las caras superior e inferior de la unión correspondientes al momento neto en la unión y a los puntos de inflexión a la mitad de la altura de la columna (ver la figura 10.5).

Para el diseño sísmico, las fuerzas T_1 y T_2 (= C_2) deben basarse en un esfuerzo en el refuerzo a tensión por flexión de $1.25f_y$. De acuerdo con el Código ACI 21.5.3, la capacidad a cortante nominal de una unión depende del grado de confinamiento proporcionado por los elementos que llegan hasta la unión.

Para uniones confinadas en las cuatro caras	$20\sqrt{f'_c}A_j$
Para uniones confinadas en tres caras o dos caras opuestas	$15\sqrt{f'_c}A_j$
Para otros casos	$12\sqrt{f'_c}A_j$

donde A_j es el área efectiva de la sección transversal de la unión en un plano paralelo al plano del refuerzo que genera cortante en la unión. El espesor de la unión es el espesor total de la columna. Para vigas que llegan hasta un apoyo de ancho mayor, el ancho efectivo de la unión es el menor de (a) ancho de viga más el espesor de la unión o (b) dos veces la distancia perpendicular más pequeña desde el eje longitudinal de la viga hasta el lado de la columna. El área efectiva de la unión se ilustra en la figura 20.11. La resistencia a cortante nominal para concreto con agregado ligero se limita a $\frac{3}{4}$ del valor dado anteriormente.

Para proporcionar un confinamiento adecuado dentro de la unión, el refuerzo transversal utilizado en las columnas debe prolongarse a través de la unión de acuerdo con el Código ACI 21.5.2. Este refuerzo puede reducirse hasta la mitad dentro del espesor del elemento de menor altura que llegue, y el espaciamiento de las espirales o aros puede aumentarse a 6 pulgadas, si las vigas principales que llegan hasta los cuatro lados de la unión y los elementos a flexión cubren al menos $\frac{3}{4}$ del ancho de la columna.

Para uniones donde la viga es más ancha que la columna, se proporciona refuerzo transversal como el que se requiere para columnas (Código ACI 21.4.4) para confinar el acero a flexión en la viga, a menos que el confinamiento esté proporcionado por un elemento a flexión transversal.

Para proporcionar un desarrollo adecuado al refuerzo de la viga que pasa a través de la unión, el Código ACI 21.5.1 exige que la dimensión de la columna en dirección paralela al refuerzo de la viga debe ser de al menos 20 veces el diámetro de la mayor barra longitudinal para concreto de peso normal y 26 veces el diámetro de barra para concreto ligero. Para el refuerzo longitudinal de la viga que se termine dentro de una columna, tanto el refuerzo con gancho como el refuerzo recto deben extenderse hasta la cara más alejada del núcleo de la columna. El refuerzo debe anclarse en compresión de acuerdo con el capítulo 12 del Código ACI y anclarse a tensión de cuerdo con el Código ACI 21.5.4, el cual exige que la longitud de desarrollo de las barras con ganchos a 90° l_{dh} no debe ser menor que 8 d_b, 6 pulg, o

$$l_{dh} = \frac{f_y d_b}{65\sqrt{f'_c}} \tag{20.14}$$

Para concreto con agregados ligeros, estos valores son, respectivamente, 10 d_b, 7.5 pulg y 1.25 veces el valor de la ecuación (20.14). El gancho a 90° se debe localizar dentro del núcleo confinado de la columna.

Para barras rectas ancladas dentro del núcleo de la columna, la longitud de desarrollo de l_d las barras inferiores debe ser al menos 2.5 veces el valor requerido para ganchos; l_d para las barras superiores debe ser al menos 3.5 veces la longitud requerida para ganchos.

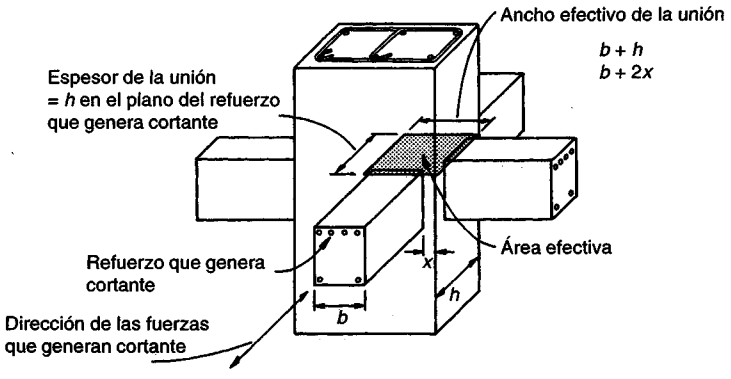


FIGURA 20.11
Área efectiva de la unión, A_j, que debe considerarse en forma independiente para fuerzas en cada una de las direcciones. Observe que la unión que se ilustra no cumple necesariamente las condiciones para considerarse como confinada debido a que los elementos que llegan no cubren al menos $\frac{3}{4}$ de cada una de las caras de la unión (*adaptada de la referencia 20.10*).

De acuerdo con el Código ACI 21.5.4, las barras rectas que terminen en una unión deben pasar a través del núcleo confinado de una columna o de un elemento de borde (como se analiza en la sección 20.6). Debido al menor grado de confinamiento proporcionado por fuera de la zona confinada, el Código exige que cualquier porción de la longitud recta de empotramiento que no esté dentro del núcleo debe aumentarse en un factor de 1.6. Así, la longitud de desarrollo requerida l_{dm} de una barra que no está totalmente embebida en concreto confinado es

$$l_{dm} = 1.6(l_d - l_{dc}) + l_{dc} \tag{20.15a}$$

$$l_{dm} = 1.6l_d - 0.6l_{dc} \tag{20.15b}$$

donde l_d = longitud de desarrollo requerida para una barra recta embebida en concreto confinado
l_{dc} = longitud embebida en concreto confinado

Ejemplo 20.2. Diseño de una unión exterior. Diseñe la unión mostrada en la figura 20.10.

Solución. Como se analizó en el capítulo 10, una unión debe detallarse de manera que las barras de las vigas y columnas no interfieran entre sí, y de manera que la colocación y consolidación del concreto sea práctica. La colocación de las barras se presenta en la figura 20.10.

El desarrollo del acero a flexión de la viga que continúa a través de la unión se verifica con base en los requisitos de que la dimensión de la columna debe ser al menos 20 veces el diámetro de barra de las barras mayores. Este requisito se cumple para las barras No. 10 utilizadas como refuerzo superior.

$$20 \times 1.27 = 25.4 \text{ pulg} < 36 \text{ pulg}$$

El acero a flexión en la viga perpendicular debe anclarse dentro del núcleo de la columna con base en la ecuación (20.14), pero no menos de $8d_b$ o 6 pulg. Para las barras superiores No. 9, la ecuación (20.14) controla

$$l_{dh} = \frac{60,000 \times 1.128}{65\sqrt{4000}} = 16.5 \text{ pulg}$$

Lo mismo resulta cierto para las barras inferiores No. 8, que también deben anclarse a tensión (Código ACI 12.11.2) debido a que la carga lateral va a someter a la viga a momentos de flexión tanto positivos como negativos en la unión exterior.

$$l_{dh} = \frac{60,000 \times 1.0}{65\sqrt{4000}} = 14.6 \text{ pulg}$$

Puesto que la longitud disponible es menor que $3.5\, l_{dh}$ para las barras superiores y que $2.5l_{dh}$ para las barras inferiores, todo el acero a flexión de la viga perpendicular debe anclarse utilizando ganchos, y no refuerzo recto, extendiéndolo hasta la cara lejana del núcleo de columna como se muestra en la figura 20.10*b*.

Para verificar la resistencia a cortante de la unión, se calculan las fuerzas cortantes que actúan sobre la unión con base en un esfuerzo de $1.25f_y$ en el refuerzo a flexión. Por inspección, controlará el cortante en el plano de la viga que continúa.

La fuerza de tensión en el acero negativo es

$$T_1 = 1.25 \times 6.33 \times 60 = 475 \text{ klb}$$

Para un espesor efectivo de 34.4 pulg (ejemplo 20.1) y una profundidad del bloque de esfuerzos de $a = 475/(0.85 \times 4 \times 27) = 5.17$ pulg, el momento debido a flexión negativa es

$$M^- = \frac{475}{12}\left(33.4 - \frac{5.17}{2}\right) = 1220 \text{ klb-pie}$$

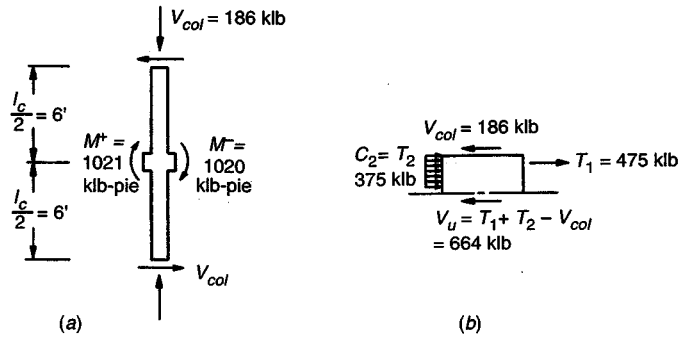


FIGURA 20.12
Diagramas de cuerpo libre en el plano de la viga que continúa del ejemplo 20.2: (*a*) columna y zona de la unión; (*b*) fuerzas que actúan en la unión debido a cargas laterales.

Para flexión positiva al otro lado de la columna,

$$T_2 = 1.25 \times 5.00 \times 60 = 375 \text{ klb}$$

$$a = \frac{375}{0.85 \times 4 \times 54} = 2.04 \text{ pulg}$$

$$M^+ = \frac{375}{12}\left(33.4 - \frac{2.04}{2}\right) = 1012 \text{ klb/pie}$$

El cortante en la columna, correspondiente a la suma de los momentos M^+ y M^-, basado en el diagrama de cuerpo libre de la columna entre los puntos supuestos de inflexión a la mitad de la altura, como se muestra en la figura 20.12*a*, es $V_{col} = (1220 + 1012)/12 = 186$ klb. Las fuerzas cortantes que actúan sobre la unión se muestran en la figura 20.12*b* y el cortante mayorado de la unión es

$$V_u = T_1 + T_2 - V_{col} = 475 + 375 - 186 = 664 \text{ klb}$$

Para una unión confinada en tres caras con una área efectiva de la sección transversal de $A_j = 36 \times 36 = 1296$ pulg^2, las capacidades nominales y de diseño en la unión son

$$V_n = 15\sqrt{f'_c}A_j = \frac{15\sqrt{4000} \times 1296}{1000} = 1229 \text{ klb}$$

$$\phi V_n = 0.85 \times 1229 = 1045 \text{ klb}$$

Debido a que $\phi V_n > V_u$, la unión es satisfactoria desde el punto de vista de cortante.

Como la unión no está confinada en los cuatro lados, el refuerzo transversal en la columna debe continuarse, de manera inalterada, a través de la unión.

d. Elementos no diseñados para resistir fuerzas sísmicas

Los elementos de pórticos en estructuras diseñadas para cargas sísmicas que no están proporcionados para resistir fuerzas sísmicas deben ser capaces de soportar las cargas gravitacionales para las cuales están diseñados a medida que la estructura se desplaza lateralmente. Para proporcionar una resistencia y ductilidad adecuadas, el Código ACI 21.7.1 exige que estos elementos se diseñen con base en los momentos correspondientes a desplazamientos laterales iguales al doble de los calculados para las cargas laterales mayoradas.

Cuando los momentos y cortantes inducidos, en combinación con los momentos y cortantes gravitacionales mayorados (ver la tabla 1.2), no exceden la capacidad de diseño de un elemento de pórtico, el Código ACI 21.7.2 exige que los elementos con una fuerza axial gravitacional mayorada por debajo de $A_g f'_c/10$ tengan el refuerzo longitudinal mínimo superior e inferior dado en la ecuación (3.40), su cuantía de refuerzo no sea mayor que 0.025 y tengan al menos dos barras continuas en la parte superior e inferior. Además, se exigen estribos con un espaciamiento máximo de $d/2$ a todo lo largo del elemento.

Para elementos cuyas fuerzas axiales gravitacionales mayoradas exceden $A_g f'_c/10$ el refuerzo longitudinal debe cumplir los requisitos para columnas dados para cargas sísmicas, y el refuerzo transversal debe estar conformado por aros y amarres suplementarios, tal como se utiliza para columnas diseñadas para cargas sísmicas [como lo exige el Código ACI 21.4.4.1 (3) y 21.4.4.3]. El espaciamiento longitudinal máximo del refuerzo transversal s_o no debe ser mayor que seis veces el diámetro de la barra longitudinal más pequeña o seis pulgadas, en toda la altura de la columna. Adicionalmente, el refuerzo transversal debe soportar el cortante inducido por rotación inelástica en los extremos del elemento, como lo exige el Código ACI 21.4.5 (presentado en la sección 20.7). Los elementos con fuerzas axiales gravitacionales mayoradas que excedan el 35 por ciento de la capacidad axial sin excentricidad, $0.35P_o$, deben diseñarse con refuerzo transversal igual, al menos, a la mitad del especificado en el Código ACI 21.4.4.1 [ver ecuaciones (20.11), (20.12) y (20.13)].

Si los momentos o cortantes inducidos bajo desplazamientos laterales, que son iguales al doble de los calculados para las fuerzas laterales mayoradas, exceden las resistencias a momento o a cortante de diseño, o si este cálculo no se realiza, el Código ACI 21.7.3 exige que los elementos cumplan con los criterios para el concreto y el acero según el Código ACI 21.2.4 y 21.2.5 (ver la sección 20.4), conjuntamente con los criterios para empalmes soldados y refuerzo conectado mecánicamente (Código ACI 21.2.6). En elementos del pórtico cuya carga axial gravitacional mayorada esté por debajo de $A_g f'_c/10$, el criterio de refuerzo mínimo especificado en el Código ACI 21.7.2 debe cumplirse, conjuntamente con el requisito de que la capacidad a cortante del elemento debe ser adecuada para soportar las fuerzas inducidas por la fluencia a flexión bajo el criterio del Código ACI 21.3.4 [ver la figura 20.13 y ecuación (20.17) de la sección 20.7]. Para elementos con fuerzas axiales gravitacionales mayoradas que excedan $A_g f'_c/10$ deben cumplirse todos los requisitos para refuerzo transversal y capacidad a cortante especificados para columnas diseñadas para carga lateral inducida por sismo. Además, el refuerzo transversal de columna debe continuarse dentro de las uniones, tal como lo exige el Código ACI 21.5.2 (ver la sección 21.5c) para pórticos en zonas de amenaza sísmica alta.

20.6 DISPOSICIONES DEL CÓDIGO ACI PARA MUROS ESTRUCTURALES, DIAFRAGMAS Y CERCHAS

En el capítulo 21, el Código ACI incluye requisitos para sistemas y elementos estructurales rígidos que soportan fuerzas sísmicas o que distribuyen las fuerzas sísmicas entre partes de estructuras que a su vez soportan cargas sísmicas. Los muros estructurales, diafragmas, cerchas, puntales, tensores, cordones y elementos colectores están dentro de esta categoría.

Para garantizar una ductilidad adecuada, el Código ACI 21.6.2 exige que los muros estructurales tengan una cuantía de refuerzo a cortante mínima ρ_v de 0.0025, tanto en dirección longitudinal como transversal y que el espaciamiento máximo del refuerzo sea de 18 pulgadas. Si la fuerza cortante de un muro excede $2A_{cv}\sqrt{f'_c}$ donde A_{cv} es el área neta del concreto de la sección definida por el espesor del alma y la longitud de la sección en la dirección de la fuerza cortante, se deben utilizar al menos dos parrillas de refuerzo. Sin embargo, si el cortante de diseño no es mayor que $A_{cv}\sqrt{f'_c}$ gobierna el criterio de refuerzo mínimo del Código ACI 14.3.

Para proporcionar confinamiento y ductilidad adecuados, los elementos estructurales como cerchas, puntales, tensores y elementos colectores con esfuerzos de compresión mayores que $0.2 f'_c$ deben cumplir los mismos requisitos de refuerzo transversal que las columnas para pórticos resistentes a cargas. En este caso, los esfuerzos de compresión se calculan para las cargas mayoradas utilizando un modelo elástico lineal y las propiedades de las secciones brutas de los elementos. El refuerzo continuo en sistemas estructurales rígidos debe anclarse y empalmarse tal como lo exige el Código ACI 21.5.4; [ver las ecuaciones (20.14) y (20.15)].

Los diafragmas que soporten elementos de la edificación o que transfieran cargas laterales entre elementos que hagan parte del sistema de resistencia de fuerzas laterales deben tener al

menos dos pulgadas de espesor (el mínimo aplica principalmente a las losas superiores en secciones compuestas).

Para garantizar una adecuada resistencia y ductilidad, el Código ACI 21.6.6 exige el uso de elementos de borde en los extremos de muros estructurales y alrededor de las aberturas cuando el esfuerzo en la fibra extrema bajo cargas sísmicas mayoradas excede $0.2\,f'_c$ a menos que la totalidad del muro se refuerce de acuerdo con las disposiciones del Código ACI 21.4.4.1 hasta 21.4.4.3 [estos requisitos incluyen las ecuaciones (20.10), (20.11) y (20.12), el espaciamiento del refuerzo transversal no mayor que $\frac{1}{4}$ de la dimensión mínima del elemento ni cuatro pulgadas, y amarres suplementarios o ramas de aros superpuestos espaciados a no más de 14 pulgadas entre centros]. Los elementos de borde, que pueden considerarse como columnas que están dentro de la frontera de un muro de espesor constante o que pueden tener una dimensión mayor que la del muro, deben incluir refuerzo transversal tal como lo especifica el Código ACI 21.4.4.1 hasta 21.4.4.3 y han de diseñarse para resistir todas las cargas gravitacionales mayoradas en el muro, incluyendo las cargas tributarias y el peso propio, más la fuerza vertical inducida por el momento de volcamiento producido por la carga sísmica. El refuerzo transversal en los muros se debe anclar para desarrollar la resistencia a la fluencia f_y dentro del núcleo confinado de concreto de los elementos de borde. Los elementos de borde pueden interrumpirse en las zonas donde el esfuerzo a compresión calculado sea menor que $0.15\,f'_c$.

Según el Código ACI 21.6.6, el refuerzo transversal en muros donde no se requieren elementos de borde debe anclarse con un gancho estándar alrededor del refuerzo extremo, o el refuerzo en el borde debe encerrarse mediante estribos en U del mismo tamaño y el mismo espaciamiento, y que cumplan con los mismos requisitos de empalmes que el refuerzo transversal. Este requisito no es necesario si la fuerza cortante máxima es menor que $A_{cv}\sqrt{f'_c}$.

20.7 DISPOSICIONES DEL CÓDIGO ACI PARA RESISTENCIA A CORTANTE

a. Vigas

Una de las consideraciones principales en el diseño de estructuras sometidas a cargas sísmicas es el cortante inducido en los elementos debido al comportamiento no lineal a flexión [ver la ecuación (20.1)]. Como se presentó en la sección 20.2, al aumentar la resistencia a la flexión de vigas y columnas se puede aumentar el cortante en estos elementos si la estructura se ve sometida a carga lateral severa. Como resultado, el Código ACI exige que las vigas y columnas en pórticos que hacen parte de los sistemas de resistencia a cargas laterales (incluidos algunos elementos que no se diseñan para soportar carga lateral) se diseñen para el efecto combinado de las cargas gravitacionales mayoradas y el cortante inducido por la formación de rótulas plásticas en los extremos de los elementos.

Para elementos con cargas axiales menores que $A_g f'_c/10$, el Código ACI 21.3.4 exige que la fuerza cortante de diseño V_e se base en la carga gravitacional tributaria mayorada a lo largo de la luz más el cortante inducido por momentos de signo opuesto correspondientes a la "resistencia probable", M_{pr}. La carga correspondiente a este caso se ilustra en la figura 20.13. La resistencia a momento probable M_{pr} se basa en que el acero de refuerzo alcanza un esfuerzo de $1.25f_y$.

$$M_{pr} = 1.25A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) \tag{20.16a}$$

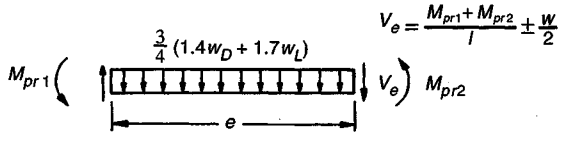


FIGURA 20.13
Fuerzas consideradas en el diseño a cortante de elementos a flexión sometidos a carga sísmica. $W/2$ es el cortante correspondiente a cargas gravitacionales basado en $0.75(1.4D + 1.7L)$.

donde

$$a = \frac{1.25 f_y A_s}{0.85 f'_c b} \tag{20.16b}$$

El cortante, V_e, está dado por

$$V_e = \frac{M_{pr1} + M_{pr2}}{l} \pm \frac{W}{2} \tag{20.17}$$

donde M_{pr1} y M_{pr2} = las resistencias a momento probables en los dos extremos del elemento cuando los momentos actúan en la misma dirección
L = la longitud del elemento entre las caras de los apoyos
$W/2$ = el efecto de las cargas gravitacionales mayoradas en cada extremo del elemento [basada en $0.75\ (1.4D + 1.7L)$].

La ecuación (20.17) se evalúa en forma independiente para los momentos en los dos extremos actuando en las direcciones de las agujas del reloj o en la dirección contraria.

Para proporcionar una ductilidad y un confinamiento adecuados al concreto, el refuerzo transversal dentro de una longitud igual a dos veces el espesor del elemento medida desde la cara del apoyo, en los dos extremos del elemento a flexión, se diseña con base en una capacidad a cortante del concreto $V_c = 0$, cuando la fuerza cortante inducida por el sismo en la ecuación (20.17), $(M_{pr1} + M_{pr2})/l$, es la mitad o más de la resistencia a cortante requerida máxima dentro de esta longitud, y la fuerza a compresión axial mayorada en el elemento, incluidos los efectos sísmicos, está por debajo de $A_g f'_c/20$.

Ejemplo 20.3. Diseño a cortante de una viga. Una viga de concreto reforzado de 18 pulgadas de ancho y 24 pulgadas de espesor está apoyada entre dos columnas interiores del pórtico de un edificio ubicado en una zona de amenaza sísmica alta. La luz libre es 24 pies y el refuerzo en la cara del apoyo consiste de cuatro barras No. 10 en la parte superior y cuatro barras No. 8 en la parte inferior. El espesor efectivo es 21.4 pulgadas para el acero superior y el inferior. El cortante mayorado máximo es $1.4V_d + 1.7V_l$ es 43 klb en cada uno de los extremos de la viga. Las resistencias de los materiales son $f'_c = 5000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2. Diseñe el refuerzo a cortante en la zona adyacente a las caras de la columna.

Solución. Las resistencias a momento probables M_{pr} se basan en un esfuerzo en el acero de $1.25 f_y$. Para flexión negativa, el área de acero es $A_s = 5.06$ pulg^2 en los dos extremos de la viga, el espesor del bloque de esfuerzos es $a = 1.25 \times 5.06 \times 60/(0.85 \times 5 \times 18) = 4.96$ pulg, y la resistencia probable es

$$M_{pr1} = \frac{1.25 \times 5.06 \times 60}{12}\left(21.4 - \frac{4.96}{2}\right) = 598 \text{ klb/pie}$$

Para flexión positiva, el área de acero es $A_s = 3.14$ pulg^2, el ancho efectivo es 90 pulg, el espesor del bloque de esfuerzos es $a = 1.25 \times 3.14 \times 60/ (0.85 \times 5 \times 90) = 0.62$ pulg y la reasistencia probable es

$$M_{pr2} = \frac{1.25 \times 3.14 \times 60}{12}\left(21.4 - \frac{0.62}{2}\right) = 414 \text{ klb/pie}$$

El efecto de las cargas gravitacionales mayoradas es $W/2 = 0.75(1.4D + 1.7L) = 0.75 \times 43 = 32$ klb, resultando en una fuerza cortante de diseño en cada uno de los extremos de la viga, de acuerdo con la ecuación (20.17), de

$$V_e = \frac{598 + 414}{24} + 32 = 42 + 32 = 74 \text{ klb}$$

Debido a que la fuerza inducida por el sismo, 42 klb, es mayor que la mitad de la máxima resistencia a cortante requerida, el refuerzo transversal de confinamiento debe diseñarse para resistir el valor total

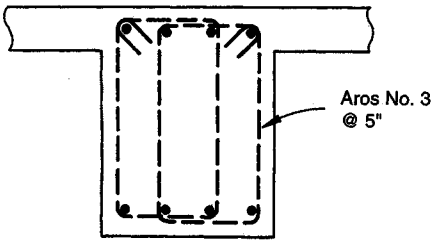


FIGURA 20.14
Configuración del refuerzo de confinamiento para la viga del ejemplo 20.3.

de V_e (por ejemplo, $\phi V_s \geq V_e$) a lo largo de la longitud $2h$ = 48 pulgadas medida desde la cara de la columna, de acuerdo con el Código ACI 21.3.3. El espaciamiento máximo de los estribos se basa en el menor de $d/4$ = 5.3 pulg, $8d_b$ para la barra longitudinal más pequeña igual a ocho pulgadas, o 24 d_b para las barras de los estribos (suponiendo que sean barras No. 3) = nueve pulgadas, o 12 pulgadas. Se utilizará un espaciamiento igual a cinco pulgadas.

El área de refuerzo a cortante dentro de una distancia s es

$$A_v = \frac{(V_e/\phi)s}{f_{yh}d} = \frac{(74/0.85)5}{60 \times 21.4} = 0.34 \text{ pulg}^2$$

Para proporcionar apoyo a la barra longitudinal de esquina y a las alternas, de acuerdo con el Código ACI 21.3.3, se llega a la utilización de aros de refuerzo superpuestos como se muestra en la figura 20.14, y se obtiene un área total del acero transversal de A_v = 0.44 pulg^2.

El primer estribo se coloca a dos pulgadas desde la cara de la columna. Los otros se colocan a espacios de cinco pulgadas dentro de 48 pulgadas medidas desde la cara de cada una de las columnas. El refuerzo transversal en el resto de la viga se calcula con base en el valor de V_e en este punto y en una contribución del concreto V_c diferente de cero. Los estribos deben tener ganchos sísmicos y un espaciamiento máximo de $d/2$.

b. Columnas

De acuerdo con el Código ACI 21.4.5, disposiciones de cortante similares a las usadas en vigas para considerar la formación de rótulas plásticas también se deben aplicar a elementos con cargas axiales mayores que $A_g f'_c/10$. En este caso, la carga se ilustra en la figura 20.15*a*, y la fuerza cortante mayorada es

$$V_e = \frac{M_{pr1} + M_{pr2}}{H} \tag{20.18}$$

donde H es la distancia libre entre vigas, y M_{pr1} y M_{pr2} se basan en una resistencia a tensión del acero de 1.25 f_y.

En la ecuación (20.18), M_{pr1} y M_{pr2} son las resistencias a momento máximas probables para el rango de cargas axiales mayoradas a las que va a estar sometida la columna, como se muestra en la figura 20.15*b*; sin embargo, V_e no necesita ser mayor que el valor basado en M_{pr} para los elementos transversales que llegan hasta la unión. En la mayor parte de los pórticos, éste ultimo será el que controla. Naturalmente, V_e no debe ser menor que el obtenido a partir del análisis de la estructura sometida a cargas mayoradas.

El Código exige que el refuerzo transversal en una columna a lo largo de una longitud l_o (la mayor entre el espesor del elemento en la cara de la unión, $\frac{1}{6}$ de la luz libre o 18 pulgadas) medida desde cada una de las caras de la unión, debe dimensionarse para resistir el cortante basado en una capacidad a cortante del concreto V_c = 0 cuando (*a*) la fuerza cortante inducida por el sismo sea igual a la mitad o más de la resistencia a cortante requerida máxima dentro de estas longitudes y (b) la fuerza a compresión axial mayorada, incluidos los efectos del sismo, sea menor que $A_g f'_c/20$.

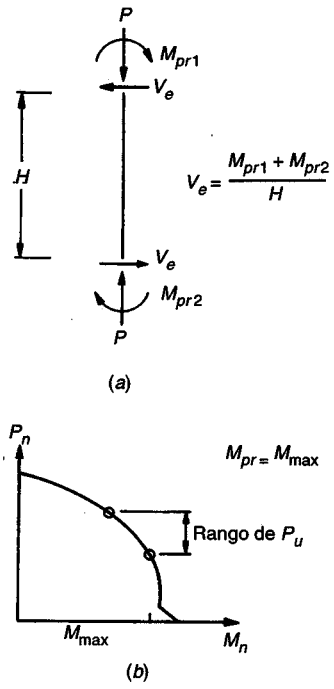


FIGURA 20.15
(*a*) Fuerzas consideradas en el diseño a cortante de columnas sometidas a carga sísmica, (*b*) diagrama de interacción usado para determinar la resistencia a momento máximo probable. Observe que M_{pr} de columnas usualmente es gobernado por M_{pr} de las vigas que llegan al nudo en vez de M_{max}.

c. Muros y diafragmas

De acuerdo con el Código ACI 21.6.3, la fuerza a cortante mayorada V_u, para muros, diafragmas y cerchas se obtiene a partir de un análisis basado en las cargas mayoradas (incluyendo el sismo).

Según el Código ACI 21.6.5, el valor máximo de la resistencia a cortante nominal, V_n, para muros estructurales y diafragmas debe tomarse como

$$V_n = A_{cv}(2\sqrt{f'_c} + \rho_n f_y) \tag{20.19}$$

donde A_{cv} = área neta de la sección de concreto igual al espesor del alma por la longitud de la sección en la dirección de la fuerza cortante
ρ_n = cuantía del refuerzo a cortante en un plano perpendicular al plano de A_{cv}

Para muros y diafragmas, o segmentos de estos elementos, que tengan una relación altura-longitud h_w/l_w menor que dos, la resistencia nominal es

$$V_n = A_{cv}(\alpha_c\sqrt{f'_c} + \rho_n f_y) \tag{20.20}$$

donde α_c varía linealmente desde 3.0 hasta 2.0 a medida que h_w/l_w cambia desde 1.5 hasta 2.0, y h_w y l_w son la altura y longitud, respectivamente, de la totalidad del muro o diafragma o de los segmentos del muro o diafragma. l_w se mide en la dirección de la fuerza cortante. En la aplicación de la ecuación (20.20), la relación h_w/l_w es la mayor de las relaciones para la totalidad del elemento o del segmento del elemento que se esté considerando. La utilización de α_c mayor que 2.0 se basa en mayores resistencias a cortante observadas para muros con relaciones de dimensiones más pequeñas.

El Código ACI 21.6.5 exige que los muros y diafragmas incluyan un refuerzo a cortante distribuido en dos direcciones ortogonales en el plano del elemento. Para $h_w/l_w \leq 2.0$, la cuantía

de refuerzo para el acero que atraviesa el plano de A_{cv}, ρ_v, debe ser igual al menos a ρ_n. La resistencia a cortante nominal de todas las pilas de muros (regiones verticales de un muro separadas por aberturas) que soporten entre todas la carga lateral total se limita a un valor máximo de $8A_{cv}\sqrt{f'_c}$, sin que ninguna de las pilas individuales llegue a soportar más que $10A_{cp}\sqrt{f'_c}$, donde A_{cv} es el área de la sección transversal total y A_{cp} es el área de la sección transversal de una pila individual. La resistencia a cortante nominal de segmentos de muro horizontal (regiones de un muro limitadas por aberturas en la parte superior y en la inferior) se limita a $10A_{cp}\sqrt{f'_c}$.

20.8 DISPOSICIONES DEL CÓDIGO ACI PARA PÓRTICOS EN ZONAS DE AMENAZA SÍSMICA MODERADA

El Código ACI 21.8 establece requisitos para el diseño de pórticos en zonas de amenaza sísmica moderada; éstos incluyen especificación de las cargas y de los requisitos de despiece. Al contrario que para zonas de amenaza sísmica alta, los sistemas de losa en dos direcciones sin vigas están permitidos para servir como sistemas de resistencia a cargas laterales. Los muros, diafragmas y cerchas en zonas de amenaza sísmica moderada se diseñan utilizando la parte principal del Código.

El Código ACI 21.8.3 permite dos opciones para el diseño a cortante de elementos de pórtico. La primera opción es similar a la ilustrada en las figuras 20.13 y 20.15 y en las ecuaciones (20.17) y (20.18), con la excepción de que las resistencias probables M_{pr} se remplazan por las resistencias nominales M_n. Para vigas, f_y se sustituye por $1.25f_y$ en la ecuación (20.16). Para columnas, los momentos utilizados en la parte superior y en la inferior de la columna [ver la figura 20.15 y la ecuación (20.18)] se basan en la capacidad de la columna sola (sin considerar la capacidad a momento de las vigas que llegan hasta las uniones) y en una carga axial de diseño mayorado P_u que resulta en la capacidad a momento máxima nominal.

Como alternativa de diseño para el cortante inducido por la formación de rótulas en los extremos de los elementos, el Código ACI 21.8.3 permite que el diseño a cortante esté basado en combinaciones de carga que incluyen un efecto sísmico igual a dos veces el requerido por el código de construcción correspondiente. Así, la primera de las ecuaciones relacionadas con sismo de la tabla 1.2 se convierte en

$$U = 0.75(1.4D + 1.7L + 3.74E) \tag{20.21}$$

Para vigas y columnas, el Código establece requisitos de despiece que no son tan exigentes como aquéllos utilizados para zonas de amenaza sísmica alta pero que proporcionan un mayor confinamiento y una ductilidad mejorada en comparación con aquéllos usados en estructuras no diseñadas para cargas sísmicas. Para vigas, la resistencia a momento positivo en la cara de la unión debe ser al menos $\frac{1}{3}$ de la resistencia a momento negativo en la unión de acuerdo con el Código ACI 21.8.4. Tanto la resistencia a momento positivo como la resistencia negativo a momento a lo largo de la totalidad de la longitud de la viga debe ser al menos $\frac{1}{5}$ de la resistencia a momento máximo en la cara de cualquiera de las uniones. Se exigen estribos en los dos extremos de las vigas a lo largo de una longitud igual a dos veces el espesor del elemento; el primer estribo se coloca dentro de las dos pulgadas desde la cara del apoyo, y el espaciamiento máximo en esta zona no debe exceder $\frac{1}{4}$ de la altura efectiva, ocho veces el diámetro de la barra longitudinal más pequeña, 24 veces el diámetro de los estribos, o 12 pulgadas. El espaciamiento máximo de estribos para las otras zonas de la viga es igual a la mitad del espesor efectivo.

Para columnas, dentro de una zona limitada por l_o [definida después de la ecuación (20.18)], el espaciamiento de flejes s_o no debe exceder ocho veces el diámetro de la barra longitudinal más pequeña, 24 veces el diámetro de la barra de amarre o fleje, la mitad de la menor dimensión de la sección transversal de la columna, o 12 pulgadas, de acuerdo con el Código ACI 21.8.5. El primer fleje debe colocarse a no más de $s_o/2$ de la cara de la unión, y el espaciamiento de los flejes no debe exceder dos veces el espaciamiento s_o para los demás sitios del elemento. De acuerdo con el Códi-

go ACI 21.8.5 y 11.11.2, debe proporcionarse refuerzo lateral en la unión con una área igual a la especificada en la ecuación (4.13) dentro de la columna y para un espesor no menor que el espesor del elemento a flexión más alto que llegue hasta la unión.

Para losas en dos direcciones sin vigas, el Código ACI 21.8.6 exige el diseño para efectos sísmicos utilizando la primera y la segunda ecuación relacionada con carga sísmica de la tabla 1.2. En estas condiciones de carga, el refuerzo proporcionado para resistir el momento no balanceado que se transfiere entre la losa y la columna M_s (M_u en la sección 13.7) debe colocarse dentro de la franja de columna. El refuerzo para resistir la fracción del momento no balanceado M_s definido mediante la ecuación (13.16*a*), $M_{ub} = \gamma_f M_u = \gamma_f M_s$, pero no menos que la mitad del refuerzo en la franja de columna en el apoyo, debe concentrarse cerca de la columna. Este refuerzo se coloca dentro de un ancho efectivo de losa limitado por las líneas a $1.5h$ a cada lado de la columna o capitel, donde h es el espesor total de la losa o ábaco.

Para garantizar un comportamiento dúctil de los sistemas de losa en dos direcciones, al menos la cuarta parte del refuerzo superior en el apoyo de las franjas de columna debe ser continuo a todo lo largo de la luz, al igual que el refuerzo inferior, el cual será al menos igual a una tercera parte del refuerzo superior en el apoyo para la franja de columna. Al menos la mitad de todo el refuerzo inferior en el centro de la luz debe ser continuo y capaz de desarrollar su resistencia a la fluencia en la cara del apoyo. Para bordes no continuos en losas, tanto el refuerzo superior como el inferior deben desarrollar su resistencia a la fluencia en la cara del apoyo.

REFERENCIAS

20.1. *Uniform Building Code*™, 1994 ed., International Conference of Building Officials, Whittier, California, 1994.

20.2. J. A. Blume, N. M. Newmark, and L. H. Corning, *Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions*, Portland Cement Association, Skokie, Illinois, 1961.

20.3. S. K. Ghosh and A. W. Domel, Jr., *Design of Concrete Buildings for Earthquake and Wind Forces*, Portland Cement Association, Skokie, Illinois, and International Conference of Building Officials, Whittier, California, 1992.

20.4. J. L. Stratta, *Manual of Seismic Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.

20.5. T. Paulay and M. J. N. Priestly, *Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.

20.6. *International Handbook of Earthquake Engineering*, M. Paz, ed., Chapman and Hall, New York, 1994.

20.7. *Concrete Structures in Earthquake Regions: Design & Analysis*, E. Booth, ed., Longman Scientific & Technical, Harlow, England, 1994.

20.8. *Recommended Lateral Force Requirements and Commentary*, Report by Seismology Committee, Structural Engineers Association of California (SEAOC), San Francisco, California, 1990.

20.9. *Building Code Requirements for Structural Concrete*, ACI 318-95, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 1995.

20.10. *Commentary on Building Code Requirements for Structural Concrete*, ACI 318R-95, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 1995 (publicado como parte de la referencia 20.9).

20.11. ACI Committee 352, "Recommendations for Design of Beam-Column Joints in Monolithic Reinforced Concrete Structures", *J. ACI*, vol. 73, No. 7, 1976, pp. 375-393.

PROBLEMAS

20.1. Una unión de columna interior que hace parte de un pórtico de concreto reforzado localizado en una zona de amenaza sísmica alta está conformada por vigas de 28 pulgadas de ancho y 20 pulgadas de espesor, y vigas principales de 36 pulgadas de ancho por 20 pulgadas de espesor que llegan hasta una columna de 28 por 28 pulgadas. El espesor de la losa es de cinco pulgadas y el ancho efectivo del ala que sobresale a cada uno de los lados del alma del elemento a flexión es de 40 pulgadas. El refuerzo de las vigas principales en la unión está conformado por cinco barras superiores No. 10 y cinco barras inferiores No. 8. El refuerzo en las vigas secundarias está conformado por cuatro barras No. 10 en la parte superior y cuatro barras No. 8 en la parte inferior. En el cruce del acero a flexión dentro de la unión, las barras superiores o inferiores de la viga principal descansan sobre las respectivas barras superiores e inferiores de las vigas secundarias. El refuerzo de la columna está conformado por 12 barras No. 9 espaciadas uniformemente alrededor del perímetro en forma similar a la indicada en la figura 20.10. El recubrimiento libre para el refuerzo a flexión principal más externo y para el refuerzo longitudinal de la

columna es de dos pulgadas. Suponga que los flejes y los estribos son en barras No. 4. Por efecto sísmico, la carga axial mayorada máxima en la columna superior que llega hasta la unión es 1098 klb y la carga axial mayorada máxima en la columna inferior es 1160 klb. Para una altura entre pisos del pórtico de 13 pies, determine si las resistencias de diseño a flexión para las columnas exceden a aquéllas de las vigas y vigas principales en al menos el 20 por ciento, y determine el refuerzo transversal mínimo requerido en las columnas adyacentes a las vigas. Utilice $f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y $f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2.

20.2. Diseñe la unión y el refuerzo transversal de la columna para los elementos descritos en el problema 20.1. Los cortantes mayorados debidos a cargas sísmicas son 29 klb en la columna superior y 31 klb en la columna inferior. Las carga axiales mayoradas mínimas son 21 y 25 klb por debajo de las fuerzas especificadas en el problema 20.1 para las columnas superior e inferior, respectivamente.

20.3. En el ejemplo 20.1, las columnas están espaciadas a 28 pies entre centros en la dirección de las vigas continuas. La carga muerta total sobre la viga que continúa (incluido el peso propio) es 2 klb por pie y la carga viva total es 0.93 klb por pie. Diseñe el refuerzo transversal para la viga continua para un edificio ubicado en zona de amenaza sísmica alta.

20.4. Repita el problema 20.3 para un pórtico localizado en una zona de amenaza sísmica moderada.

APÉNDICE
A
AYUDAS DE DISEÑO

TABLA A.1
Nomenclatura, áreas, perímetros y pesos de barras estándares

Barra No.[a]	Diámetro, pulg	Área de la sección transversal, pulg^2	Perímetro, pulg	Peso unitario por pie, lb
3	$\frac{3}{8}$ = 0.375	0.11	1.18	0.376
4	$\frac{1}{2}$ = 0.500	0.20	1.57	0.668
5	$\frac{5}{8}$ = 0.625	0.31	1.96	1.043
6	$\frac{3}{4}$ = 0.750	0.44	2.36	1.502
7	$\frac{7}{8}$ = 0.875	0.60	2.75	2.044
8	1 = 1.000	0.79	3.14	2.670
9	$1\frac{1}{8}$ = 1.128[b]	1.00	3.54	3.400
10	$1\frac{1}{4}$ = 1.270[b]	1.27	3.99	4.303
11	$1\frac{3}{8}$ = 1.410[b]	1.56	4.43	5.313
14	$1\frac{3}{4}$ = 1.693[b]	2.25	5.32	7.650
18	$2\frac{1}{4}$ = 2.257[b]	4.00	7.09	13.600

[a] Con base en la cantidad de octavos de una pulgada incluidos en el diámetro nominal de las barras. El diámetro nominal de un barra corrugada es equivalente al diámetro de una barra lisa que tiene el mismo peso por pie que la barra corrugada.

[b] Aproximado al más cercano de $\frac{1}{8}$ pulg.

TABLA A.2
Áreas de grupos de barras estándares, pulg²

Barra No.	Cantidad de barras											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	0.20	0.39	0.58	0.78	0.98	1.18	1.37	1.57	1.77	1.96	2.16	2.36
5	0.31	0.61	0.91	1.23	1.53	1.84	2.15	2.45	2.76	3.07	3.37	3.68
6	0.44	0.88	1.32	1.77	2.21	2.65	3.09	3.53	3.98	4.42	4.86	5.30
7	0.60	1.20	1.80	2.41	3.01	3.61	4.21	4.81	5.41	6.01	6.61	7.22
8	0.79	1.57	2.35	3.14	3.93	4.71	5.50	6.28	7.07	7.85	8.64	9.43
9	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00
10	1.27	2.53	3.79	5.06	6.33	7.59	8.86	10.12	11.39	12.66	13.92	15.19
11	1.56	3.12	4.68	6.25	7.81	9.37	10.94	12.50	14.06	15.62	17.19	18.75
14	2.25	4.50	6.75	9.00	11.25	13.50	15.75	18.00	20.25	22.50	24.75	27.00
18	4.00	8.00	12.00	16.00	20.00	24.00	28.00	32.00	36.00	40.00	44.00	48.00

TABLA A.3
Perímetros de grupos de barras estándares, pulg

Barra No.	Cantidad de barras											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	1.6	3.1	4.7	6.2	7.8	9.4	11.0	12.6	14.1	15.7	17.3	18.8
5	2.0	3.9	5.9	7.8	9.8	11.8	13.7	15.7	17.7	19.5	21.6	23.6
6	2.4	4.7	7.1	9.4	11.8	14.1	16.5	18.8	21.2	23.6	25.9	28.3
7	2.8	5.5	8.2	11.0	13.7	16.5	19.2	22.0	24.7	27.5	30.2	33.0
8	3.1	6.3	9.4	12.6	15.7	18.9	22.0	25.1	28.3	31.4	34.6	37.7
9	3.5	7.1	10.6	14.2	17.7	21.3	24.8	28.4	31.9	35.4	39.0	42.5
10	4.0	8.0	12.0	16.0	20.0	23.9	27.9	31.9	35.9	39.9	43.9	47.9
11	4.4	8.9	13.3	17.7	22.2	26.6	31.0	35.4	39.9	44.3	48.7	53.2
14	5.3	10.6	16.0	21.3	26.6	31.9	37.2	42.6	47.9	53.2	58.5	63.8
18	7.1	14.2	21.3	28.4	35.5	42.5	49.6	56.7	63.8	70.9	78.0	85.1

TABLA A.4
Áreas de barras en losas, pulg²/pie

Espaciamiento	Barra No.								
	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0.44	0.78	1.23	1.77	2.40	3.14	4.00	5.06	6.25
$3\frac{1}{2}$	0.38	0.67	1.05	1.51	2.06	2.69	3.43	4.34	5.36
4	0.33	0.59	0.92	1.32	1.80	2.36	3.00	3.80	4.68
$4\frac{1}{2}$	0.29	0.52	0.82	1.18	1.60	2.09	2.67	3.37	4.17
5	0.26	0.47	0.74	1.06	1.44	1.88	2.40	3.04	3.75
$5\frac{1}{2}$	0.24	0.43	0.67	0.96	1.31	1.71	2.18	2.76	3.41
6	0.22	0.39	0.61	0.88	1.20	1.57	2.00	2.53	3.12
$6\frac{1}{2}$	0.20	0.36	0.57	0.82	1.11	1.45	1.85	2.34	2.89
7	0.19	0.34	0.53	0.76	1.03	1.35	1.71	2.17	2.68
$7\frac{1}{2}$	0.18	0.31	0.49	0.71	0.96	1.26	1.60	2.02	2.50
8	0.17	0.29	0.46	0.66	0.90	1.18	1.50	1.89	2.34
9	0.15	0.26	0.41	0.59	0.80	1.05	1.33	1.69	2.08
10	0.13	0.24	0.37	0.53	0.72	0.94	1.20	1.52	1.87
12	0.11	0.20	0.31	0.44	0.60	0.78	1.00	1.27	1.56

TABLA A.5
Cuantías de acero límite para diseño a flexión

f_y	f'_c	β_1	ρ_b^a	$\rho_{max} = 0.75\rho_b$	$\rho_{min} = \frac{200}{f_y}$	$\rho_{min} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y}$
40,000	3000	0.85	0.0371	0.0278	0.0050	0.0041
	4000	0.85	0.0495	0.0371	0.0050	0.0047
	5000	0.80	0.0582	0.0437	0.0050	0.0053
	6000	0.75	0.0655	0.0491	0.0050	0.0058
	7000	0.70	0.0713	0.0535	0.0050	0.0063
	8000	0.65	0.0757	0.0568	0.0050	0.0067
50,000	3000	0.85	0.0275	0.0206	0.0040	0.0033
	4000	0.85	0.0367	0.0275	0.0040	0.0038
	5000	0.80	0.0432	0.0324	0.0040	0.0042
	6000	0.75	0.0486	0.0365	0.0040	0.0046
	7000	0.70	0.0529	0.0397	0.0040	0.0050
	8000	0.65	0.0561	0.0421	0.0040	0.0054
60,000	3000	0.85	0.0214	0.0160	0.0033	0.0027
	4000	0.85	0.0285	0.0214	0.0033	0.0032
	5000	0.80	0.0335	0.0251	0.0033	0.0035
	6000	0.75	0.0377	0.0283	0.0033	0.0039
	7000	0.70	0.0411	0.0308	0.0033	0.0042
	8000	0.65	0.0436	0.0327	0.0033	0.0045
80,000	3000	0.85	0.0141	0.0106	0.0025	0.0021
	4000	0.85	0.0188	0.0141	0.0025	0.0024
	5000	0.80	0.0221	0.0166	0.0025	0.0027
	6000	0.75	0.0249	0.0187	0.0025	0.0029
	7000	0.70	0.0271	0.0203	0.0025	0.0031
	8000	0.65	0.0288	0.0216	0.0025	0.0033

[a] $\rho_b = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{87{,}000}{87{,}000 + f_y}$

TABLA A.6a
Factor de resistencia a flexión: $R = \rho f_y\left(1 - 0.588\frac{\rho f_y}{f'_c}\right)$ lb/pulg²

	f_y = 40,000				f_y = 60,000			
	f'_c				f'_c			
ρ	3000	4000	5000	6000	3000	4000	5000	6000
.0000	0	0	0	0	0	0	0	0
.0005	20	20	20	20	30	30	30	30
.0010	40	40	40	40	59	59	60	60
.0015	59	59	60	60	88	89	89	89
.0020	79	79	79	79	117	118	118	119
.0025	98	99	99	99	146	147	147	148
.0030	117	118	118	119	174	175	176	177
.0035	136	137	138	138	201	204	205	206
.0040	155	156	157	157	229	232	233	234
.0045	174	175	176	177	256	259	261	263
.0050	192	194	195	196	282	287	289	291
.0055	211	213	214	215	309	314	317	319
.0060	229	232	233	234	335	341	345	347
.0065	247	250	252	253	360	368	372	375
.0070	265	268	271	272	385	394	399	403
.0075	282	287	289	291	410	420	426	430
.0080	300	305	308	310	435	446	453	457
.0085	317	323	326	329	459	472	479	485
.0090	335	341	345	347	483	497	506	511
.0095	352	359	363	366	506	522	532	538
.0100	369	376	381	384	529	547	558	565
.0105	385	394	399	403	552	572	583	591
.0110	402	412	417	421	575	596	609	617
.0115	419	429	435	439	597	620	634	643
.0120	435	446	453	457	618	644	659	669
.0125	451	463	471	476	640	667	684	695
.0130	467	480	488	494	661	691	708	720
.0135	483	497	506	511	681	714	733	746
.0140	499	514	523	529	702	736	757	771
.0145	514	531	540	547	722	759	781	796
.0150	529	547	558	565	741	781	805	821
.0155	545	563	575	582	760	803	828	845
.0160	560	580	592	600	779	825	852	870
.0165	575	596	609	617	798	846	875	894
.0170	589	612	626	635	816	867	898	918
.0175	604	628	642	652	834	888	920	942
.0180	618	644	659	669	851	909	943	966

TABLA A.6b
Factor de resistencia a flexión: $R = \rho f_y \left(1 - 0.588 \frac{\rho f_y}{f'_c}\right)$ lb/pulg²

	f_y = 40,000				f_y = 60,000			
	f'_c				f'_c			
ρ	3000	4000	5000	6000	3000	4000	5000	6000
.005	192	194	195	196	282	287	289	291
.006	229	232	233	234	335	341	345	347
.007	265	268	271	272	385	394	399	403
.008	300	305	308	310	435	446	453	457
.009	335	341	345	347	483	497	506	511
.010	369	376	381	384	529	547	558	565
.011	402	412	417	421	575	596	609	617
.012	435	446	453	457	618	644	659	669
.013	467	480	488	494	661	691	708	720
.014	499	514	523	529	702	736	757	771
.015	529	547	558	565	741	781	805	821
.016	560	580	592	600	779	825	852	870
.017	589	612	626	635	816	867	898	918
.018	618	644	659	669	851	909	943	966
.019	647	675	692	703	885	949	987	1013
.020	675	706	725	737	918	988	1031	1059
.021	702	736	757	771	949	1027	1073	1104
.022	728	766	789	804		1064	1115	1149
.023	754	796	820	837		1100	1156	1193
.024	779	825	852	870		1135	1196	1237
.025	804	853	882	902		1169	1235	1280
.026	828	881	913	934		1202	1274	1322
.027	851	909	943	966		1234	1311	1363
.028	874	936	972	997		1265	1348	1403
.029	896	962	1002	1028			1384	1443
.030	918	988	1031	1059			1419	1482
.031	939	1014	1059	1089			1453	1521
.032	959	1039	1087	1119			1486	1559
.033	978	1064	1115	1149			1519	1596
.034	997	1088	1142	1179				1632
.035	1016	1112	1170	1208				1668
.036	1034	1135	1196	1237				1703
.037	1051	1158	1222	1265				1737
.038		1180	1248	1294				
.039		1202	1274	1322				
.040		1224	1299	1349				

TABLA A.7

Parámetros k y j para el análisis elástico de una sección de viga fisurada donde $k = \sqrt{2\rho n + (\rho n)^2} - \rho n$; $j = 1 - \frac{1}{3}k$

	$n = 7$		$n = 8$		$n = 9$		$n = 10$	
ρ	k	j	k	j	k	j	k	j
0.0010	0.112	0.963	0.119	0.960	0.125	0.958	0.132	0.956
0.0020	0.154	0.949	0.164	0.945	0.173	0.942	0.180	0.940
0.0030	0.185	0.938	0.196	0.935	0.207	0.931	0.217	0.928
0.0040	0.210	0.930	0.223	0.926	0.235	0.922	0.246	0.918
0.0050	0.232	0.923	0.246	0.918	0.258	0.914	0.270	0.910
0.0054	0.240	0.920	0.254	0.915	0.267	0.911	0.279	0.907
0.0058	0.247	0.918	0.262	0.913	0.275	0.908	0.287	0.904
0.0062	0.254	0.915	0.269	0.910	0.283	0.906	0.296	0.901
0.0066	0.261	0.913	0.276	0.908	0.290	0.903	0.303	0.899
0.0070	0.268	0.911	0.283	0.906	0.298	0.901	0.311	0.896
0.0072	0.271	0.910	0.287	0.904	0.301	0.900	0.314	0.895
0.0074	0.274	0.909	0.290	0.903	0.304	0.899	0.318	0.894
0.0076	0.277	0.908	0.293	0.902	0.308	0.897	0.321	0.893
0.0078	0.280	0.907	0.296	0.901	0.311	0.896	0.325	0.892
0.0080	0.283	0.906	0.299	0.900	0.314	0.895	0.328	0.891
0.0082	0.286	0.905	0.303	0.899	0.317	0.894	0.331	0.890
0.0084	0.289	0.904	0.306	0.898	0.321	0.893	0.334	0.889
0.0086	0.292	0.903	0.308	0.897	0.324	0.892	0.338	0.887
0.0088	0.295	0.902	0.311	0.896	0.327	0.891	0.341	0.886
0.0090	0.298	0.901	0.314	0.895	0.330	0.890	0.344	0.885
0.0092	0.300	0.900	0.317	0.894	0.332	0.889	0.347	0.884
0.0094	0.303	0.899	0.320	0.893	0.335	0.888	0.350	0.883
0.0096	0.306	0.898	0.323	0.892	0.338	0.887	0.353	0.882
0.0098	0.308	0.897	0.325	0.892	0.341	0.886	0.355	0.882
0.0100	0.311	0.896	0.328	0.891	0.344	0.885	0.358	0.881
0.0104	0.316	0.895	0.333	0.889	0.349	0.884	0.364	0.879
0.0108	0.321	0.893	0.338	0.887	0.354	0.882	0.369	0.877
0.0112	0.325	0.892	0.343	0.886	0.359	0.880	0.374	0.875
0.0116	0.330	0.890	0.348	0.884	0.364	0.879	0.379	0.874
0.0120	0.334	0.889	0.353	0.882	0.369	0.877	0.384	0.872
0.0124	0.339	0.887	0.357	0.881	0.374	0.875	0.389	0.870
0.0128	0.343	0.886	0.362	0.879	0.378	0.874	0.394	0.867
0.0132	0.347	0.884	0.366	0.878	0.383	0.872	0.398	0.867
0.0136	0.351	0.883	0.370	0.877	0.387	0.871	0.403	0.866
0.0140	0.355	0.882	0.374	0.875	0.392	0.869	0.407	0.864
0.0144	0.359	0.880	0.378	0.874	0.396	0.868	0.412	0.863
0.0148	0.363	0.879	0.382	0.873	0.400	0.867	0.416	0.861
0.0152	0.367	0.878	0.386	0.871	0.404	0.865	0.420	0.860
0.0156	0.371	0.876	0.390	0.870	0.408	0.864	0.424	0.859
0.0160	0.374	0.875	0.394	0.869	0.412	0.863	0.428	0.857
0.0170	0.383	0.872	0.403	0.867	0.421	0.860	0.437	0.854
0.0180	0.392	0.869	0.412	0.863	0.430	0.857	0.446	0.851
0.0190	0.400	0.867	0.420	0.860	0.438	0.854	0.455	0.848
0.0200	0.407	0.864	0.428	0.857	0.446	0.851	0.463	0.846

TABLA A.8
Cantidad máxima de barras en una sola fila en almas de vigas

Tamaño máximo del agregado $\frac{3}{4}$ pulg, estribos No. 4[a]

	Ancho de la viga b_w, pulg											
Barra No.	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**	**26**	**28**	**30**
5	2	4	5	6	7	8	10	11	12	13	15	16
6	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	14	15
7	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
8	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	10	11
10	1	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	10
11	1	2	3	3	4	5	5	6	7	8	8	9
14	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8
18[b]	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	6

Tamaño máximo del agregado 1 pulg, estribos No. 4[a]

	Ancho de la viga b_w, pulg											
Barra No.	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**	**26**	**28**	**30**
5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	2	3	4	5	6	7	8	9	9	10	11	12
7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	11
8	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11
9	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	9	10
10	1	2	3	4	5	6	6	7	7	8	9	10

[a] Recubrimiento mínimo de concreto supuesto igual a $\frac{1}{2}$ pulg hasta el estribo No. 4.

[b] Para exposición exterior, el esfuerzo para carga de servicio debe reducirse para satisfacer un máximo $Z = 145$ (ACI 318-89, sección 10.6.4).

Fuente: Adaptada de la referencia 3.7. Utilizada con autorización del American Concrete Institute.

TABLA A.9

Cantidad mínima de barras en una sola fila en las almas de vigas por los requisitos de control de agrietamiento del Código ACI

(*a*) Exposición interior

Cantidad mínima de barras en una sola fila en el alma de la viga

Barra No.	Ancho del alma de la viga b_w, pulg														
	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
3	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4
5	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4
6	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4
7	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4
8	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4
9	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5
10	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5
11	(2)	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
14	(2)	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6
18	(2)	(2)	(3)	(3)	3	(4)	4	4	(5)	5	5	6	6	6	7

( ) El máximo permitido es menor que la cantidad mínima requerida.

(*b*) Exposición exterior

Cantidad mínima de barras en una sola fila en el alma de la viga

Barra No.	Ancho del alma de la viga b_w, pulg											
	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
5	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5
6	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6
7	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6	6
8	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6
9	(2)	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7
10	(2)	(3)	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7
11	(2)	(3)	3	(4)	4	5	5	5	6	6	7	7
14	(2)	(3)	(3)	(4)	(4)	(5)	5	(6)	6	(7)	7	8

( ) El máximo permitido es menor que la cantidad mínima requerida.

Fuente: Adaptada de la referencia 3.8. Utilizada con autorización del Concrete Reinforcing Steel Institute.

TABLA A.10
Resistencia de diseño ϕM_n para secciones de losa de 12 pulg de ancho, klb-pie, f_y = 60 klb/pulg^2; $\phi M_n = \phi\rho f_y b d^2(1 - 0.59\rho f_y/f'_c)$

		Espesor efectivo d, pulg												
f'_c	ρ	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	8.0	9.0	10.0	12.0
3000	0.002	0.9	1.3	1.7	2.1	2.6	3.2	3.8	4.5	5.2	6.7	8.5	10.5	15.2
	0.003	1.4	1.9	2.5	3.2	3.9	4.7	5.6	6.6	7.7	10.0	12.7	15.6	22.5
	0.004	1.9	2.5	3.3	4.2	5.1	6.2	7.4	8.7	10.1	13.2	16.7	20.6	29.6
	0.005	2.3	3.1	4.1	5.1	6.4	7.7	9.1	10.7	12.4	16.3	20.6	25.4	36.6
	0.006	2.7	3.7	4.8	6.1	7.5	9.1	10.8	12.7	14.8	19.3	24.4	30.1	43.4
	0.007	3.1	4.2	5.5	7.0	8.7	10.5	12.5	14.7	17.0	22.2	28.1	34.7	49.9
	0.008	3.5	4.8	6.3	7.9	9.8	11.8	14.1	16.5	19.2	25.0	31.7	39.1	56.3
	0.009	3.9	5.3	7.0	8.8	10.9	13.1	15.6	18.4	21.3	27.8	35.2	43.4	62.6
	0.010	4.3	5.8	7.6	9.6	11.9	14.4	17.1	20.1	23.3	30.5	38.6	47.6	68.6
	0.011	4.7	6.3	8.3	10.5	12.9	15.6	18.6	21.8	25.3	33.1	41.9	51.7	74.4
4000	0.002	1.0	1.3	1.7	2.1	2.7	3.2	3.8	4.5	5.2	6.8	8.6	10.6	15.3
	0.003	1.4	1.9	2.5	3.2	3.9	4.8	5.7	6.7	7.7	10.1	12.8	15.8	22.7
	0.004	1.9	2.6	3.3	4.2	5.2	6.3	7.5	8.8	10.2	13.3	16.9	20.8	30.0
	0.005	2.3	3.2	4.1	5.2	6.5	7.8	9.3	10.9	12.6	16.5	20.9	25.8	37.2
	0.006	2.8	3.8	4.9	6.2	7.7	9.3	11.0	13.0	15.0	19.6	24.9	30.7	44.2
	0.007	3.2	4.3	5.7	7.2	8.9	10.7	12.8	15.0	17.4	22.7	28.7	35.5	51.1
	0.008	3.6	4.9	6.4	8.1	10.0	12.1	14.5	17.0	19.7	25.7	32.5	40.1	57.8
	0.009	4.0	5.5	7.2	9.1	11.2	13.5	16.1	18.9	21.9	28.6	36.2	44.7	64.4
	0.010	4.4	6.0	7.9	10.0	12.3	14.9	17.7	20.8	24.1	31.5	39.9	49.2	70.9
	0.011	4.8	6.6	8.6	10.9	13.4	16.2	19.3	22.7	26.3	34.3	43.4	53.6	77.2
	0.012	5.2	7.1	9.3	11.7	14.5	17.5	20.9	24.5	28.4	37.1	46.9	57.9	83.4
	0.013	5.6	7.6	9.9	12.6	15.5	18.8	22.4	26.2	30.4	39.8	50.3	62.1	89.5
	0.014	6.0	8.1	10.6	13.4	16.6	20.0	23.8	28.0	32.5	42.4	53.6	66.2	95.4
	0.015	6.3	8.6	11.2	14.2	17.6	21.2	25.3	29.7	34.4	45.0	56.9	70.2	101.2
5000	0.002	1.0	1.3	1.7	2.2	2.7	3.2	3.8	4.5	5.2	6.8	8.6	10.6	15.3
	0.003	1.4	1.9	2.5	3.2	4.0	4.8	5.7	6.7	7.8	10.1	12.8	15.9	22.8
	0.004	1.9	2.6	3.4	4.3	5.2	6.3	7.6	8.9	10.3	13.4	17.0	21.0	30.2
	0.005	2.3	3.2	4.2	5.3	6.5	7.9	9.4	11.0	12.8	16.7	21.1	26.0	37.5
	0.006	2.8	3.8	5.0	6.3	7.8	9.4	11.2	13.1	15.2	19.9	25.1	31.0	44.7
	0.007	3.2	4.4	5.7	7.3	9.0	10.9	12.9	15.2	17.6	23.0	29.1	35.9	51.7
	0.008	3.7	5.0	6.5	8.3	10.2	12.3	14.7	17.2	20.0	26.1	33.0	40.8	58.7
	0.009	4.1	5.6	7.3	9.2	11.4	13.8	16.4	19.2	22.3	29.1	36.9	45.5	65.5
	0.010	4.5	6.1	8.0	10.2	12.5	15.2	18.1	21.2	24.6	32.1	40.6	50.2	72.3
	0.011	4.9	6.7	8.8	11.1	13.7	16.6	19.7	23.1	26.8	35.1	44.4	54.8	78.9
	0.012	5.3	7.3	9.5	12.0	14.8	17.9	21.3	25.1	29.1	37.9	48.0	59.3	85.4
	0.013	5.7	7.8	10.2	12.9	15.9	19.3	22.9	26.9	31.2	40.8	51.6	63.7	91.8
	0.014	6.1	8.3	10.9	13.8	17.0	20.6	24.5	28.8	33.4	43.6	55.2	68.1	98.1
	0.015	6.5	8.9	11.6	14.7	18.1	21.9	26.1	30.6	35.5	46.3	58.6	72.4	104.3
	0.016	6.9	9.4	12.3	15.5	19.2	23.2	27.6	32.4	37.5	49.0	62.1	76.6	110.3
	0.017	7.3	9.9	12.9	16.4	20.2	29.1	24.4	34.1	39.6	51.7	65.4	80.8	116.3

TABLA A.11
Longitud de desarrollo a tensión en diámetros de barras, l_d/d_b para barras sin recubrimiento y concreto normal (caso simplificado)

		No. 6 y menores			No. 7 y mayores		
		f'_c			f'_c		
	f_y, klb/pulg²	4000	5000	6000	4000	5000	6000
(1) Barras inferiores							
Espaciamiento, recubrimiento y estribos como se indica en los casos *a* y *b*	40	25	23	21	32	28	26
	50	32	28	26	40	35	32
	60	38	34	31	47	42	39
Otros casos	40	38	34	31	47	42	39
	50	47	42	39	59	53	48
	60	57	51	46	71	64	58
(2) Barras superiores							
Espaciamiento, recubrimiento y estribos como se indica en los casos *a* y *b*	40	33	29	27	41	37	34
	50	41	37	34	51	46	42
	60	49	44	40	62	55	50
Otros casos	40	49	44	40	62	55	50
	50	62	55	50	77	69	63
	60	74	66	60	92	83	76

Caso *a*: Separación libre entre barras que se desarrollan o empalman $\geq d_b$, recubrimiento libre $\geq d_b$ y estribos a lo largo de l_d cumpliendo el mínimo requerido por el código.

Caso *b*: Separación libre entre barras que se desarrollan o empalman $\geq 2d_b$ y recubrimiento libre $\geq d_b$.

TABLA A.12

Longitud de desarrollo a compresión, pulg. $l_{db} = 0.02\, d_b f_y / \sqrt{f'_c}$ pero $\geq 0.0003 d_b f_y$ (longitud mínima de 8 pulg en todos los casos)

		f'_c							
		3000		4000		5000		6000	
Barra No.	f_y klb/pulg²	l_{db} básica	Confinada	l_{db} básica	Confinada	l_{db} básica	Confinada	l_{db} básica	Confinada
3	40	8	8	8	8	8	8	8	8
	50	8	8	8	8	8	8	8	8
	60	8	8	8	8	8	8	8	8
4	40	8	8	8	8	8	8	8	8
	50	9	8	8	8	8	8	8	8
	60	11	8	9	8	9	8	9	8
5	40	9	8	8	8	8	8	8	8
	50	11	9	10	8	9	8	9	8
	60	14	10	12	9	11	8	11	8
6	40	11	8	9	8	9	8	9	8
	50	14	10	12	9	11	8	11	8
	60	16	12	14	11	14	10	14	10
7	40	13	10	11	8	11	8	11	8
	50	16	12	14	10	13	10	13	10
	60	19	14	17	12	16	12	16	12
8	40	15	11	13	9	12	9	12	9
	50	18	14	16	12	15	11	15	11
	60	22	16	19	14	18	14	18	14
9	40	16	12	14	11	14	10	14	10
	50	21	15	18	13	17	13	17	13
	60	25	19	21	16	20	15	20	15
10	40	19	14	16	12	15	11	15	11
	50	23	17	20	15	19	14	19	14
	60	28	21	24	18	23	17	23	17
11	40	21	15	18	13	17	13	17	13
	50	26	19	22	17	21	16	21	16
	60	31	23	27	20	25	19	25	19
14	40	25	19	21	16	20	15	20	15
	50	31	23	27	20	25	19	25	19
	60	37	28	32	24	30	23	30	23
18	40	33	25	29	21	27	20	27	20
	50	41	31	36	27	34	25	34	25
	60	49	37	43	32	41	30	41	30

TABLA A.13
Tipos comunes disponibles de mallas electrosoldadas de alambre

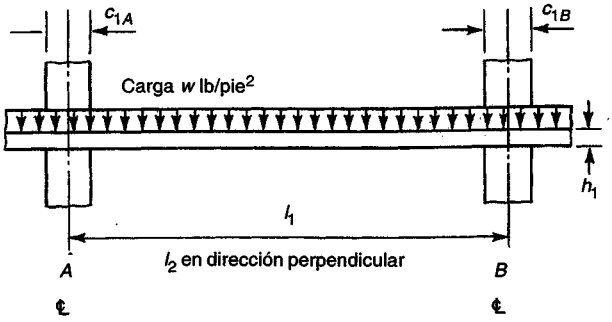
Designación del acero		Área de acero, pulg²/pie		
Nueva designación (mediante el número *W*)	Antigua designación (mediante el calibre del alambre de acero)	Longitudinal	Transversal	Peso (aproximado) lb por 100 pie²
	Rollos			
6 × 6-W1.4 × W1.4	6 × 6-10 × 10	0.028	0.028	19
6 × 6-W2.0 × W2.0	6 × 6-8 × 8[a]	0.040	0.040	27
6 × 6-W2.9 × W2.9	6 × 6-6 × 6	0.058	0.058	39
6 × 6-W4.0 × W4.0	6 × 6-4 × 4	0.080	0.080	54
4 × 4-W1.4 × W1.4	4 × 4-10 × 10	0.042	0.042	29
4 × 4-W2.0 × W2.0	4 × 4-8 × 8[a]	0.060	0.060	41
4 × 4-W2.9 × W2.9	4 × 4-6 × 6	0.087	0.087	59
4 × 4-W4.0 × W4.0	4 × 4-4 × 4	0.120	0.120	82
	Láminas			
6 × 6-W2.9 × W2.9	6 × 6-6 × 6	0.058	0.058	39
6 × 6-W4.0 × W4.0	6 × 6-4 × 4	0.080	0.080	54
6 × 6-W5.5 × W5.5	6 × 6-2 × 2[b]	0.110	0.110	75
4 × 4-W4.0 × W4.0	4 × 4-4 × 4	0.120	0.120	82

[a] El tamaño exacto del número *W* para calibre 8 es W2.1.

[b] El tamaño exacto del número *W* para calibre 2 es W5.4.

Fuente: Tomada de la referencia 2.51.

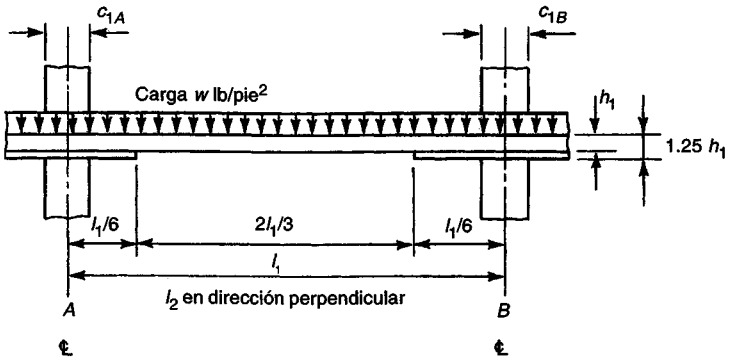
TABLA A.14a
Coeficientes para losas con momento de inercia[a] variable



Dimensiones de las columnas		Carga uniforme MF* = coef. $(wl_2 l_1^2)$		Coeficiente de rigidez[b]		Coeficiente de transmisión*	
c_{1A}/l_1	c_{1B}/l_1	M_{AB}	M_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	COT_{AB}	COT_{BA}
0.00	0.00	0.083	0.083	4.00	4.00	0.500	0.500
	0.05	0.083	0.084	4.01	4.04	0.504	0.500
	0.10	0.082	0.086	4.03	4.15	0.513	0.499
	0.15	0.081	0.089	4.07	4.32	0.528	0.498
	0.20	0.079	0.093	4.12	4.56	0.548	0.495
	0.25	0.077	0.097	4.18	4.88	0.573	0.491
0.05	0.05	0.084	0.084	4.05	4.05	0.503	0.503
	0.10	0.083	0.086	4.07	4.15	0.513	0.503
	0.15	0.081	0.089	4.11	4.33	0.528	0.501
	0.20	0.080	0.092	4.16	4.58	0.548	0.499
	0.25	0.078	0.096	4.22	4.89	0.573	0.494
0.10	0.10	0.085	0.085	4.18	4.18	0.513	0.513
	0.15	0.083	0.088	4.22	4.36	0.528	0.511
	0.20	0.082	0.091	4.27	4.61	0.548	0.508
	0.25	0.080	0.095	4.34	4.93	0.573	0.504
0.15	0.15	0.086	0.086	4.40	4.40	0.526	0.526
	0.20	0.084	0.090	4.46	4.65	0.546	0.523
	0.25	0.083	0.094	4.53	4.98	0.571	0.519
0.20	0.20	0.088	0.088	4.72	4.72	0.543	0.543
	0.25	0.086	0.092	4.79	5.05	0.568	0.539
0.25	0.25	0.090	0.090	5.14	5.14	0.563	0.563

[a] Aplicable cuando $c_1/l_1 = c_2/l_2$. Para otras relaciones entre estos cocientes, las constantes producirán un margen pequeño de error.
[b] La rigidez es $K_{AB} = k_{AB}E(l_2 h_1^3/12l_1)$ y $K_{BA} = k_{BA}E(l_2 h_1^3/12l_1)$.
* *N. del T*: MF: Momento de empotramiento o fijación.
COT: Coeficiente de transmisión.

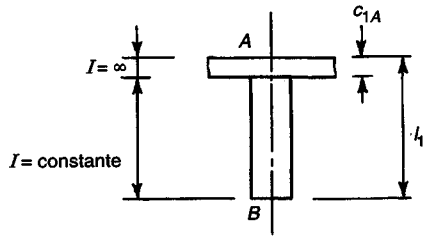
TABLA A.14b
Coeficientes para losas con momento de inercia[a] variable



Dimensiones de las columnas		Carga uniforme MF = coef. ($wl_2 l_1^2$)		Coeficiente de rigidez[b]		Coeficiente de transmisión	
c_{1A}/l_1	c_{1B}/l_1	M_{AB}	M_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	COT_{AB}	COT_{BA}
0.00	0.00	0.088	0.088	4.78	4.78	0.541	0.541
	0.05	0.087	0.089	4.80	4.82	0.545	0.541
	0.10	0.087	0.090	4.83	4.94	0.553	0.541
	0.15	0.085	0.093	4.87	5.12	0.567	0.540
	0.20	0.084	0.096	4.93	5.36	0.585	0.537
	0.25	0.082	0.100	5.00	5.68	0.606	0.534
0.05	0.05	0.088	0.088	4.84	4.84	0.545	0.545
	0.10	0.087	0.090	4.87	4.95	0.553	0.544
	0.15	0.085	0.093	4.91	5.13	0.567	0.543
	0.20	0.084	0.096	4.97	5.38	0.584	0.541
	0.25	0.082	0.100	5.05	5.70	0.606	0.537
0.10	0.10	0.089	0.089	4.98	4.98	0.553	0.553
	0.15	0.088	0.092	5.03	5.16	0.566	0.551
	0.20	0.086	0.094	5.09	5.42	0.584	0.549
	0.25	0.084	0.099	5.17	5.74	0.606	0.546
0.15	0.15	0.090	0.090	5.22	5.22	0.565	0.565
	0.20	0.089	0.094	5.28	5.47	0.583	0.563
	0.25	0.087	0.097	5.37	5.80	0.604	0.559
0.20	0.20	0.092	0.092	5.55	5.55	0.580	0.580
	0.25	0.090	0.096	5.64	5.88	0.602	0.577
0.25	0.25	0.094	0.094	5.98	5.98	0.598	0.598

[a] Aplicable cuando $c_1/l_1 = c_2/l_2$. Para otras relaciones entre estos cocientes, las constantes producirán un margen pequeño de error.
[b] La rigidez es $K_{AB} = k_{AB}E(l_2 h_1^3/12l_1)$ y $K_{BA} = k_{BA}E(l_2 h_1^3/12l_1)$.

TABLA A.14c
Coeficientes para columnas con momento de inercia variable



Espesor de la losa	Carga uniforme MF = coef. $(wl_2 l_1^2)$		Coeficiente de rigidez		Coeficiente de transmisión	
c_{1A}/l_1	M_{AB}	M_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	COT_{AB}	COT_{BA}
0.00	0.083	0.083	4.00	4.00	0.500	0.500
0.05	0.100	0.075	4.91	4.21	0.496	0.579
0.10	0.118	0.068	6.09	4.44	0.486	0.667
0.15	0.135	0.060	7.64	4.71	0.471	0.765
0.20	0.153	0.053	9.69	5.00	0.452	0.875
0.25	0.172	0.047	12.44	5.33	0.429	1.000

TABLA A.15
Tamaño y paso de espirales, Código ACI

Diámetro de la columna, pulg	Fuera-a-fuera de la espiral, pulg	f'_c 2500	3000	4000	5000
f_y = 40,000					
14, 15	11, 12	$\frac{3}{8}$–2	$\frac{3}{8}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$–$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$–$1\frac{3}{4}$
16	13	$\frac{3}{8}$–2	$\frac{3}{8}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$–$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$–2
17–19	14–16	$\frac{3}{8}$–$2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$–$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$–2
20–23	17–20	$\frac{3}{8}$–$2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$–$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$–2
24–30	21–27	$\frac{3}{8}$–$2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$–2	$\frac{1}{2}$–$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$–2
f_y = 60,000					
14, 15	11, 12	$\frac{1}{4}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–$2\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–2	$\frac{1}{2}$–$2\frac{3}{4}$
16–23	13–20	$\frac{1}{4}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–$2\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–2	$\frac{1}{2}$–3
24–29	21–26	$\frac{1}{4}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–3	$\frac{3}{8}$–$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$–3
30	27	$\frac{1}{4}$–$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$–3	$\frac{3}{8}$–$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$–$3\frac{1}{4}$

TABLA A.16
Propiedades de aceros de preesfuerzo[a]

Torón de siete alambres, f_{pu} = 270 klb/pulg²						
Diámetro nominal (pulg)	**Área (pulg²)**	**Peso (lb/pie lineal)**	**$0.7f_{pu}A_p$ (klb)**	**$0.75f_{pu}A_p$ (klb)**	**$0.8f_{pu}A_p$ (klb)**	**$f_{pu}A_p$ (klb)**
$\frac{3}{8}$ (0.375)	0.085	0.29	16.1	17.2	18.4	23.0
$\frac{7}{16}$ (0.438)	0.115	0.40	21.7	23.3	24.8	31.0
$\frac{1}{2}$ (0.500)	0.153	0.53	28.9	31.0	33.0	41.3
(0.600)	0.215	0.74	40.7	43.5	46.5	58.1

Torón de siete alambres, f_{pu} = 250 klb/pulg²					
Diámetro nominal (pulg)	**Área (pulg²)**	**Peso (lb/pie lineal)**	**$0.7f_{pu}A_p$ (klb)**	**$0.8f_{pu}A_p$ (klb)**	**$f_{pu}A_p$ (klb)**
$\frac{1}{4}$ (0.250)	0.036	0.12	6.3	7.2	9.0
$\frac{5}{16}$ (0.313)	0.058	0.20	10.2	11.6	14.5
$\frac{3}{8}$ (0.375)	0.080	0.27	14.0	16.0	20.0
$\frac{7}{16}$ (0.438)	0.108	0.37	18.9	21.6	27.0
$\frac{1}{2}$ (0.500)	0.144	0.49	25.2	28.8	36.0
(0.600)	0.215	0.74	37.6	43.0	53.8

Alambres de preesfuerzo						
Diámetro	**Área (pulg²)**	**Peso (lb/pie lineal)**	**Resistencia a la tensión f_u (klb/pulg²)**	**$0.75f_{pu}A_p$ (klb)**	**$0.8f_{pu}A_p$ (klb)**	**$f_{pu}A_p$ (klb)**
0.192	0.0289	0.098	250	5.05	5.78	7.22
0.196	0.0302	0.100	250	5.28	6.04	7.55
0.250	0.0491	0.170	240	8.25	9.42	11.78
0.276	0.0598	0.200	235	9.84	11.24	14.05

Barras lisas de preesfuerzo, f_{pu} = 145 klb/pulg²

Diámetro nominal (pulg)	Área (pulg²)	Peso (lb/pie lineal)	$0.7f_{pu}A_p$ (klb)	$0.8f_{pu}A_p$ (klb)	$f_{pu}A_p$ (klb)
$\frac{3}{4}$ (0.750)	0.442	1.50	44.9	51.3	64.1
$\frac{7}{8}$ (0.875)	0.601	2.04	61.0	69.7	87.1
1 (1.000)	0.785	2.67	79.7	91.0	113.8
$1\frac{1}{8}$ (1.125)	0.994	3.38	100.9	115.3	144.1
$1\frac{1}{4}$ (1.250)	1.227	4.17	124.5	142.3	177.9
$1\frac{3}{8}$ (1.375)	1.485	5.05	150.7	172.2	215.3

Barras lisas de preesfuerzo, f_{pu} = 160 klb/pulg²

Diámetro nominal (pulg)	Área (pulg²)	Peso (lb/pie lineal)	$0.7f_{pu}A_p$ (klb)	$0.8f_{pu}A_p$ (klb)	$f_{pu}A_p$ (klb)
$\frac{3}{4}$ (0.750)	0.442	1.50	49.5	56.6	70.7
$\frac{7}{8}$ (0.875)	0.601	2.04	67.3	77.0	96.2
1 (1.000)	0.785	2.67	87.9	100.5	125.6
$1\frac{1}{8}$ (1.125)	0.994	3.38	111.3	127.2	159.0
$1\frac{1}{4}$ (1.250)	1.227	4.17	137.4	157.0	196.3
$1\frac{3}{8}$ (1.375)	1.485	5.05	166.3	190.1	237.6

[a] Adaptada del *PCI Design Handbook*, 4a. ed., Prestressed Concrete Institute, Chicago, 1985.

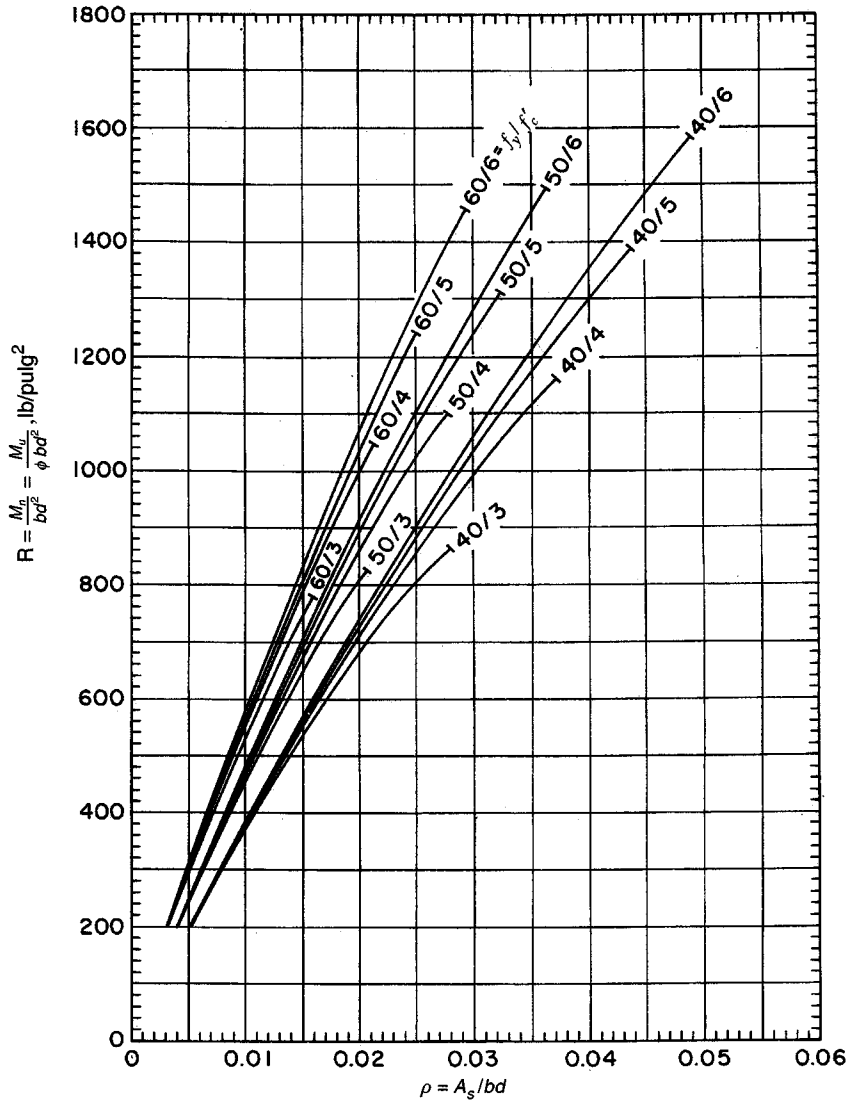


GRÁFICO A.1a
Capacidad de momento de secciones rectangulares.

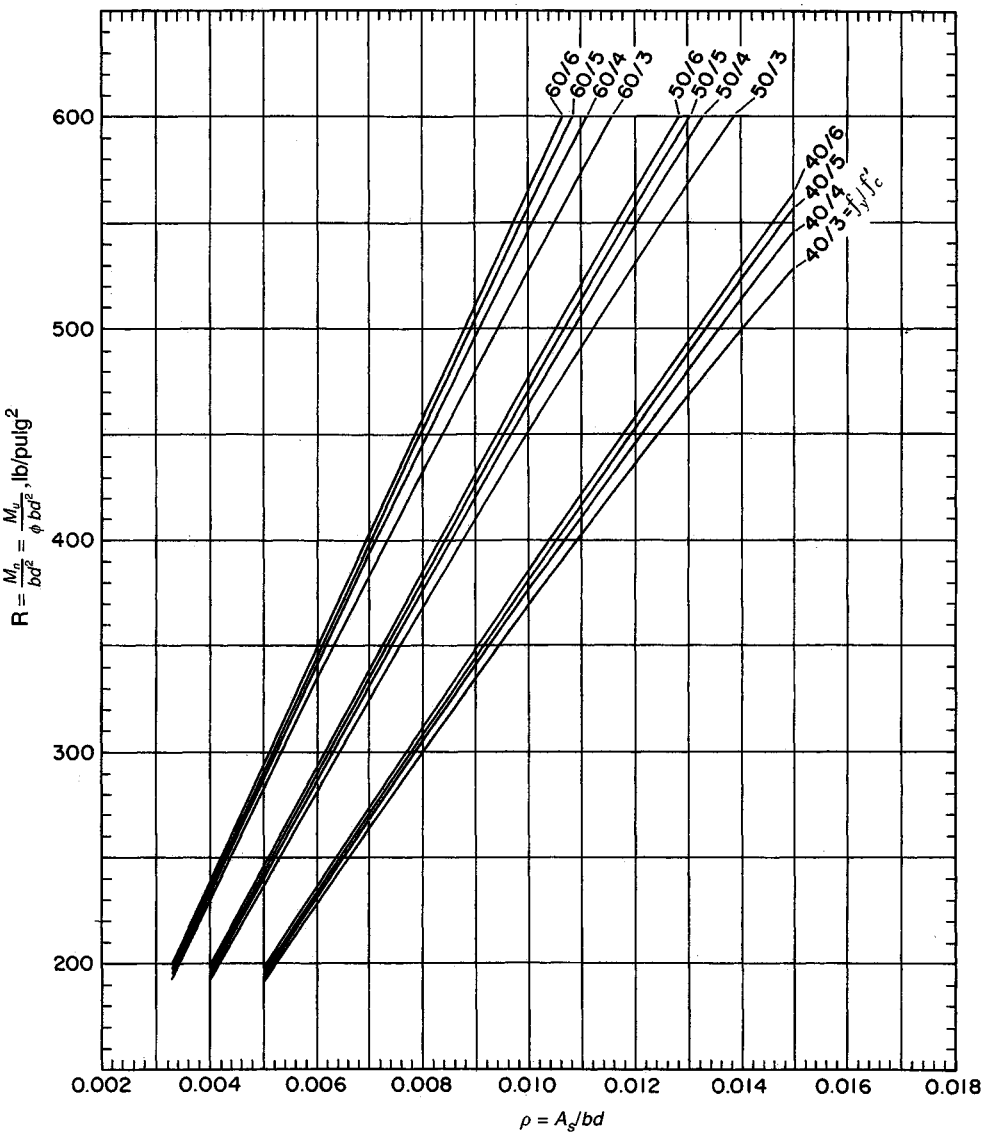


GRÁFICO A.1b
Capacidad de momento de secciones rectangulares.

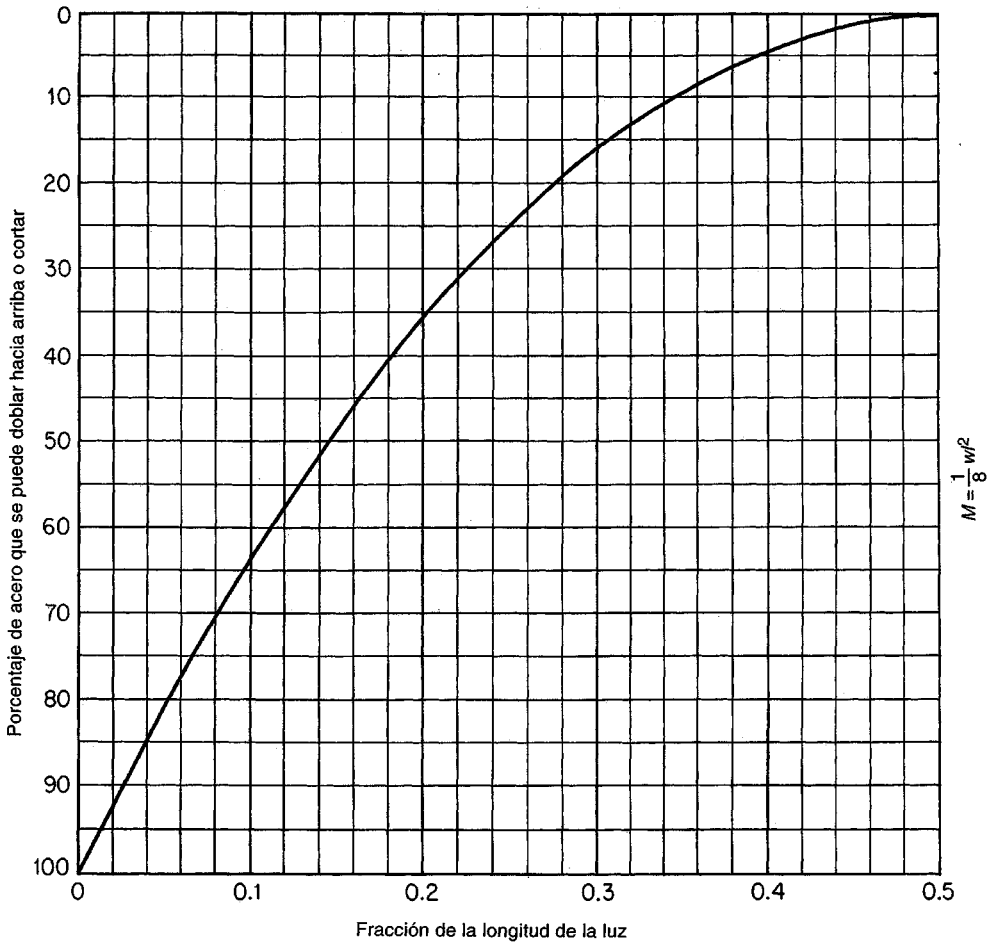


GRÁFICO A.2
Ubicación de puntos de doblado o corte de barras en vigas simplemente apoyadas y cargadas uniformemente.

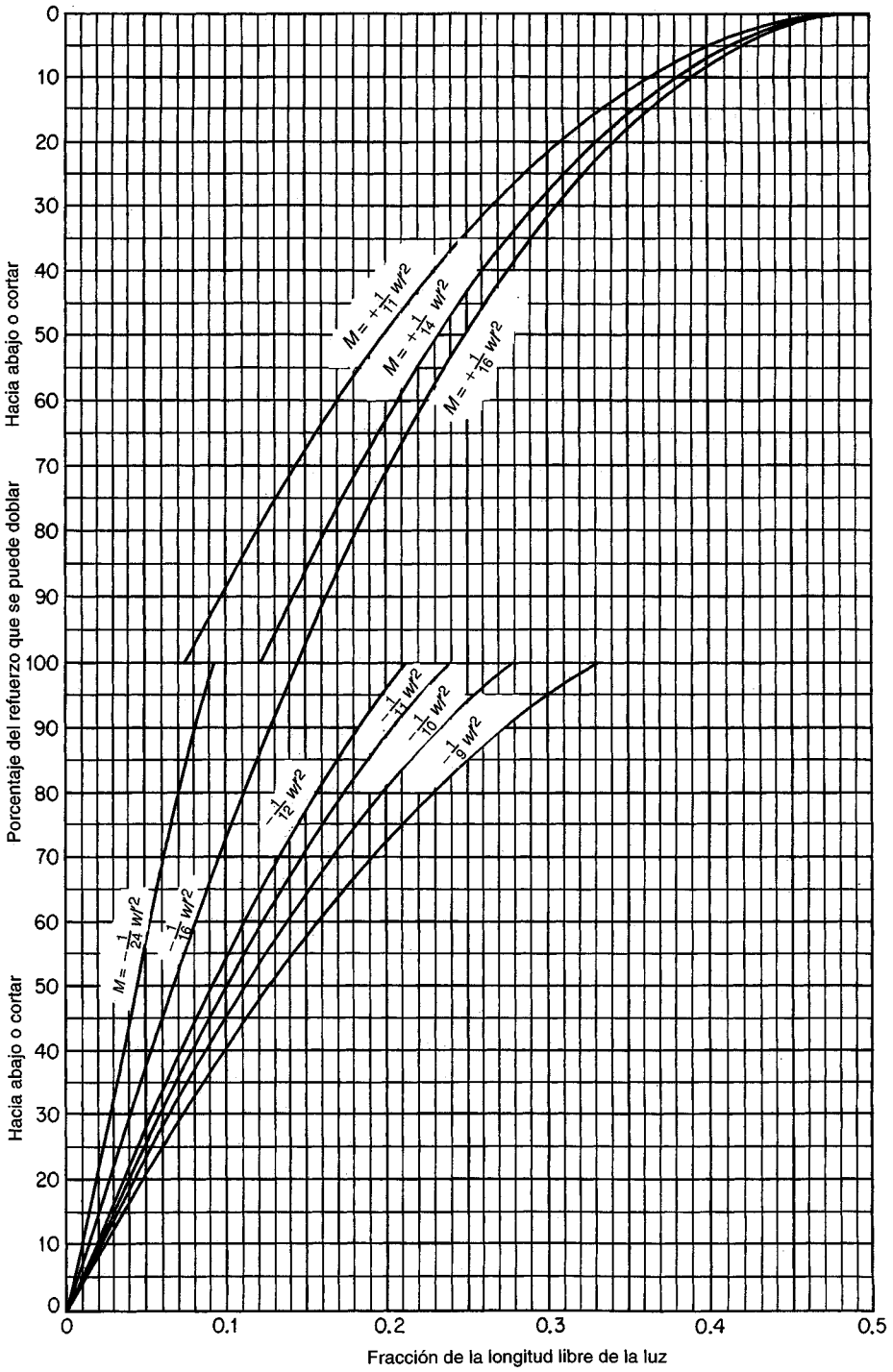


GRÁFICO A.3
Ubicación aproximada de puntos de doblado o corte de barras para vigas continuas cargadas uniformemente y construidas en forma integral con sus apoyos, de acuerdo con los coeficientes del Código ACI.

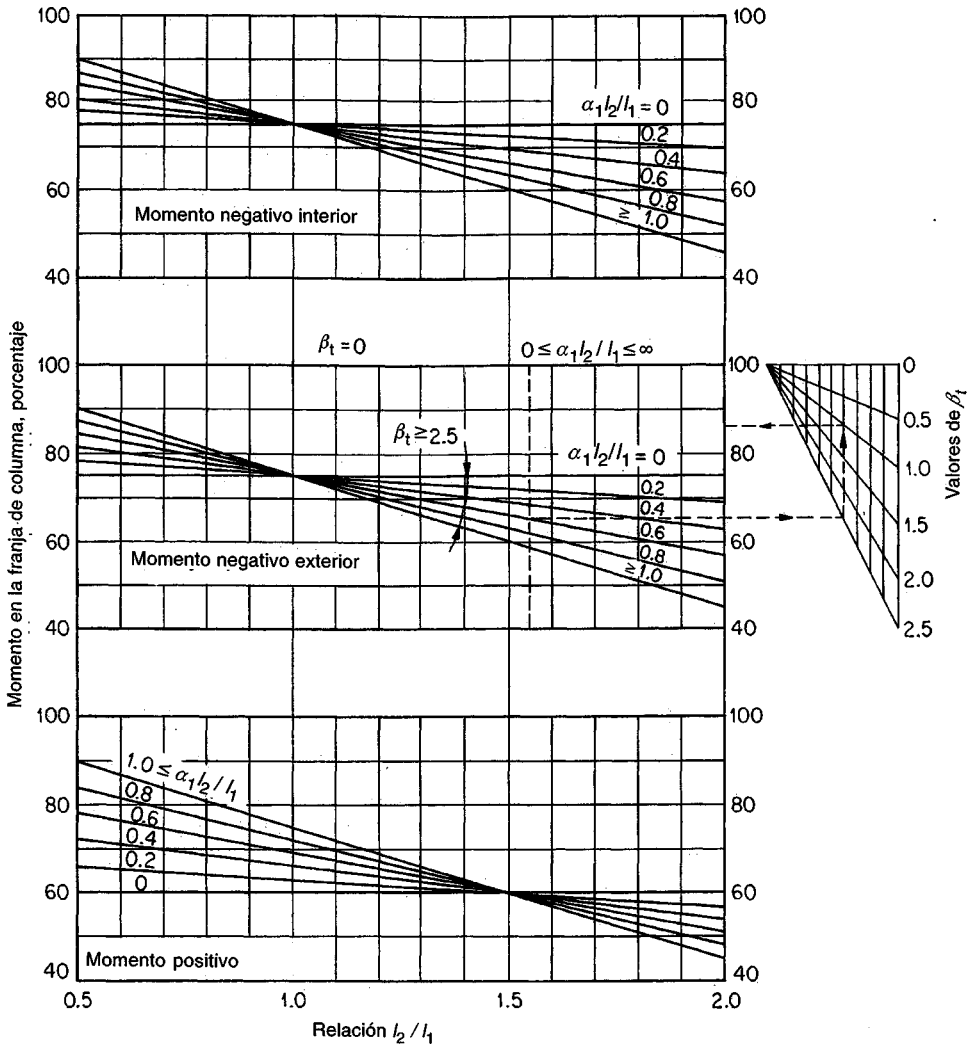


GRÁFICO A.4
Diagrama de interpolación para distribución lateral de momentos en losas.

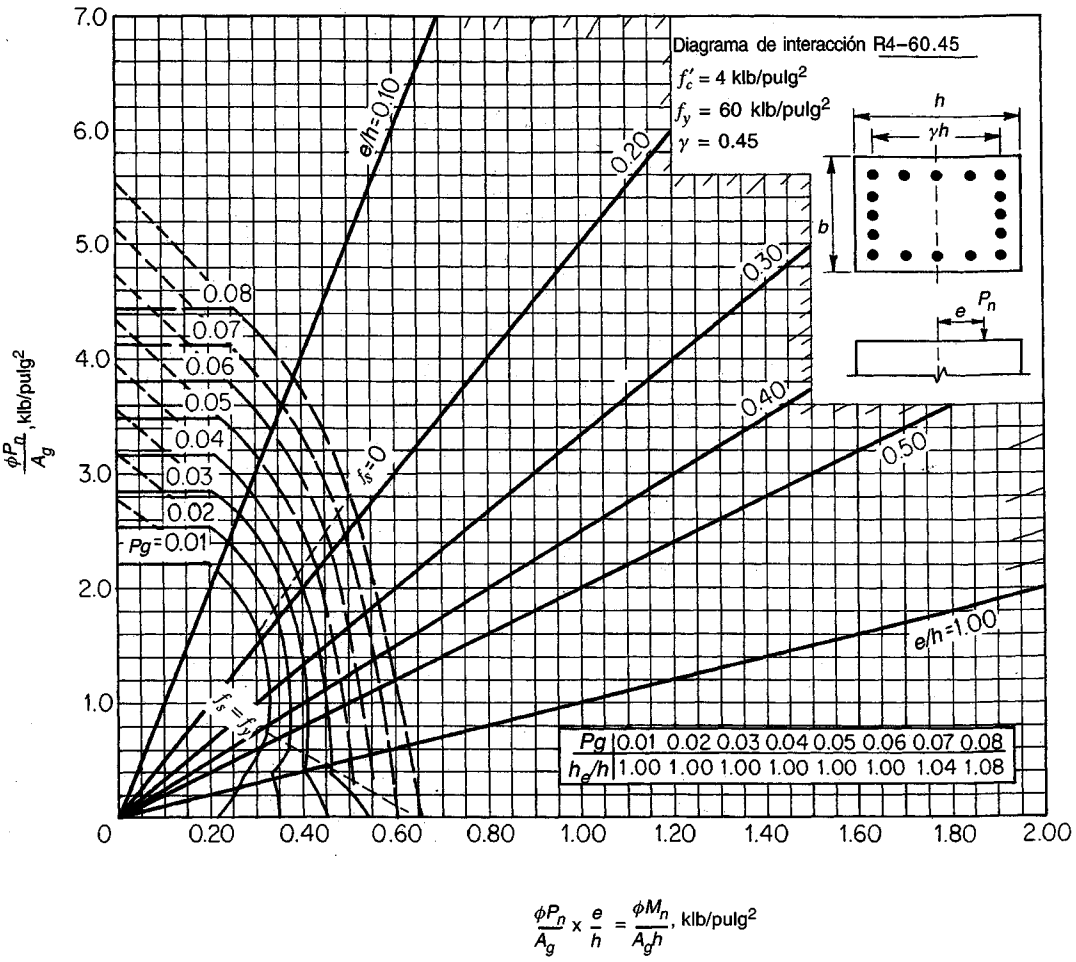


GRÁFICO A.5
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección rectangular con barras en las cuatro caras y $\gamma = 0.45$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

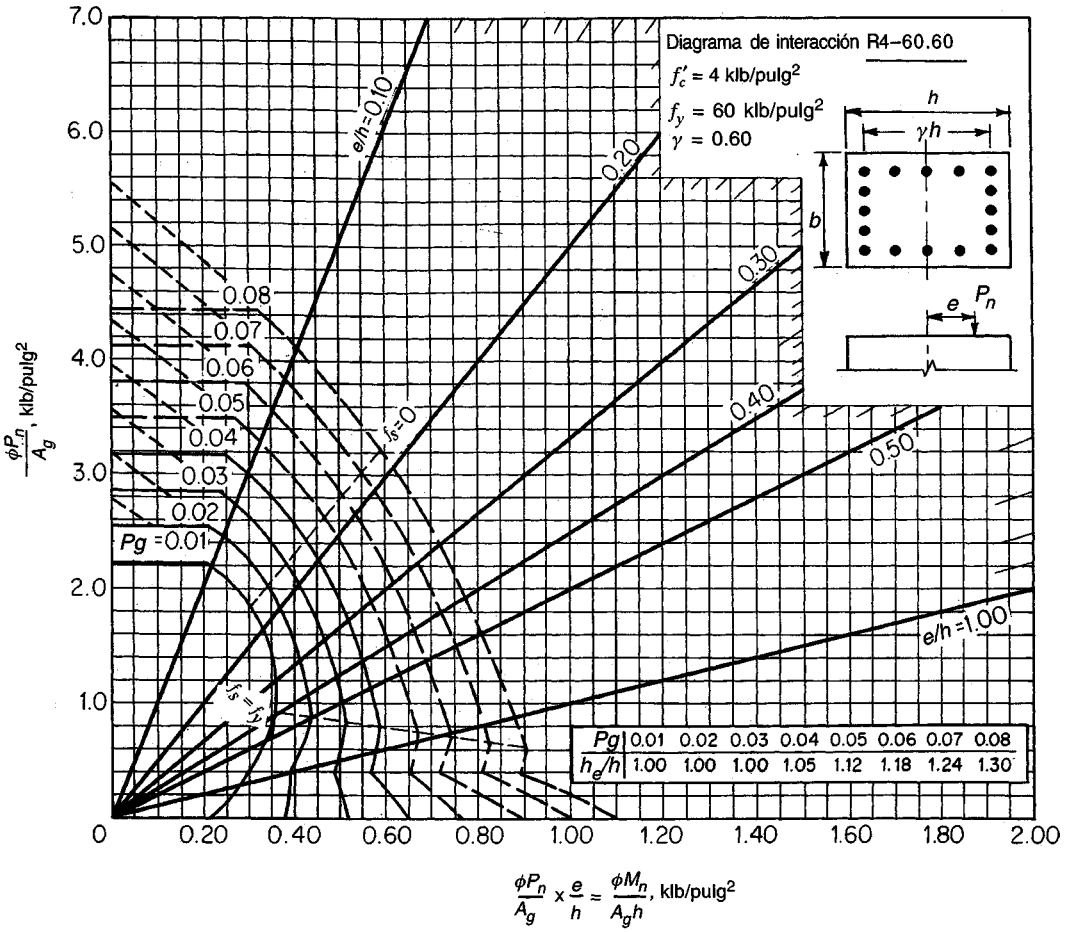


GRÁFICO A.6
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección rectangular con barras en las cuatro caras y $\gamma = 0.60$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

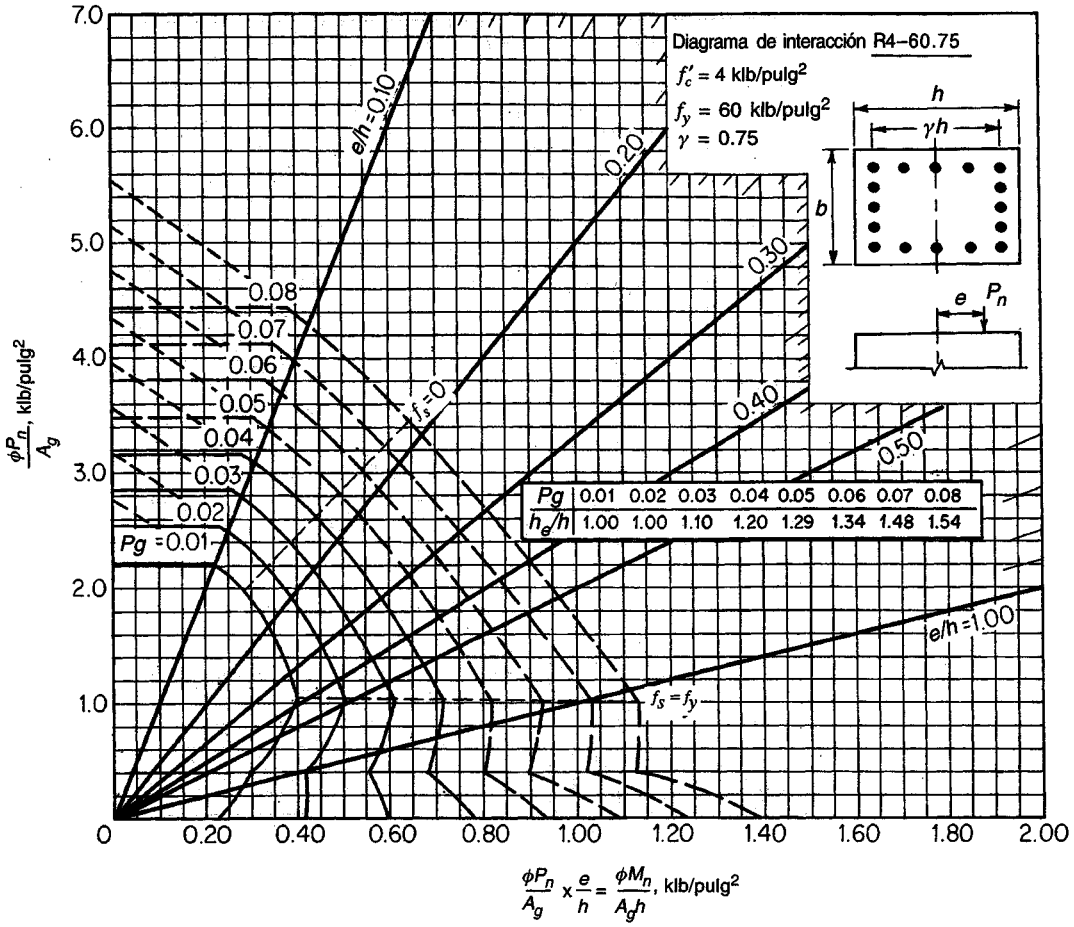


GRÁFICO A.7
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección rectangular con barras en las cuatro caras y $\gamma = 0.75$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

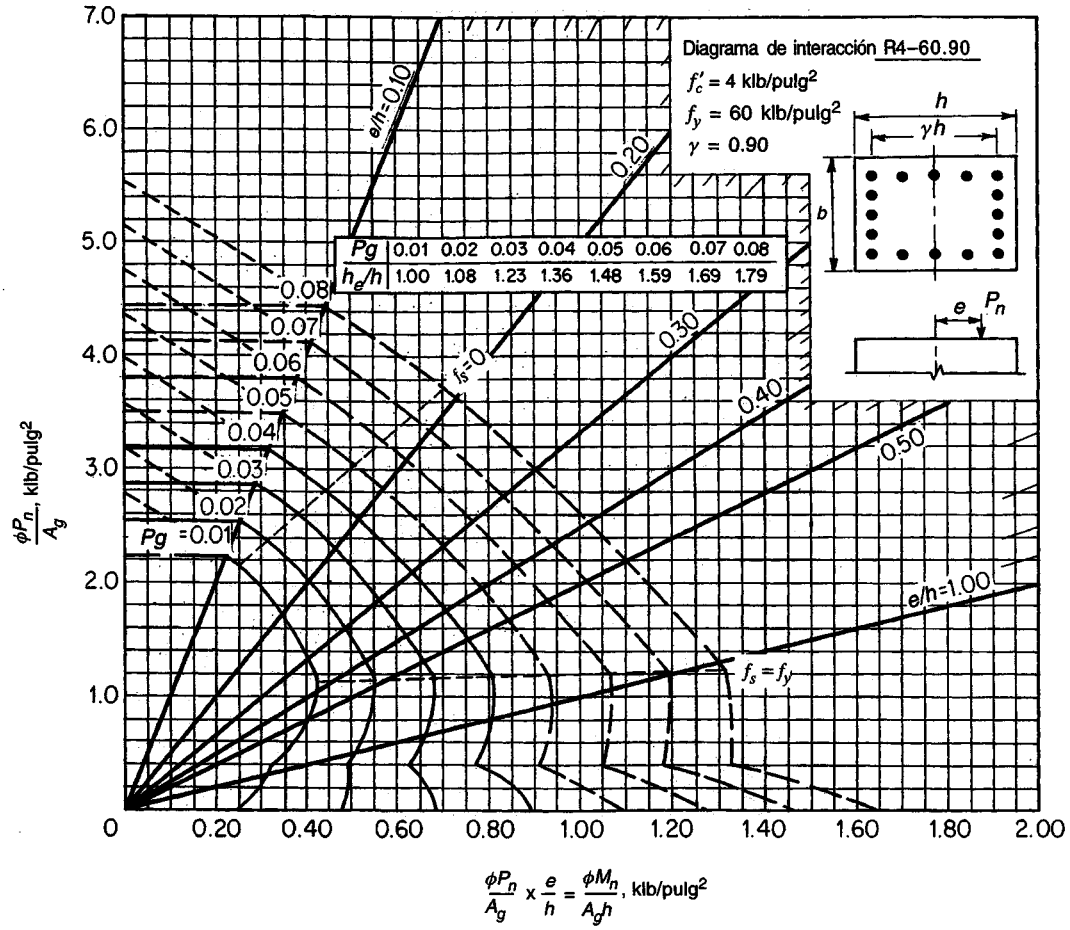


GRÁFICO A.8
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección rectangular con barras en las cuatro caras y $\gamma = 0.90$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

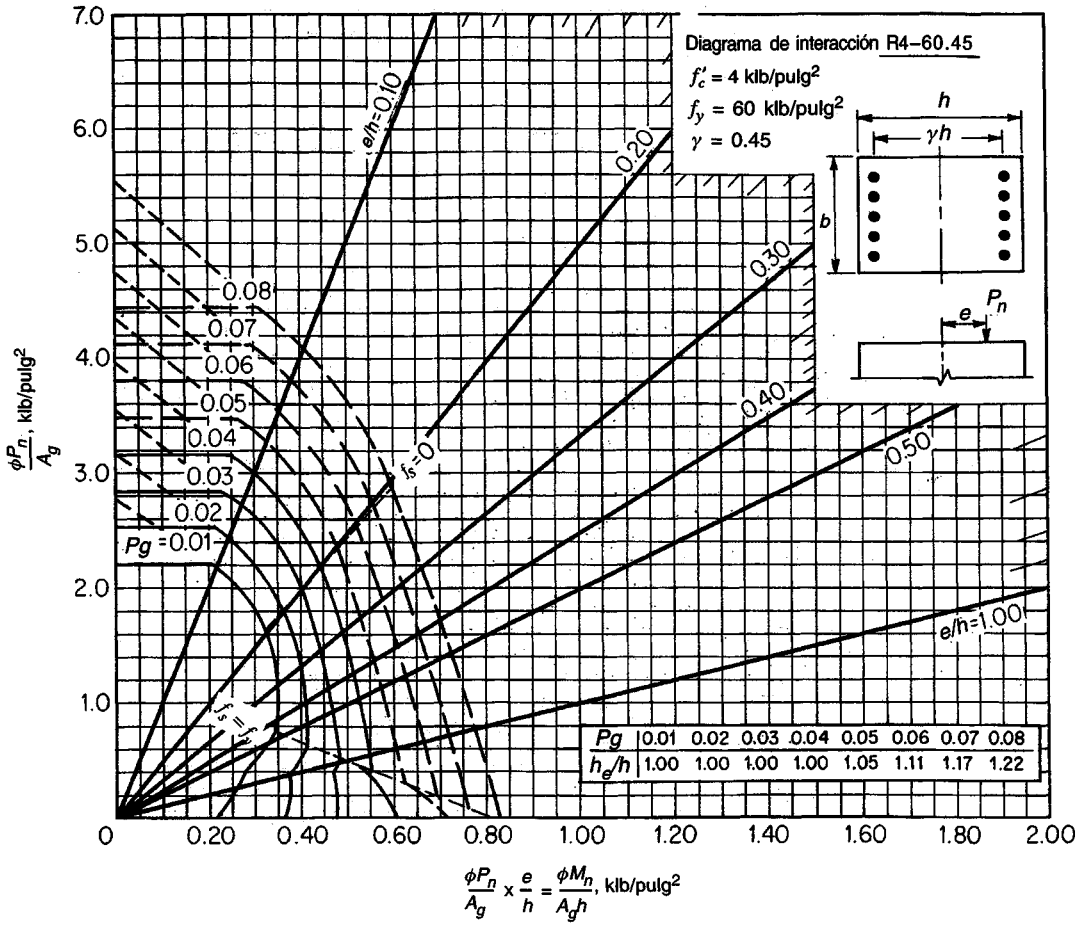


GRÁFICO A.9
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección rectangular con barras en las caras extremas y $\gamma = 0.45$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

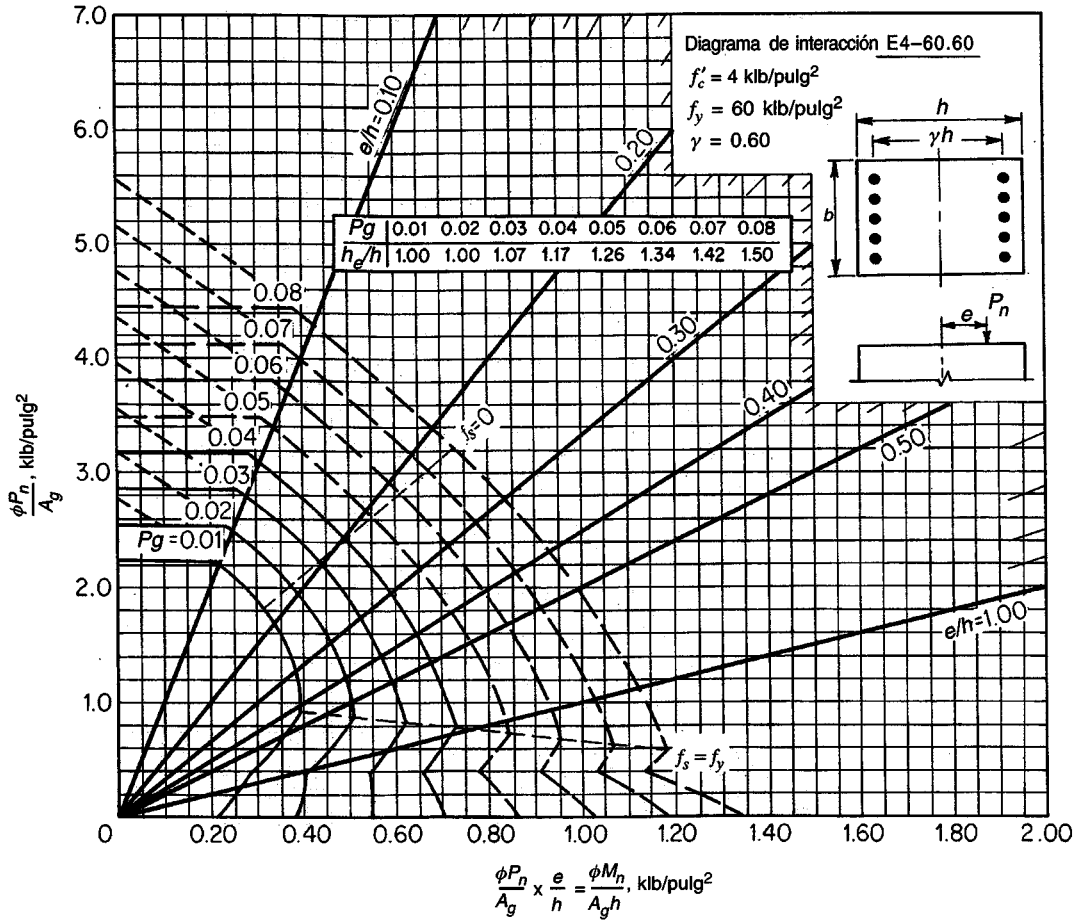


GRÁFICO A.10
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección rectangular con barras en las caras extremas y $\gamma = 0.60$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

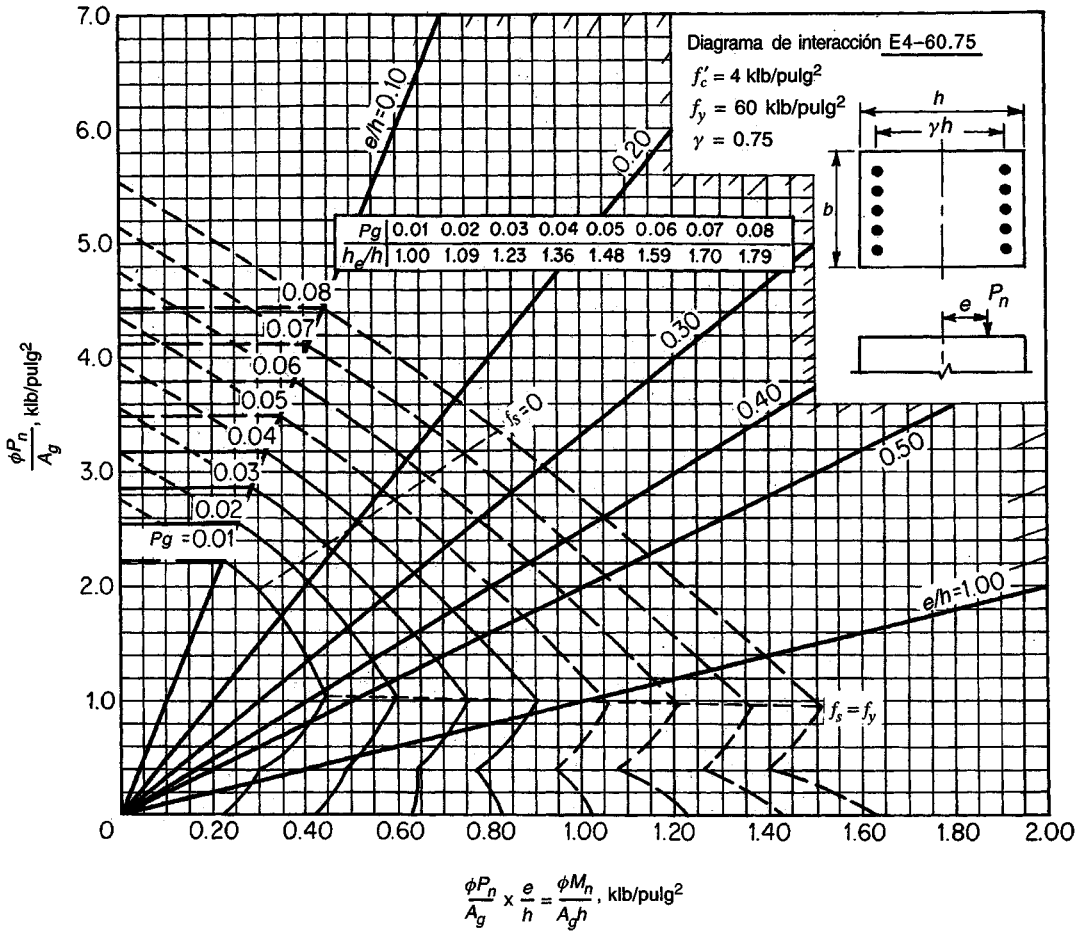


GRÁFICO A.11
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección rectangular con barras en las caras extremas y $\gamma = 0.75$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

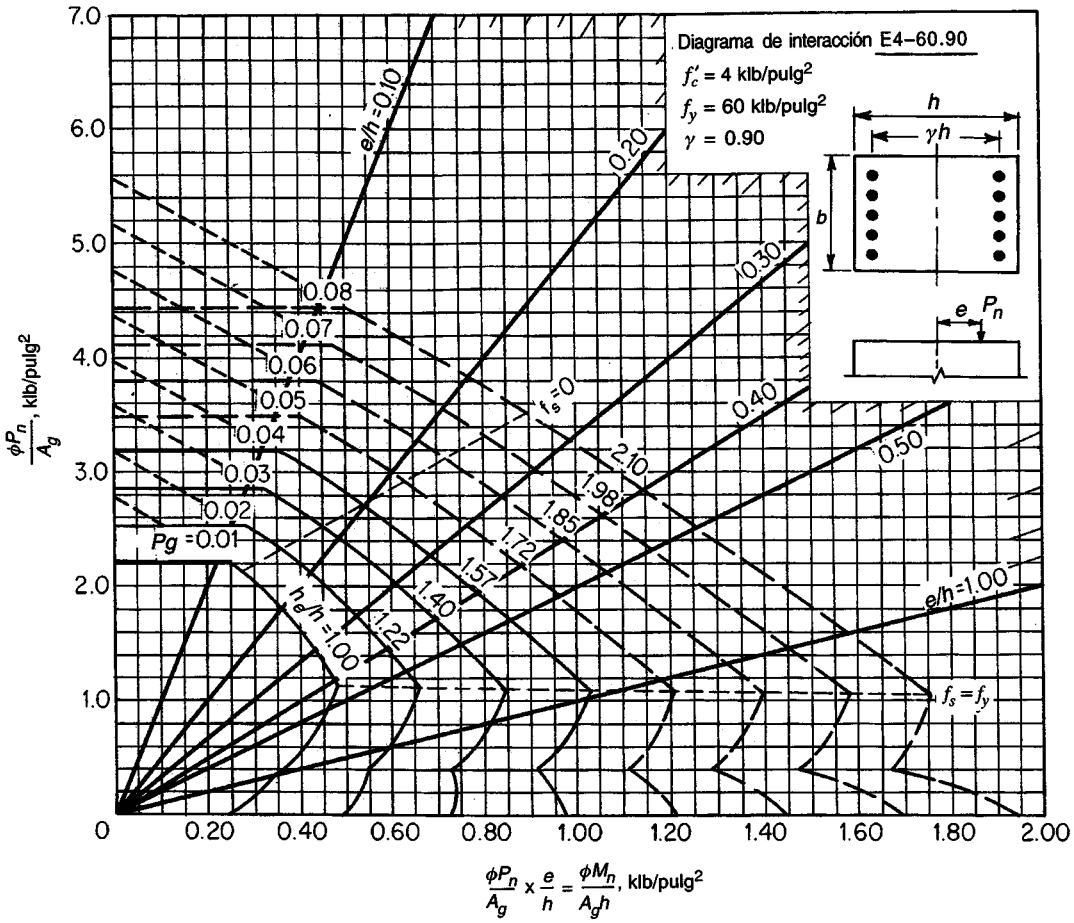


GRÁFICO A.12
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección rectangular con barras en las caras extremas y $\gamma = 0.90$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

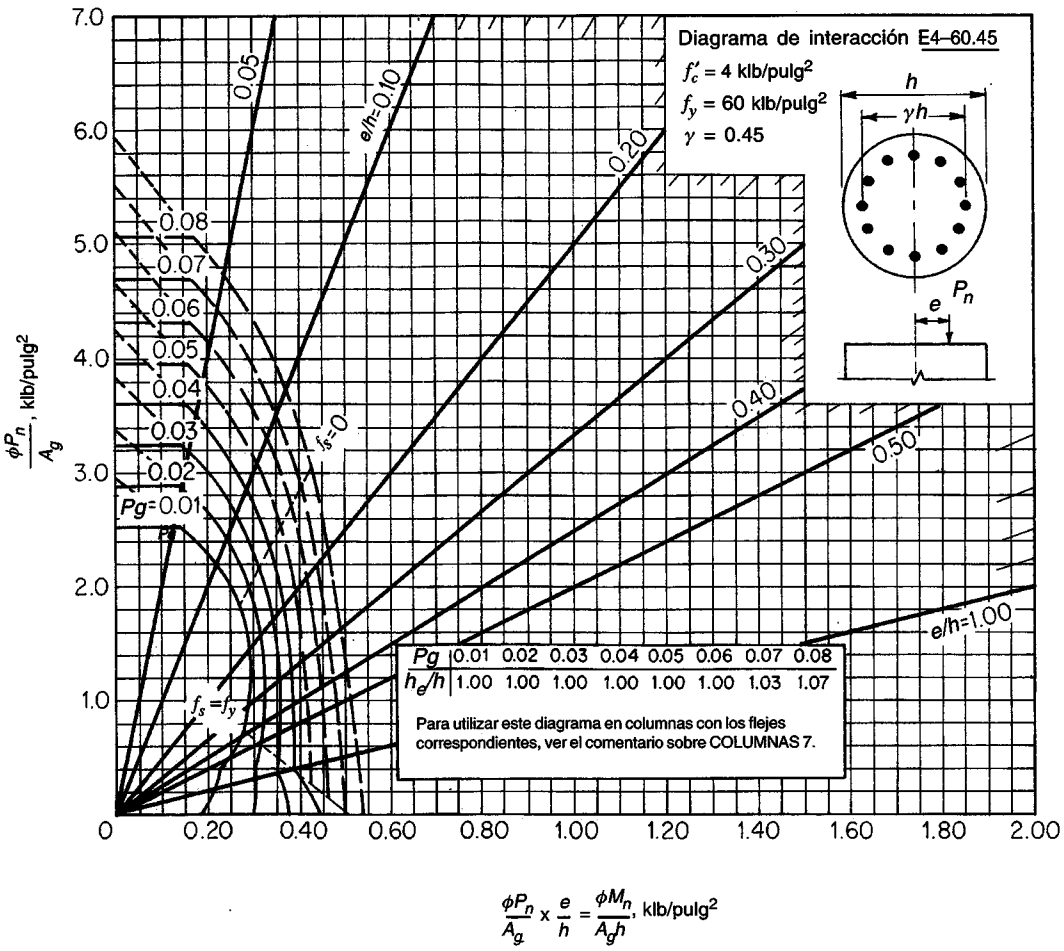


GRÁFICO A.13
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección circular con $\gamma = 0.45$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

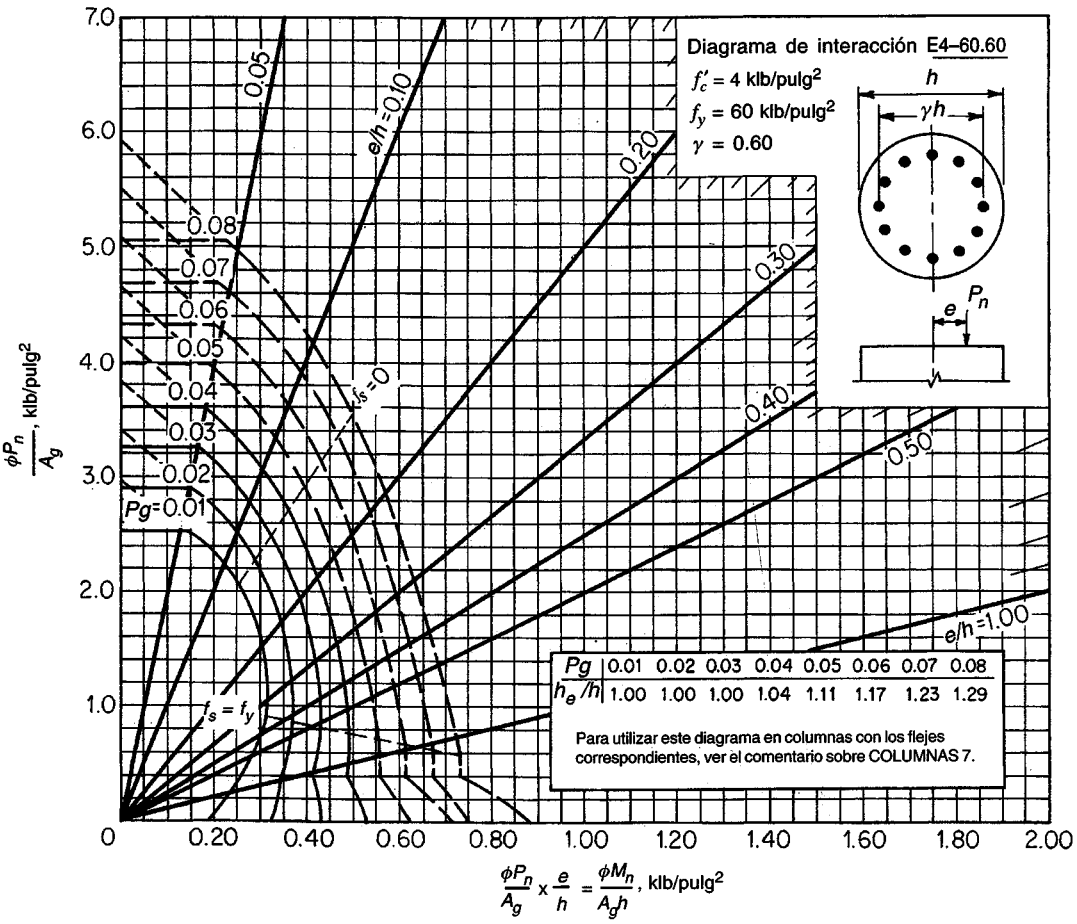


GRÁFICO A.14
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección circular con $\gamma = 0.60$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

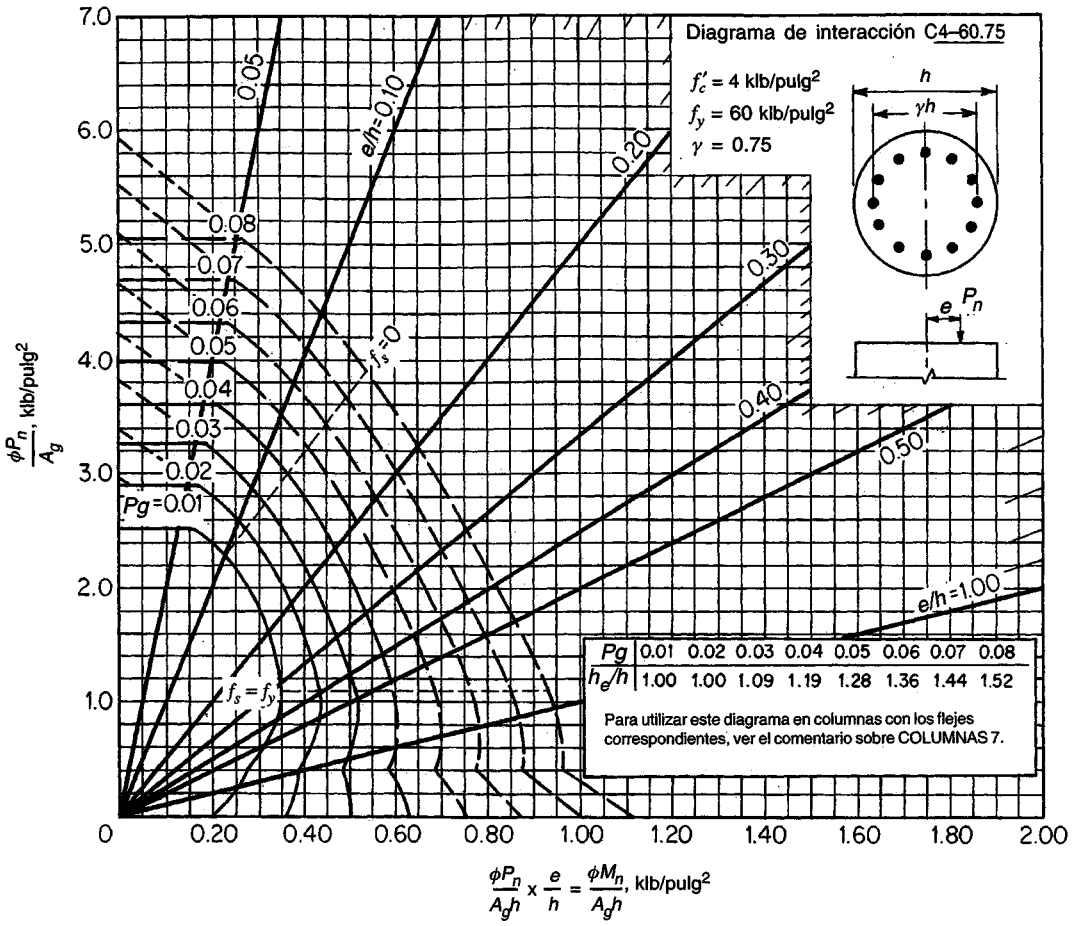


GRÁFICO A.15
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección circular con $\gamma = 0.75$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

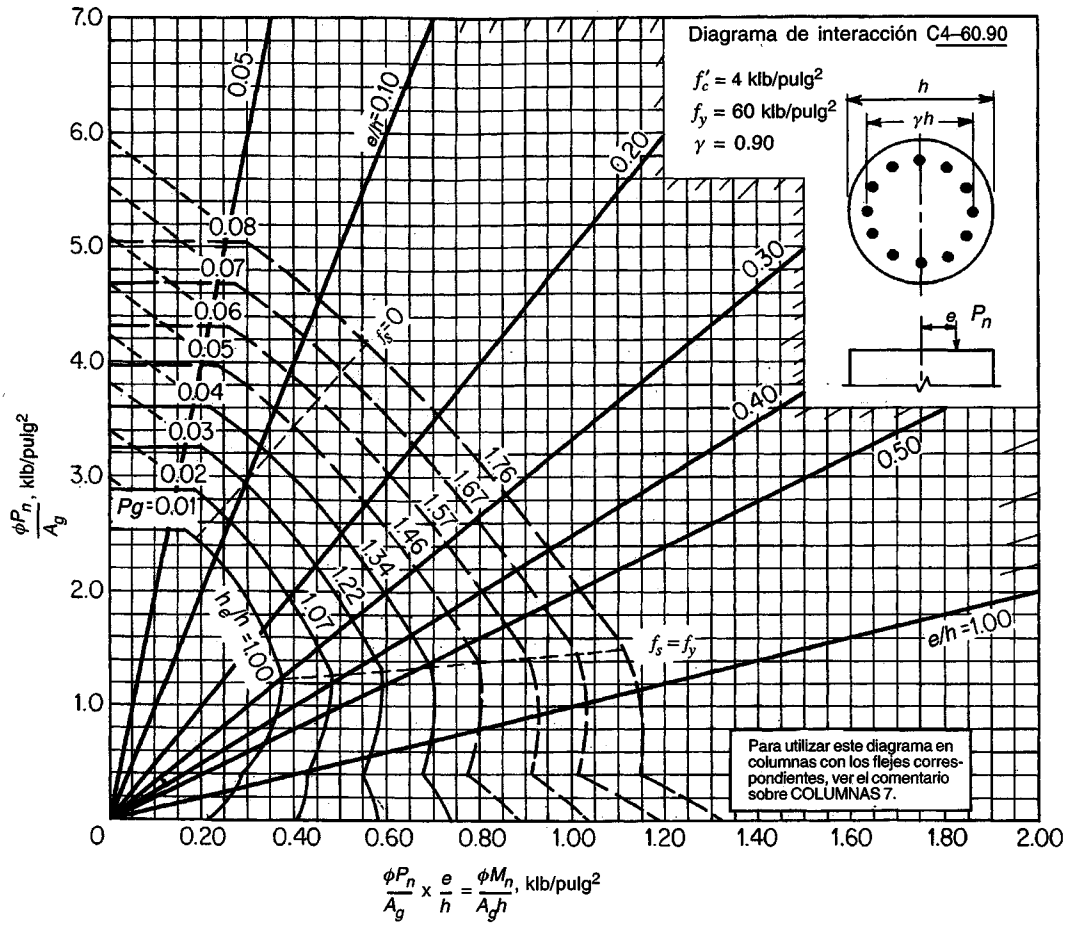


GRÁFICO A.16
Diagrama de interacción de la resistencia de columnas de sección circular con $\gamma = 0.90$ (*tomado de la referencia* 8.7. *Cortesía del American Concrete Institute*).

APÉNDICE
B

FACTORES DE CONVERSIÓN AL SI: UNIDADES USUALES EN LOS ESTADOS UNIDOS A UNIDADES DEL SISTEMA MÉTRICO SI

Geometría global	
Luces	1 pie = 0.3048 m
Desplazamientos	1 pulg = 25.4 mm
Área superficial	1 pie^2 = 0.0929 m^2
Volumen	1 pie^3 = 0.0283 m^3
	1 yd^3 = 0.765 m^3
Propiedades estructurales	
Dimensiones de la sección transversal	1 pulg = 25.4 mm
Área	1 $pulg^2$ = 645.2 mm^2
Módulo de la sección	1 $pulg^3$ = 16.39 × 10^3 mm^3
Momento de inercia	1 $pulg^4$ = 0.4162 × 10^6 mm^4
Propiedades de los materiales	
Densidad	1 lb/pie^3 = 16.03 kg/m^3
Módulos y esfuerzos	1 $lb/pulg^2$ = 0.006895 MPa
	1 $klb/pulg^2$ = 6.895 MPa
Cargas	
Cargas concentradas	1 lb = 4.448 N
	1 klb = 4.448 kN
Densidad	1 lb/pie^3 = 0.1571 kN/m^3
Cargas lineales	1 klb/pie = 14.59 kN/m
Cargas de superficie	1 lb/pie^2 = 0.0479 kN/m^2
	1 klb/pie^2 = 47.9 kN/m^2
Esfuerzos y momentos	
Esfuerzos	1 $lb/pulg^2$ = 0.006895 MPa
	1 $klb/pulg^2$ = 6.895 MPa
Momento flector o torsor	1 lb-pie = 1.356 N-m
	1 klb-pie = 1.356 kN-m

APÉNDICE C

MÉTODO DE DISEÑO UNIFICADO PARA ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO Y PREESFORZADO SOMETIDOS A FLEXIÓN Y A COMPRESIÓN

C.1 INTRODUCCIÓN

Muchas de las ecuaciones y de los procedimientos del Código ACI han sido desarrolladas empíricamente para tipos específicos de elementos y de condiciones de carga y por tanto su aplicabilidad tiene límites estrictos. Esta situación se presentó en la sección 4.8 en el contexto de diseño a cortante, y se identificó una tendencia hacia el desarrollo de métodos de diseño más racionales y consistentes de elementos sometidos a cortante que sean aplicables a *todos* los elementos estructurales de concreto (ver las referencias 4.14a, 4.17 a 4.22). Una situación similar se presenta con respecto a algunos aspectos del diseño para cargas de flexión y axiales. Se utilizan métodos de diseño y reglas diferentes para vigas y para columnas. Las ecuaciones que gobiernan el diseño de vigas preesforzadas son distintas de aquellas que gobiernan el concreto reforzado. El diseñador de vigas parcialmente preesforzadas encuentra muy pocas guías de diseño. Recientemente han aparecido artículos importantes en los cuales se presentan intentos para desarrollar métodos consistentes que sean aplicables en todo el espectro incluyendo columnas, vigas reforzadas de manera convencional y vigas parcial o totalmente preesforzadas (ver las referencias C.1 y C.2).

Se ha adicionado un nuevo apéndice B al Código ACI de 1995 titulado "Disposiciones de diseño unificadas para elementos de concreto reforzado y preesforzado sometidos a flexión y a compresión", basado en las propuestas de la referencia C.1. Las secciones numeradas que se incluyen en el apéndice B del Código ACI pueden utilizarse en lugar de las secciones numeradas correspondientes de los capítulos 8, 9, 10 y 18 del Código. Pero debe advertirse que si se utiliza *cualquier* sección del apéndice, entonces deben usarse *todas* las demás. Las nuevas disposiciones hacen referencia principalmente a los límites del refuerzo, a coeficientes de reducción de resistencia y a redistribución de momentos.

C.2 CUANTÍA DE ACERO BALANCEADA Y LÍMITES DEL REFUERZO

El cambio clave propuesto es una modificación del Código ACI 10.3.3, el cual define la cuantía máxima de refuerzo para elementos sometidos a flexión y para elementos sometidos a cargas combinadas de flexión y de compresión axial. Se introducen los conceptos de secciones controladas por tensión y secciones controladas por compresión. Ambas se definen en términos de la deformación unitaria neta a tensión ϵ_t, para la resistencia nominal en el acero extremo a tensión, sin contar con la deformación unitaria efectiva de preesfuerzo. El acero extremo a tensión tiene la mayor profundidad, d_t, medida a partir de la fibra extrema a compresión. La *deformación unitaria límite para control por compresión* se establece como la deformación unitaria neta a tensión en el refuerzo que corresponde a la falla balanceada y, por tanto, es igual a la deformación unitaria de fluencia del refuerzo. Para acero grado 60 esto es igual a 0.002, como se indica en la figura C.1*b*. De acuerdo con el Código ACI B.10.3.2, para secciones preesforzadas se permite el uso de la misma deformación unitaria límite para control a compresión que para el acero grado 60. La *deformación unitaria límite para control por tensión* se establece en 0.005 para todos los aceros, tal como se muestra en la figura C.1*c*. De esta manera la sección controlada por compresión es aquella que tiene una deformación unitaria neta a tensión en el acero igual o menor que la deformación unitaria límite para control por compresión en el momento en que el concreto a compresión alcanza su deformación límite supuesta de 0.003. Una sección controlada por tensión es aquella que tiene una deformación unitaria neta a tensión en el acero de 0.005 o más cuando el concreto a compresión alcanza su deformación límite supuesta de 0.003. Las secciones con una deformación unitaria neta a tensión entre la deformación unitaria límite para control por compresión y 0.005 constituyen la zona de transición entre las secciones controladas por compresión y las controladas por tensión.

En la figura C.1 puede observarse que las deformaciones unitarias límites a tensión también pueden plantearse en términos de la relación c/d_t. Los valores límites de c/d_t para secciones controladas por compresión con acero grado 60 y para secciones controladas por tensión son, respectivamente, 0.600 y 0.375.

En el cuerpo principal del Código ACI no se establece la deformación unitaria límite a tensión para elementos a flexión, pero queda implícita en la cuantía de refuerzo máxima a tensión de $0.75\rho_b$. Por ejemplo, para una sección rectangular que utiliza refuerzo grado 60 con $\epsilon_t = 0.00207$, para las condiciones balanceadas c/d_t es igual a 0.592. Si se utiliza una cuantía de refuerzo de $0.75\rho_b$, el eje neutro está proporcionalmente más arriba, y puede demostrarse que la deformación unitaria neta a tensión correspondiente para la resistencia nominal a flexión es 0.00376. Para refuerzo grado 80, los cálculos correspondientes arrojan un valor de deformación unitaria neta a tensión de 0.00467.

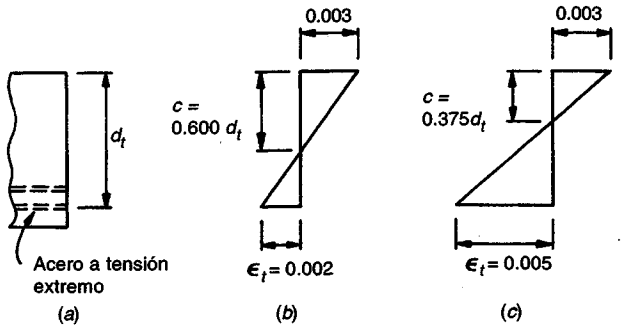


FIGURA C.1
Distribuciones de deformaciones unitarias límites y deformaciones unitarias netas a tensión para refuerzo grado 60: (*a*) ubicación del acero a tensión extremo; (*b*) deformación unitaria límite para control por compresión; (*c*) deformación unitaria límite para control por tensión.

La nueva deformación unitaria límite neta a tensión de 0.005 para secciones controladas por tensión se seleccionó como un valor único que pudiera aplicarse a todos los tipos de acero (de preesfuerzo y de refuerzo) permitidos por el Código ACI. A menos que se requieran mayores niveles de ductilidad, como es el caso de la redistribución de momentos (ver la sección C.4), el límite de 0.005 proporcionará ductilidad suficiente para diseños corrientes. Observe que el valor de 0.005 no es un límite absoluto, tal como es el valor de $0.75\rho_b$ del cuerpo principal del Código; por el contrario, es un punto en el cual el coeficiente de reducción de resistencia empieza a reducirse (ver la sección C.3). Se permiten cuantías de refuerzo altas que produzcan deformaciones unitarias netas a tensión menores que 0.005, pero éstas no serán económicas debido a los bajos valores del coeficiente de reducción de resistencia.

C.3 COEFICIENTES DE REDUCCIÓN DE RESISTENCIA

Las disposiciones del Código ACI 9.3.2 que definen el coeficiente de reducción de resistencia ϕ, también se modifican. Las disposiciones actuales establecen $\phi = 0.90$ para flexión sin cargas axiales y 0.70 ó 0.75 para compresión axial y compresión axial más flexión (para elementos con flejes transversales o espirales respectivamente), con una transición basada en la relación $\phi P_n/0.10 f'_c A_g$ (ver el capítulo 8). De acuerdo con el Código ACI, B.9.3.2, estas disposiciones se remplazan; el coeficiente de reducción de resistencia ϕ, debe tomarse de la manera siguiente:

Secciones controladas por tensión	0.90
Secciones controladas por compresión:	
(a) Elementos con refuerzo en espiral que cumplan con los requisitos del Código	0.75
(b) Elementos con otro tipo de refuerzo	0.70

Para secciones en las cuales la deformación unitaria neta en el acero a tensión extremo para la resistencia nominal esté entre los límites para secciones controladas por compresión y secciones controladas por tensión, ϕ debe incrementarse linealmente de acuerdo con el Código ACI B.9.3.2, desde aquél para secciones controladas por compresión hasta 0.90, a medida que la deformación unitaria neta a tensión, ϵ_t, aumente desde la deformación unitaria límite para control por compresión hasta el límite de 0.005, como lo indica la figura C.2.

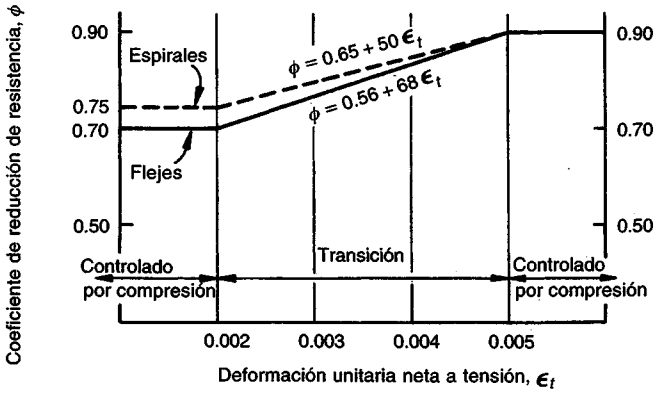


FIGURA C.2
Variación de ϕ con la deformación unitaria neta a tensión para acero grado 60 (*adaptada del Código ACI 318-95*).

C.4 REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS NEGATIVOS EN ELEMENTOS CONTINUOS A FLEXIÓN

Las ventajas y la economía de la redistribución de los momentos negativos en elementos continuos se han presentado en la sección 11.9e. En el Código ACI 8.4, se establecen ecuaciones que controlan la redistribución de momentos en elementos a flexión continuos *no preesforzados*. El Código ACI 18.10.4 establece ecuaciones análogas pero diferentes y más complicadas para elementos a flexión continuos *preesforzados*. La necesidad de unificar y simplificar las disposiciones para redistribución fue un factor de motivación importante en el desarrollo del apéndice B del Código ACI.

Mientras que el cuerpo principal del Código ACI establece porcentajes admisibles de redistribución en términos de las cuantías de refuerzo o de índices de refuerzo, en el apéndice B de dicho código los porcentajes admisibles se especifican en términos de la deformación unitaria neta a tensión, ϵ_t. Se establece que, excepto cuando se utilicen valores aproximados para los momentos, el diseñador puede aumentar o disminuir los momentos negativos calculados con la teoría elástica en los apoyos de elementos continuos a flexión para cualquier distribución de cargas supuesta en no más de 1000 ϵ_t por ciento, con un máximo del 20 por ciento. Los momentos negativos modificados deben utilizarse para calcular los momentos en las secciones dentro de la luz. Debido a que la redistribución depende de una adecuada ductilidad en las zonas de formación de rótulas, la redistribución de momentos se limita a las secciones que tienen una deformación unitaria neta a tensión de al menos 0.0075 en la sección en la cual el momento se reduce.

Mientras que en el cuerpo principal del Código ACI deben tenerse en cuenta los efectos de las aletas y de la distribución del refuerzo en las disposiciones para cuantías de acero balanceadas, y para la redistribución de momentos para elementos reforzados y para elementos preesforzados, en las nuevas disposiciones del Código ACI B8.4 estos efectos se consideran de manera automática mediante la utilización de la deformación unitaria neta a tensión, ϵ_t.

Los efectos de estas disposiciones para la redistribución y una comparación con las disposiciones del cuerpo principal del Código ACI se presentan en la figura C.3.

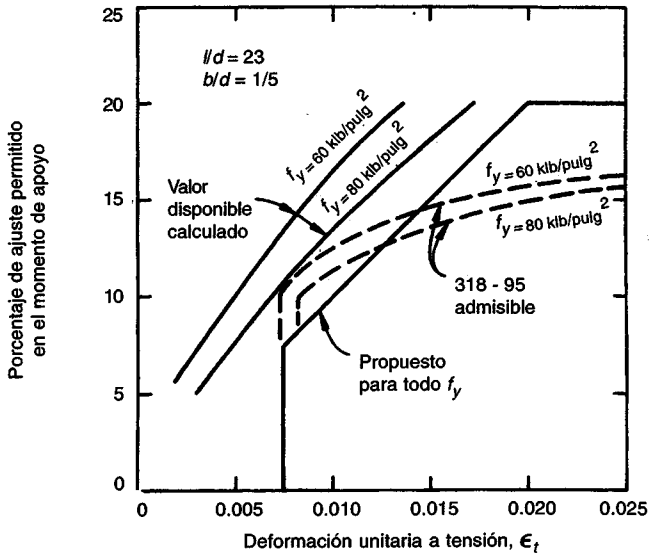


FIGURA C.3
Redistribución admisible de momentos bajo las disposiciones del apéndice B del Código ACI (*adaptada del Código ACI 318-95*).

C.5 CONCLUSIONES

Aunque el tratamiento que le da el cuerpo principal del Código ACI a la cuantía de acero límite, a la redistribución de momentos y a los coeficientes de reducción de resistencia parece ser satisfactorio y simple para concreto reforzado corriente, se reconocen sus limitaciones para elementos parciales y totalmente preesforzados y para elementos sometidos a compresión axial y excéntrica. El material del apéndice B del Código ACI tiene por objeto proporcionar una metodología consistente para todo el rango de elementos estructurales de concreto, esperando que no se compliquen las cosas que ahora son simples. Las nuevas disposiciones se aplican igualmente a vigas y columnas de sección rectangular o a cualquier otra sección, con refuerzo convencional, preesforzadas o parcialmente preesforzadas, con una o más capas de acero.

El material que presenta el apéndice B del Código ACI puede o no representar la respuesta final. Se ha hecho énfasis en que bajo ciertas circunstancias se requeriría un procedimiento iterativo para establecer el valor del coeficiente ϕ, y que se necesitaría mayor esfuerzo computacional que si se utilizaran los procedimientos del cuerpo principal del Código ACI (ver la referencia C.3). No está clara la racionalidad de utilizar las mismas deformaciones unitarias límites para control por compresión para aceros de preesfuerzos y para aceros grado 60. La reducción significativa en los valores de ϕ para secciones con cuantías de acero cercanas a los valores límites de $0.75\rho_b$ para secciones subreforzadas pueden no ser aceptables.

Además, se ha observado que las nuevas propuestas para el coeficiente de reducción de resistencia no han mejorado los gráficos de diseño de columnas cargadas excéntricamente. Aunque son ligeramente diferentes que los anteriores, éstos presentan aún discontinuidades en la forma que no están asociadas a ninguna ley física conocida (ver la referencia C.4). El Canadian Building Code y algunos códigos europeos han resuelto de manera exitosa este problema mediante formulaciones que aplican los coeficientes de reducción de resistencia de manera individual a los dos materiales constitutivos en lugar de aplicarlos a la sección compuesta (ver las referencias C.5 a C.7).

Aunque todavía no son perfectas, las propuestas del apéndice B del Código ACI representan un paso importante hacia las disposiciones unificadas para el diseño del concreto estructural, y pueden esperarse más desarrollos a lo largo de estas líneas.

REFERENCIAS

C.1. R. F. Mast, "Unified Design Provisions for Reinforced and Prestressed Concrete Flexural and Compression Members", *ACI Struct. J.*, vol. 89, no. 2, 1992, pp. 185-199.

C.2. A. E. Naaman, "Unified Design Recommendations for Reinforced, Prestressed, and Partially Prestressed Concrete Bending and Compression Members", *ACI Struct. J.*, vol. 89, no. 2, 1992, pp. 200-210.

C.3. C. W. Dolan, disc. of Refs. C.1 and C.2, *ACI Struct. J.*, vol. 89, no. 5, 1992, pp. 592-593.

C.4. R. K. Devalapura and M. K. Tadros, disc. of Ref. C.1, *ACI Struct. J.*, vol. 89, No. 5, 1992, PP. 591-592.

C.5. CSA Committee A23.3, "Design of Concrete Structures: Structures (Design)—A National Standard of Canada", Canadian Standards Association, Etobicoke, Ontario, 1994, 199 pp.

C.6. J. Christiansen, disc. of Ref. C.2, *ACI Struct. J.*, vol. 89, no. 5, 1992, pp. 594-595.

C.7. R. K. Devalapura and M. T. Tadros, disc. of Ref. C.2, *ACI Struct. J.*, vol. 89, no. 5, 1992, pp. 596-597.

ÍNDICE

AASHTO, especificaciones, 9, 16, 26
Ábaco, losas planas sin vigas con, 559
Abeles, P. W., 644
Aberturas en losas, 389, 433, 485
Acelerantes, 37
Aceros:
  de preesfuerzo, 58
  de refuerzo, 52
  de repartición en losas, 370
  mallas electrosoldadas de alambrón, 57
Aceros de preesfuerzo:
  curvas esfuerzo-deformación unitaria, 58
  esfuerzos admisibles, 593
  grados y resistencias, 58
  relajación de esfuerzos, 59
ACI:
  código, 16
  coeficientes de momento del Código, 349
  comentarios al Código, 16-17
  disposiciones de seguridad, 16
  factores de carga, 17
  de resistencia, 18
  método de los coeficientes para los momentos en losas, 375
Adams, P. F., 305
Adherencia:
  a compresión, 175
  a flexión, 157
  a tensión, 170, 188
  análisis de sección fisurada, 158
  distribución de los esfuerzos de, 160
  factores de modificación, 170
  resistencia ultima, 161
  vigas preesforzadas, 635
  (*véase también* Longitud de desarrollo)
Aditivos, concreto, 36, 49
Agregados, 29
  finos, 30
  gruesos, 30
  livianos, 30
  pesados, 30
Agrietamiento, 195
  ancho de las grietas, 195
  disposiciones del Código ACI, 197
  ecuación de Gergely-Lutz, 196
  en elementos sometidos a flexión, 195
  por flexión, 195
  variables que afectan el, 195
Ala:
  ancho del, en vigas T, 96
  ancho efectivo del, 96
Amenaza sísmica moderada, pórticos en zonas de, 670
Amplificación de momento en columnas, 277, 282
Análisis:
  aproximados, 344
  de losas mediante el método de trabajo virtual, 453
  de segundo orden en columnas, 303
  límite, 352
  matricial, 339
Análisis de líneas de fluencia, 463
  abanicos bajo cargas concentradas, 461
  efectos de:
    borde, 459
    de esquina, 459
    limitaciones, 463
    líneas de fluencia oblicuas, 457
  método:
    de equilibrio, 451
    de trabajo virtual, 453
    ubicación de las líneas de fluencia, 448
Análisis de vigas y pórticos continuos, 333
  aproximados, 344
  elástico, 337
  limite, 352
  método del portal, 346
  preliminar, 343
  subpórtico, 336
Análisis elástico, 352
  de sección fisurada, 68
  de sección no fisurada, 66
Analogía de la armadura espacial, 225

Anclaje:
con gancho, 169
en uniones, 315
mallas electrosoldadas de alambre, 174
mecánico, 171
refuerzo en el alma, 173
Anderson, N. S., 331
Ángulo de giro y deflexión, método del, 338
Apoyo, vigas de, 323
Arcos de concreto, 6, 8
Área mínima de acero en el alma, 126
AREA, manual, 9, 16, 26
Armer, G. S. T., 496
ASCE, especificación de carga, 10, 26
ASTM, especificaciones, 30, 34, 36, 53, 57, 58, 195, 655
Avraham, C. H., 464
Ayudas de diseño, 84, 261, 673

Balance de cargas en vigas preesforzadas, 619
Bao, A., 442
Bardhan-Roy, B. K., 644
Barras:
galvanizadas, 57
revestidas con sustancias epóxicas, 57
Barras de refuerzo:
despiece, 308
empalmes en, 187, 188
espaciamiento de, 88
puntos de corte y doblamiento, 176
selección de, 88
Beaulieu, D., 305
Benjamin, J. R., 363
Birkeland, H. L., 154, 362, 583
Birkeland, P. W., 154, 583
Blakey, F. A., 496
Bloque rectangular de esfuerzos, 75
Blume, J. A., 671
Bordes continuos y discontinuos, momentos negativos en, 377
Brandtzaeg, A., 272
Branson, D., 43, 60, 389, 442, 644
Breen, J. E., 305, 363
Bresler, B., 61, 153, 273
Brown, R. L., 27, 272
Burns, N. H., 644

Capacidad de rotación en rótulas, 358
Capiteles de columnas, 559
Cardenas, A. E., 583
Carga(s):
ambientales, 9
aplicación de cargas vivas, 9, 335
ASCE, cargas vivas, 10
concentradas en losas, 461
de Euler, 277
de nieve, 11
de resistencia, factores de, 18
de viento, 11
equivalentes para fuerzas de preesfuerzo, 587
factor de, 14
mayoradas, 17
muertas, 9
sísmicas, 652
sostenida, resistencia bajo, 43
variabilidad de las, 12
vivas, 9, 10
Carga sísmica, 648
cargas laterales:
dinámicas, 654
mínimas de diseño, 653
cortante en la base, 652
criterios para, 652
desplazamientos, 649
respuesta de elementos, 651
respuesta estructural, 649
Cargas vivas, 10
aplicación de, 335
edificios, 9
Carino, N.J., 61
Carrasquillo, R.L., 60
Cascarones:
cilíndricos, 5
en placa plegada, 5
esféricos, 6
Cemento, 28
composición, 29
de alta resistencia inicial, 1, 29
hidratación, 29
tipos de, 29
Cenizas volantes, 37, 49
Centro MLC, 551
Centroide plástico de columnas, 257
Chang, D. C., 363
Chen, K. C., 331, 583
Christiansen, J., 712
Chu, K. H., 464
Cimentaciones (*véase* Zapatas)
Coeficiente térmico:
del acero, 51
del concreto, 49
Coeficientes de momento del Código ACI, 349
Collins, M. P., 134, 154, 239, 644
Columnas, 241
a flexión, 249, 281
análisis de pórticos no arriostrados, 296
ayudas de diseño, 270, 695

carga de Euler, 277
cargadas axialmente, 20
circulares, 21, 258
con flejes, 21, 244
con refuerzo en espiral, 21, 244
diagramas de interacción, 250, 695
disposiciones de seguridad, 259
disposiciones del Código ACI, 259
empalme de barras en, 271
equivalentes, 411
esbeltas (*véase* Columnas esbeltas)
falla balanceada, 252
flexión biaxial de, 264
análisis por computador, 270
método de la carga inversa, 267
método del contorno de carga, 265
losas apoyadas sobre, 392
rectangulares, a flexión, 249
reforzadas asimétricamente, 257
refuerzo distribuido, 256
refuerzo transversal, 244
Columnas esbeltas, 276
análisis de segundo orden, 277, 303
definición de, 276
disposiciones del Código ACI, 286
en pórticos arriostrados, 280, 285, 287
en pórticos no arriostrados, 284, 285, 296
factor de amplificación de momento, 277, 282, 284, 289
factor de longitud efectiva, 278, 292
índice de estabilidad, 287
método P-delta, 303
momentos de segundo orden, 277
radio de giro, 286
relación de esbeltez, 277
Compactación del concreto, 33
Compresión:
axial, 20, 25, 241, 277
uniaxial, 38
Concreto:
aditivos, 1, 36
coeficiente térmico, 47
compactación del, 33
componentes, 1
comportamiento bajo cargas sostenidas, 41, 42
consistencia, 31, 32
control de calidad, 34
curado, 1, 33
curvas de esfuerzo-deformación unitaria en, 22, 38
de alta resistencia, 49
definición, 1
densidad, 31
dosificación, 1, 31
fatiga, 43
flujo plástico, 41
liviano, 30
mezclado de, 32
módulo de elasticidad, 39
pesado, 30
preesforzado, 2
protección del acero, 87
relación de Poisson, 41
resistencia:
a la compresión, 37, 38
a la tensión, 43
aumento con la edad, 39
bajo esfuerzos combinados, 45
biaxial, 45, 46
retracción de fraguado, 47
vaciado, 33
Concreto preesforzado, 584
análisis elástico, 595
cargas equivalentes, 587
deflexiones, 641
diseño a cortante, 628
diseño a flexión, 607, 619
esfuerzos admisibles en el acero, 593
esfuerzos admisibles en el concreto, 595
esfuerzos de adherencia, 635
longitud de desarrollo, 635
longitud de transferencia, 635
pérdidas en la fuerza de preesfuerzo, 624
postensado, 590
preesfuerzo parcial, 605
pretensado, 590
resistencia a la flexión, 601
selección de la forma, 616
Concreto prefabricado:
columnas, 572
conexiones, 577
cornisas, 327
doble T, 570
ejemplos de edificios, 574, 575
elementos de cubierta y de entrepiso, 569
losas, 570
ménsulas, 327
paneles de muro, 569
T sencilla, 570
vigas, 570
Condiciones:
de apoyo, 342
de servicio, 194
Conectores de cortante en losas, 419, 423
Conexiones de elementos prefabricados, 577
Construcción, sistemas de, 550
Contrafuertes, muros de contención con, 545
Control de deflexiones, 385
Conway, H. D., 154

Cook, W. D., 331
Corley, W. G., 61, 442, 583
Corning, L. H., 671
Cornisas, 327
Cortante, 105
  diseño del refuerzo mediante espigos de, 428
  disposiciones del Código ACI, 120
  en losas planas, 417
  en placas planas, 417
  fuerzas axiales y, 128
  losas apoyadas en los bordes, 380
  modelos de armadura para, 134, 145
  muros de, 564
  refuerzo:
    en el alma, 116
    vigas, 115
  uniones, 312
  vigas:
    con altura variable, 132
    de concreto preesforzado, 628
    de concreto reforzado, 105
    de gran altura, 138
    homogéneas, 64, 106
  zapatas, 417
Cowan, H. J., 61
Cranston, W. B., 305
Crawford, R. E., 496
Crist, R. A., 154
Cross, H., 362
Cuantía de acero balanceada:
  por el método de diseño unificado, 709
  vigas con refuerzo a compresión, 90, 91
  vigas con refuerzo a tensión, 77
  vigas T, 96
Cuantía mínima de acero a la flexión, 79
Curado del concreto, 1, 33
Curvas de esfuerzo-deformación unitaria:
  a flexión, 71
  aceros de preesfuerzo, 58
  barras de refuerzo, 22, 55
  concreto, 22, 38, 40
Curvatura *versus* momento, 216

Dados de pilotes, 522
Davis, H. E., 60
Debaiky, S. Y., 154
Deflexiones, 200
  cargas sostenidas, 204
  control de, 200
  disposiciones del Código ACI, 207
  efecto del historial de aplicación de cargas, 206
  elásticas, 201, 208
  flujo plástico, 209
  instantáneas, 201, 208
  losas en dos direcciones y apoyadas en los bordes, 385
  momento efectivo de inercia para, 202
  multiplicadores a largo plazo, 205, 209
  permitidas, 210
  placas y losas planas, 434
  por retracción de fraguado, 213
  por temperatura, 213
  vigas continuas, 209
Demanda de rotación en rótulas, 356
Demsky, E. C., 464
dePaiva, H. P., 154
Despiece de uniones, 308
Detwiler, G., 60
Devalapura, R. K., 712
Diagramas de interacción:
  para carga axial y flexión, 250, 695
  para flexión biaxial en columnas, 264
  para resistencia biaxial del concreto, 46
Diseño por esfuerzos admisibles, 15
Diseño preliminar, 343
Diseño sísmico, 647
  despiece de uniones, 661
  disposiciones del Código ACI para el, 655
    para amenaza sísmica moderada, 670
    para muros, diafragmas, cerchas, 665
    para pórticos, 656
    para resistencia a cortante, 666
  factores de carga, 17
  refuerzo para, 655
Disposiciones de integridad estructural, 183, 582
Dolan, C. W., 102, 712
Domel, A. W., 671
Dumonteil, P., 305

Ehsani, M. R., 273
Eje neutro en vigas:
  elástico, 68
  último, 74
Elementos:
  a compresión, 241
  apoyados en las esquinas, 488
  elementos no diseñados para resistir fuerzas sísmicas, 664
Elgabry, A. A., 442
Ellingwood, B., 26
Elmiema, E. I., 154
Elzanaty, A. H., 154
Empalmes de barras de refuerzo:
  a compresión, 187
  a tensión, 188
  en columnas, 187, 271
Ensayo de asentamiento (*slump test*), 31

Entrepisos monolíticos de vigas, 552
Ernst, G. C., 363
Esfuerzos para cargas de servicio, 24
Espesor mínimo:
de losas, 368, 403
losas en dos direcciones, 403
vigas y losas en una dirección, 208
Espiral, columnas con refuerzos en, 21, 244
Estabilidad en muros de contención, 532
Estribos, 116
anclaje de, 173
fuerzas en, 118
mediante espigos de cortante en losas, 428
Euler, carga de, 277
Excentricidad en columnas, 249

Factor de resistencia a la flexión, 79, 84
Factores de carga ACI, 17
Falla balanceada:
columnas, 252
vigas, 77, 92, 98
por compresión secundaria, 66
Fallsen, H. B., 442
Fintel, M., 548, 583
Fiorata, A. E., 61
Flejes transversales en columnas, 21, 244
Fleming, J. F., 363
Flexión:
análisis de resistencia a la flexión, 70
análisis elástico de secciones fisuradas, 68
análisis elástico de secciones no fisuradas, 66
supuestos, 62
vigas homogéneas, 62
(*véase también* Vigas)
Flexión biaxial de columnas, 264
análisis por computador, 270
método de la carga inversa, 267
método del contorno de carga, 265
Flujo plástico del concreto:
coeficiente de, 42
específico, 42
variación en el tiempo, 43
Ford, J. S., 305, 363
Formaletas en forma de domo, 562
Fraguado, retardantes del, 37
Fuerzas axiales, efectos sobre el cortante, 128
Funcionalidad, 12
Furlong, R. W., 273, 305

Gallagher, R. H., 363
Gamble, W. L., 389, 442, 464, 496

Ganchos:
dimensiones estándar, 169
factores de modificación, 170
longitud de desarrollo, 170
para estribos, 173
Gebler, S. H., 61
Gere, J. M., 305, 363
Gergely, P., 644
Gergely-Lutz, ecuación de, 196
Gerstle, K. H., 61
Gesund, H., 464
Ghali, A., 442, 464
Ghoneim, M. G., 238
Ghosh, S. K., 671
Gouwens, A., 273, 442
Graham, C. J., 443
Grietas:
de tensión, 66
diagonales, 109, 112
Guralnick, S. A., 442
Gustafson, D. P., 442
Guyon, Y., 644

Hage, S. E., 305
Hanna, S. N., 442
Hanson, J. M., 61, 583, 644
Hanson, N. W., 644
Hanson, W. E., 525
Hatcher, D. S., 442, 464
Hawkins, N. M., 154, 442, 583
Hayes, B., 463
Heiman, J. L., 442
Helgason, T., 61
Hetenyi, M., 525
Hillerborg, A., 451, 496
Hilsdorf, H. K., 61
Hinojosa, R. C., 442
Hofbeck, J. A., 583
Hoffman, E. S., 442
Hognestad, E., 102, 463, 525, 583
Hover, K. C., 60
Hsu, T. T. C., 60, 61, 238
Huntington, W. C., 548

Idealización de la estructura, 339
Incorporadores de aire, 36
Índice de estabilidad, 287
Ingerslev, A., 463
Integridad estructural, 183, 582

Jennewein, M., 154
Jirsa, J. O., 190, 331, 442

Johansen, K. W., 463
Johnson, B. G., 305
Jones, L. L., 463

Kaar, P. H., 102, 644
Kani, G. N. J., 154
Karni, J., 61
Kelly, J. W., 60
Kemp, K. O., 496
Khaloo, A. R., 154
Kramrisch, F., 525
Kreger, M. E., 442
Kripanarayanan, K. M., 583
Kriz, L. B., 102, 272, 331, 583
Kupfer, H., 61

LaFraugh, R. W., 442, 583
Lai, S. M. A., 305
Lampert, P., 238
Lenschow, R., 463
Leon, R., 442
Libby, J. R., 644
Lin, T. Y., 619, 644
Líneas:
  de discontinuidad en losas, 470
  de fluencia en forma de abanico, 461
Linse, D. H., 61
Longitud:
  de transferencia en vigas preesforzadas, 635
  efectiva de columnas, 278, 279, 292
  efectiva de luz, 339
  finita de articulación, 357, 359
Longitud de desarrollo, 163
  a compresión, 175
  barras con gancho, 169
  barras en paquete, 176
  disposiciones del Código ACI, 165
  estribos, 173
  factores de modificación, 170
  tensión, 166
Losas:
  aberturas en, 389, 433
  acero de repartición, 370
  apoyadas:
    en los bordes, 365
    sobre columnas, 392
  cargas concentradas sobre, 461
  columna equivalente, 411
  cortante:
    en losas apoyadas en columnas, 417
    en losas apoyadas en los bordes, 380, 400
  de tablero de acero de bajo calibre, 555
  deflexión de, 385, 434
  distribución lateral de momentos, 398
  en dos direcciones y apoyadas en los bordes, 365, 558
  en una dirección, 367
  espesores mínimos, 369, 403
  izadas, 561
  método:
    de diseño directo, 395
    de los coeficientes para momentos en, 375
    del pórtico equivalente, 409
  momento estático en, 392
  momentos en las secciones criticas, 396
  refuerzo a flexión, 379, 400
  teoría de las líneas de fluencia (*véase* Análisis de líneas de fluencia)
  tipos de, 365
  viga integral para cortante, 426
Losas en dos direcciones y apoyadas en los bordes:
  aberturas en, 389
  comportamiento de, 373
  deflexión, 385
  métodos de los coeficientes para momentos en, 375
  refuerzo a flexión, 379
Losas en una dirección, 365
  acero de repartición, 370
  acero para temperatura, 370
  cuantías de acero comunes, 369
  espesor mínimo, 369
  refuerzo para retracción de fraguado, 370
Losberg, A., 331, 548

MacGregor, J. G., 26, 27, 134, 153, 154, 305, 644
Magura, D. D., 583
Maher, D. R. H., 463
Malhotra, V. M., 60
Mallas electrosoldadas de alambrón, 575
Marcus, H., 389
Marques, J. G. L., 331
Marshall, W. T., 644
Marti, P., 134, 154, 331
Martinez, S., 60, 154, 272
Mast, R. F., 154, 583, 712
Mattock, A. H., 102, 154, 238, 272, 331, 363, 583, 644
Mayoradas, cargas, 17
McGuire, W., 363
McHenry, D., 61
Mehta, P. K., 61
Meinheit, D. F., 331
Ménsulas, 327
Método:
  de cortante por fricción, 148
  de diseño para estados límites, 75

de equilibrio para losas (*véase* Método de las franjas para losas)
de Hillerborg (*véase* Método de las franjas para losas)
de la carga inversa de columnas, 267
de la distribución de momentos, 337
de las franjas avanzado, 488
del contorno de carga para columnas, 265
del portal, 346
P-delta, 303, 654
Método de diseño directo para losas, 395
cortante en vigas de apoyo, 400
diseño de columnas, 400
distribución lateral de momentos, 398
espesor mínimo, 403
momentos en secciones críticas, 396
Método de diseño unificado, 708
coeficientes de reducción de resistencia, 710
cuantía de acero balanceada, 709
disposiciones del Código ACI, 708
límites del refuerzo, 709
redistribución de momentos, 711
secciones controladas por compresión, 709
secciones controladas por tensión, 709
Método de las franjas para losas, 467
avanzado, 488
bordes empotrados, 473
bordes libres, 478
con aberturas, 485
continuidad, 473
distribuciones de cargas, 469
elementos apoyados en las esquinas, 488
líneas de discontinuidad, 470
losas rectangulares, 472
principios básicos del, 468
Método del pórtico equivalente para losas, 409
análisis de deflexiones, 434
análisis de momentos, 412
bases del, 409
columna equivalente, 411
diseño a cortante, 417
para cargas horizontales, 440
por computador, 416
Métodos de diseño:
a la resistencia, 15
a la resistencia última, 15, 26
condiciones límites de servicio, 15
elástico, 15, 22
esfuerzos admisibles, 15
para cargas de servicio, 15
principios básicos alternos, 15, 19
Mezclado del concreto, 32
Microsílica, 37
Mirza, S. A., 26
Mitchell, D., 154, 239, 331, 442, 644
Modelos de armadura:
de ángulo variable, 135, 228
diseño a cortante, 134, 145
para vigas de gran altura, 145
Modelos puntal-tensor:
diseño de uniones, 320
para cornisas, 327
para el comportamiento de las uniones, 320
para ménsulas, 327
Módulo de elasticidad:
de aceros de preesfuerzo, 59
de barras de refuerzo, 55
del concreto, 39
Módulo de rotura, 44
Moehle, J. P., 442
Mokhtar, A. S., 442
Momento:
efectivo de inercia, 202
estático en losas, 396
versus curvatura en vigas, 216
de inercia, 341
de segundo orden en columnas, 277
Morsh, E., 154
Muros:
de contención, 527
análisis de estabilidad, 532
con contrafuertes, 545
de gravedad, 536
diseño estructural, 534
drenaje en, 536
en voladizo, 538
prefabricados, 547
de cortante, 564, 665
en edificio, 563
prefabricados, 569

Naaman, A. E., 60, 644, 712
Nawy, E. G., 644
Nervi, P. L., 362
Neville, A. M., 61
Newmark, N. M., 671
Nieves, J. M., 273
Nilson, A. H., 60, 61, 154, 272, 442, 644
Nilsson, I. H. E., 331, 548
Nomogramas de factores de longitud efectiva, 292
Norris, C. H., 363

Oelhafen, V. H., 305

Pannell, F. N., 273
Park, R., 331, 464, 496

Parme, A. L., 273
Patrones de cargas en vigas y pórticos, 335
Pauley, T., 331, 671
Paulson, K. A., 61
Peabody, D., Jr., 442
Peck, R. B., 525, 548
Pérdidas en la fuerza de preesfuerzo, 624
  estimativos globales, 624
  método del intervalo de tiempo, 628
  pérdidas por separado, 625
Pfrang, E. O., 305
Pisos de losa con banda, 554
Pister, K., 61
Placas:
  planas, 560
  plegadas, 4, 5
Planos típicos de ingeniería para edificios, 582
Plastificantes, 37
Pórticos en zonas de amenaza sísmica moderada, 670
Portland, cemento, 28, 29
Postensado, 590
Preesfuerzo parcial, 605
Presión de tierra sobre muros, 528
Preston, H. K., 644
Pretensado, 590
Priestly, M. J. N., 671
Protección contra rayos gamma y X, 30
Proveda, A., 154
Puentes, 6, 8
Puntal a compresión, 320
Puntales a compresión, tamaño de los, 148
Puntos de corte de barras en vigas, 176
Puntos de inflexión para análisis aproximados, 345

Ramamurthy, L. N., 273
Ramezanianpour, A. A., 60
Raths, C. H., 331, 583
Redistribución de momentos, 352
  disposiciones del Código ACI, 359
  en losas, 447, 448
  en pórticos, 352
  en vigas, 356
  por el método de diseño unificado, 711
Redistribución inelástica de momentos, 354, 359
Reducción de momentos en vigas, 359
Refuerzo, 50
  a compresión, 89
  cantidad máxima de barras en vigas, 88
  curvas esfuerzo-deformación unitaria, 56
  deformaciones, 54
  empalmes en, 187
  en barras, 51
  en losas, 379, 400
  en paquete, 176
  galvanizado, 57
  grados y resistencias, 54
  mallas electrosoldadas de alambrón, 57
  módulo de elasticidad, 54-55
  número mínimo de barras en vigas, 199
  para temperatura en losas, 370
  preesforzado, 61
  puntos de corte, 176
  puntos de doblamiento, 176
  requisitos de recubrimiento, 87
  requisitos de espaciamiento, 88
  resistencia a la fatiga, 56
  revestimiento con sustancias epóxicas, 57
  selección de barras, 88
  soldadura del, 54
  tamaños estándar, 54
Refuerzo en el alma:
  anclaje para, 173
  diseño del, 125
  inclinado, 119
  vertical, 117
Relación:
  agua-cemento, 31, 32
  de esbeltez, 277
  modular, 22
Relajación de aceros de preesfuerzo, 59
Requisitos de recubrimiento de barras, 87
Resistencia a la fatiga:
  barras de refuerzo, 56
  concreto, 43
Resistencia a la flexión, factor de, 79, 84
Resistencia:
  biaxial del concreto, 45
  de diseño, 17
  factores de carga de, 18, 710
  nominal, 17
  requerida, 17
  tensión indirecta, 44
  variabilidad de la, 13
Retardantes del fraguado, 37
Retracción de fraguado:
  deflexiones por, 213
  del concreto, 47
  en losas, 370
Richart, F. E., 27, 272
Río Magdalena, puente en concreto sobre el, 6
Ritter, W., 154
Rogers, P., 389
Rogowsky, D. M., 154
Rótulas plásticas:
  en losas, 446
  en vigas y pórticos, 353
Rugosidad natural, 51

Rüsch, H., 43, 61, 102
Russell, H. G., 61

Scanlon, A., 443
Schafer, J., 331
Schlaich, J. I., 134, 154, 331
Scott, N. L., 644
Sección transformada:
de columnas, 23
de vigas, 68
Secciones controladas por compresión, 709
Seguridad:
consideraciones, 12
disposiciones del Código ACI, 16
estructural, 14
factores de reducción, 14
índice de, 14
margen de, 14
Shafer, K., 154
Shah, S. P., 60
Shaikh, A. F., 583
Siess, C. P., 61, 154, 442
Simmonds, S. H., 464
Singh, R. B., 464
Sistemas de construcción, 550
compuestos, 554, 555
de losas planas, 559
de placas planas, 560
de viguetas en una dirección, 555
entrepisos de vigas, 552
losas en dos direcciones, 558
losas reforzadas con tablero de acero, 555
prefabricados, 568
viguetas en dos direcciones, 562
Sistemas de entrepiso:
con viguetas en dos direcciones, 562
de losas planas, 5, 559
de losas tipo "waffle", 562
de placas planas, 5, 560
losas apoyadas en los bordes, 365, 558
losas en dos direcciones, 392
losas izadas, 561
prefabricados, 570
reforzadas con tableros de acero, 555
tipo placa plana sin vigas, 3
viguetas en una dirección, 3, 555
Sistemas estructurales, 2
Sivasundaram, V., 60
Slate, F. O., 60, 61, 154, 272
Smadi, M. M., 61
Soongswang, K., 331, 583
South Wacker Drive Building, 49, 50
Sozen, M. A., 61, 442, 463, 644
Stone, W. C., 644
Stratta, J. L., 671
Structural Engineers Association of California, 652
Sturman, G. M., 61
Superplastificantes, 37, 49

Tadros, M. K., 712
Talbot, A. N., 525
Tanques, 7, 8
Tasuji, M. E., 61
Taylor, P. J., 442
Taylor, R., 463
Temperatura, deflexiones por cambios de, 213
Tensión:
axial, 25
resistencia del concreto, 43
Tensión diagonal:
vigas de concreto preesforzado, 628
vigas de concreto reforzado, 105, 109
vigas homogéneas, 106
Teorema:
del límite inferior, 448
del límite superior, 448
Teoría de la plasticidad:
teorema del límite inferior, 448
teoría del límite superior, 448
Teoría del campo a compresión:
cortante, 135
modificada, 137
Terzaghi, K., 525, 548
Thornburn, T. H., 525, 548
Thurlimann, B., 134, 238
Timoshenko, S., 61, 496
Torque de agrietamiento, 225
Torsión, 222
analogía de la armadura espacial, 225, 228
analogía del tubo de pared delgada, 225
cortante y, 230
disposiciones del Código ACI, 231
en concreto reforzado, 226
en concreto simple, 224
mínima, 231
por compatibilidad, 223, 232
por equilibrio, 223, 232
primaria, 223, 232
refuerzo a, 233
secundaria, 223, 232
torque de agrietamiento, 225
Troxell, G. E., 60

Uniform Building Code, 26, 652, 671
Uniones, 308

anclaje de las barras en las, 315
cargas y fuerzas en, 310
clasificación de las, 310
con vigas anchas, 318
de esquina, 324
en T, 326
modelos puntal-tensor (*strut-and-tie*), 320
refuerzo de las, 314
resistencia a cortante, 312
viga secundaria-viga principal, 321
viga-columna (nudos), 309
Utku, S., 363

Valley, M., 305
Vanderbilt, M. D., 363, 442
Vecchio, F. J., 154
Viga-columna, uniones, 309
Vigas:
análisis elástico de sección fisurada, 68
análisis elástico de sección no fisurada, 66
con refuerzo a compresión, 89
con refuerzo a tensión, 64, 74
de gran altura, 138
dimensiones de, 88, 99
doblemente reforzadas, 89
integrales en losas, 426
sobrerreforzadas, 83
subreforzadas, 77
T, 96
Vigas de gran altura, 138
cortante en, 141
disposiciones del Código ACI, 140
refuerzo de, 142
Vigas T, 96
análisis a la resistencia, 97
ancho efectivo del ala, 96
cuantía balanceada de acero, 99
dimensiones, 99
Viguetas:
en una dirección, 555
entrepisos de, 555, 562

Walters, D. B., 442
Wang, C. K., 363
Weaver, W., 363
Whiting, D., 61
Wilbur, J. B., 363
Winter, G., 27, 61, 154
Woinowsky-Krieger, S., 496
Wood, R. H., 305, 463, 496
Workman, E. B., 644

Yamazaki, J., 442

Zapatas, 499
cargas de las, 501
combinadas, 513
en franjas continuas, 513
losas de cimentacion, 521
para columnas, 505
para dos columnas, 514
para muros, 503
reticulares, 521
superficiales, 499
Zaslavsky, A., 464
Zia, P., 644
Zona de anclaje, preesfuerzo, 636
Zonas sísmicas de los Estados Unidos, 648, 652